目　录

上　篇

下 篇

上　篇

概　述

本书上篇主要介绍实变函数论中最基础的内容. 实变函数论是十九世纪末二十世纪初形成的一门学科, 它的基本内容已成为分析数学各分支的普遍基础, 也是某些数学分支的基本工具. 它不仅应用广泛, 而且它的观念和方法以及它在其它分支方面的应用对形成近代数学的两个重要分支——点集拓扑学和泛函分析有极为重要的影响.

实变函数论就其本意来说,仍象微积分一样是从连续性、可微性、可积性等三个方面研究一般的实变数(包括多变数)的函数.如果说微积分中处理的都是性质"良好"的函数, 那末实变函数论是讨论相当一般的函数, 即主要讨论从微积分看来是性质"差"的函数. 实变函数论是微积分学的发展和提高.

关于一般函数的连续性、可微性、可积性, 实变函数论不仅都具有丰富的内容,而且都有很深刻的结果,作为基础课教材的本书自然不能都加以介绍, 只以分析数学各分支普遍最为需要的积分作为主要介绍对象. 考虑到人们工作中对积分这个数学工具的要求普遍提高,所以本书中介绍 Lebesgue-Stieltjes 积分. 另外, 本书中介绍积分理论时是沿着积分→可测函数→可测集这条路线, 而不是通常较多采用的从可测集→可测函数→积分这条路线, 目的是为了使读者较快地先掌握"逐项积分"、"积分交换顺序"这些最为基本的定理. 根据过去几届和现在在应用数学和计算数学专业两届教学实践的结果,看来是能做到易懂、花时少地实现这个目的.

第一章　集，直线上点集

§1　集和集的运算

1. 集

一般地说，把在一定场合所要考察和研究的某些对象的全体称为一个集合，或简称为集，而称对象为元素. 例如，自然数的全体是一个集，而每个自然数就是这个集中的元素. 又例如$[a, b]$上连续函数全体是一个集，$[a, b]$上的每个连续函数就是这个集中的元素，但$[a, b]$上不连续的函数就不是这个集中的元素.

通常用大写字母，例如 A、B、X、Y、E、F……表示集，而用小写字母，例如 a、b、x、y……表示元素.

集和元素之间有如下两个基本关系：

(1) x 是集 A 中的元素，这时称 x 属于 A，记为 $x\in A$；

(2) x 不是集 A 中的元素，这时称 x 不属于 A，记为 $x\overline{\in} A$.

集和集之间也有如下两个最基本的关系：

(1) 如果集 A 中的每个元素都是集 B 中的元素，那末称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$，读做 A(被)包含在 B 中，或者记为 $B\supset A$，读做 B 包含 A.

显然 $A\subset A$.

如果 $A\subset B$，并且 B 中确有元素 b 不属于 A，那末称 A 是 B 的真子集，记做 $A\subsetneqq B$.

(2) 如果 $A\subset B$，同时有 $B\subset A$，那末称 A 等于 B，记做 $A=B$.

显然，$A=B$ 意味着 A、B 是由相同的元素构成的集. 例如，A 是数集$\{1, -1\}$，B 是多项式 x^2-1 的根的全体，显然，$A=B$.

2. 集的运算

集之间有三个基本的代数运算：和(并)、通(交)、差.

设 A、B 是两个集. 由或是属于 A 或是属于 B 的元素全体所成的集称做 A、B 的和集(又称并集)，A、B 的和集记为 $A\cup B$. 由同时属于 A、B 两个集的元素全体所成的集称做 A、B 的通集(又称做交集)，A、B 的通集记为 $A\cap B$. 如果 A、B 中没有同时属于 A、B 的元素，那末称 A、B 是互不相交的.

如果引入一个不含任何元素的集 $\emptyset$，称 $\emptyset$ 是空集，显然，A、B 互不相交的充要条件就是 $A\cap B=\emptyset$. 规定空集是任何集的子集.

和、通运算又分别称为集的加法和乘法运算. 由和、通运算的定义，这两个运算显然有如下的代数性质：

1° 和、通的幂等性

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A;$$

2° 空集是加法的零元

$$A\cup\emptyset=A;$$

3° 和、通的交换律

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A;$$

4° 和、通的结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$$

5° 和、通的分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

设 A、B 是两个集，由一切属于 A 但不属于 B 的元素全体所构成的集称为 A 减 B 的差集，简称差，记为 $A-B$. 差集 $A-B$ 又被称为 B 相对于 A 的余集，常记为 C_AB.

特别，如果 X 是一个集合，并且所要讨论的集 A、B、$Y\cdots$ 都只是 X 的子集，那末称 X 是空间. 在一个空间 X 中，任何集 B 相对于 X 的余集 C_XB 就简称为余集，记为 B^C.

对于减法运算，显然有如下性质：

6° 减法分配律

$$(A-B)\cap C=A\cap C-B\cap C;$$

7° 减法乘法互化　　设 X 是空间，那末

$$A-B=A\cap B^C,\ A\cap B=A-B^C;$$

(下面也是些常用的性质)

8° 保单调性　　如果 $A\subset B$，那末对任何 C，

$$A\cup C\subset B\cup C,\ A\cap C\subsetneq B\cap C,\ A-C\subset B-C;$$

9° $A\subset B$ 的充要条件是 $A-B=\emptyset$；

10° $(C-A)-B=C-(A\cup B)$.

和、通、余这三个基本运算在开关代数中又称为或、与、非运算，它们在开关代数中起着很重要的作用.

对于两个集的和、通运算可以推广到任意个集上. 设$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是一族集，此地 Λ 是指标集. 由一切 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$中的元素所构成的集称为这族集的和集，记为 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$；由同时属于所有 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 的元素全体所构成的集称为这族集的通集，记为 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$.

和通公式　下面是集的运算中非常重要的两个公式——和通公式. 设 S 是一个集，$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是一族集，那末

11° $S-\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(S-A_\lambda)$；

12° $S-\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(S-A_\lambda)$.

11°、12° 的意思是：和集的(相对于 S 的)余集等于每个集的(相对于 S 的)余集的通；通集的(相对于 S 的)余集等于每个集的(相对于 S 的)余集的和. 简单地说，求和(通)后再求余等价于先求余后再求通(和)，这是和、通运算的一种"对称"性质. 11°、12° 又被称为集的对偶律.

下面我们将严格地按和、通、差、包含、相等等定义一步一步地论证 11°(类似可证 12°)，初学者必须学会这样严格地证明集的其它一些式子.

11° 的证明　令 $P=S-\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，$Q=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(S-A_\lambda)$，显然，要证

明 11° 就是要证明 $P\subset Q$ 和 $Q\subset P$ 同时成立. 下面来证明这一点:

任取 $x\in P$, 按 P 的定义得到 $x\in S$, $x\overline{\in}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 再按和的定义, $x\overline{\in}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 等价于 $x\overline{\in}A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$. 这样便得到

$$x\in S,\ x\overline{\in}A_\lambda(\lambda\in\Lambda).$$

从而对每个 $\lambda\in\Lambda$, $x\in S-A_\lambda$, 也就是说 $x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(S-A_\lambda)=Q$. 因为 x 是在 P 中任意取的, 所以 $P\subset Q$.

反之, 任取 $y\in Q$, 按通的定义, 对一切 $\lambda\in\Lambda$, $y\in S-A_\lambda$. 再按差的定义就得到

$$y\in S,\ y\overline{\in}A_\lambda\quad(\lambda\in\Lambda).$$

从而 $y\in S$, $y\overline{\in}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, 也就是说 $y\in S-\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=P$. 因为 y 是在 Q 中任意取的, 所以 $Q\subset P$. 证毕.

3. 上限集、下限集和极限集

设 $\{A_n|n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 是一列集(简写为 $\{A_n\}$). 显然一个元素 x 可以属于这列集中的某些集, 也可以不属于这列集中的某些集. 由属于这列集中无限个(指编号无限个)集的那种元素全体所成的集, 称为 $\{A_n\}$ 的上限集, 记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

例如, 由 $A_{2n}=[0,1]$, $n=1,2,\cdots$, $A_{2n+1}=[0,\ 2]$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$, 构成的一列集 $\{A_n\}$ 的上限集是 $[0,\ 2]$. 当然, 一般说来, 对于 $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, 究竟 $\{A_n\}$ 中哪无限个集包含元素 x, 这是由 x 决定的.

设 $\{A_n\}$ 是一列集, 由属于某个指标 $n_0(x)$ 以后集列中一切集的元素 x 所成的集称为这列集的下限集, 记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 显然, $\{A_n\}$ 的下限集是由除去 $\{A_n\}$ 中某有限个集外都要包含它的那些元素所构成的集(这里被除去的有限个集是随 x 的不同而变化的). 下列关系是显然的:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.\qquad(1.1)$$

例 1 设 $\{A_n\}$ 是直线上一列集.

$$A_{2n+1}=\left[0,\ 2-\frac{1}{2n+1}\right],\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$A_{2n}=\left[0,\ 1+\frac{1}{2n}\right],\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

因为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=[0,\ 2)$，自(1.1)知道，当我们考虑$\{A_n\}$的 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 时，只要考察$[0,\ 2)$中的点就可以了．因为区间$[0,\ 1]$中点属于所有的 A_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$，所以$[0,\ 1]\subset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，而对于区间$(1,\ 2)$中任何一点 x，必存在 $n_0(x)$，使得 $n\geqslant n_0(x)$时

$$1+\frac{1}{2n}<x<2-\frac{1}{2n+1},$$

即 $x\notin A_{2n}$，$x\in A_{2n+1}$，$n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots$．换句话说，$n_0(x)$以后的奇指标集 A_{2n+1} 都含有 $x\left(\text{从而 } x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\right)$，而偶指标集 A_{2n} 都不含 x（从而 $x\notin\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$）．因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0,\ 2),\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0,\ 1].$$

例 2　设$\{A_n\}$是直线上一列集：

$$A_{2n+1}=\left[0,\ 1+\frac{1}{2n+1}\right],\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$A_{2n}=\left[0,\ 1-\frac{1}{2n}\right]\cup\{1\},\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

用类似于例 1 的方法，容易知道 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=[0,\ 1]$，$[0,\ 1)\subset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$．但 1 这一点属于所有的 $A_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，所以 $1\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$．从而

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=[0,\ 1]=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

集列$\{A_n\}$的上限集又常记为 $\limsup A_n$，下限集又常记为 $\liminf A_n$．

上、下限集的表达式　下面是上、下限集的两个表达式，在运算时用它们是方便的．

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \tag{1.2}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m. \tag{1.3}$$

(1.2)的证明　记 $P=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，$Q=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. 任取 $x\in P$，按上限集的定义，存在无限个指标，例如不妨设 $n_1(x)<n_2(x)<\cdots<n_k(x)<\cdots$，使得 $x\in A_{n_k}(k=1, 2, \cdots)$. 因此对任何自然数 n，总有 $n_k\geqslant n$，从而 $x\in A_{n_k}\subset \bigcup_{m=n} A_m$. 既然对任何自然数 n，$x\in \bigcup_{m=n} A_m$，因而 $x\in Q$，从而 $P\subset Q$.

反之，任取 $y\in Q$，按通集定义，对一切自然数 n，$y\in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. 特别取 $n=1$ 时，必存在指标 n_1，使得 $y\in A_{n_1}$. 再取 $n=n_1+1$，又因 $y\in \bigcup_{n_1+1}^{\infty} A_m$，所以又必存在 $n_2>n_1$，使得 $y\in A_{n_2}$. 依次再取 $n=n_2+1$，如此手续一直做下去，立即得到单调增加序列 $\{n_k\}$，而 $y\in A_{n_k}$，$k=1, 2, \cdots$，即 $y\in\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=P$，从而 $Q\subset P$.

既已证得 $P\subset Q$，$Q\subset P$，因此 $P=Q$. 证毕.

同样可以证明(1.3).

利用和、通公式，从(1.2)、(1.3)立即可以证明下面的等式：

$$S-\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} (S-A_n), \tag{1.4}$$

$$S-\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} (S-A_n). \tag{1.5}$$

例如，

$$S-\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = S-\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(S-\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}(S-A_m) = \underline{\lim_{n\to\infty}}(S-A_m).$$

同样可以证明(1.5).

当然，等式(1.4)、(1.5)还可以直接从集本身的意义上直接看出来. 例如，$S-\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ 是由属于 S，而不属于 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ 的元素组成的集. 不属于 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ 的元素的充要条件是最多只属于集列 $\{A_n\}$

中有限个集的元素．因而是 $S-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 中的元素的充要条件是属于 $\{S-A_n\}$ 列中从某指标以后一切集的元素，所以(1.4)成立．又显然 x 是集 $S-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 中元素的充要条件是 x 属于 S 而不属于 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$．而 x 不属于 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 的充要条件是 $\{A_n\}$ 中必有无限个集不含有 x．因而 x 是 $S-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 中的元素的充要条件是属于 $\{S-A_n\}$ 中的无限个集，即(1.5)成立．

例 3　设 $\{A_n\}$ 是例 1 中直线 R 上一列点集，$A_n^c=R-A_n$．由(1.4)、(1.5)和例 1 立即得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c=(-\infty,\ 0)\cup(1,\ \infty),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c=(-\infty,\ 0)\cup[2,\ \infty).$$

而当 $\{A_n\}$ 是例 2 中一列集时，由(1.4)、(1.5)和例 2 立即得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c=(-\infty,\ 0)\cup(1,\ \infty)=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c.$$

极限集　设 $\{A_n\}$ 是一列集，如果满足

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

时，称集列 $\{A_n\}$ 收敛，并称 $A=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 为 $\{A_n\}$ 的极限集，简称为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$．

例 2 中的集列 $\{A_n\}$ 就是收敛的，并且

$$\lim_{n\to\infty} A_n=[0,\ 1].$$

单调集列　设 $\{A_n\}$ 是一列集，如果满足

$$A_n\subset A_{n+1},\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

称 $\{A_n\}$ 是单调增加的集列；如果满足

$$A_n\supset A_{n+1},\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

称 $\{A_n\}$ 是单调下降的集列．单调增加或单调下降集列统称为单调集列．

定理 1　单调集列必收敛．如果 $\{A_n\}$ 是单调增加集列，那末

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

如果$\{A_n\}$是单调下降集列，那末

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

证明 对任何一列集$\{A_n\}$，总有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.1}$$

设$\{A_n\}$是单调增加的. 对任何$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，必有某个$n_0$使得$x\in A_{n_0}$，因为$\{A_n\}$是单调增加的，所以$x\in A_n(n\geqslant n_0)$，从而$x\in\varliminf_{n\to\infty}A_n$. 但$x$是在$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$中任取的，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\varliminf_{n\to\infty}A_n$. 由(1.1)就得到

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.6}$$

(1.6)两端是同一个集，因此

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

设$\{A_n\}$是单调下降的. 对任何$x\in\varlimsup_{n\to\infty}A_n$，必存在自然数的单调序列$\{n_k\}$，使得$x\in A_{n_k}$. 设$n$是任一给定的自然数，取$n_k>n$，由于$x\in A_{n_k}\subset A_n$，因此$x$必属于一切$A_n$，即$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$. 由此得到

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{1.7}$$

因此
$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

证毕.

附　录

4. 重要的集类

设X是一个空间. 由X的某些子集所组成的集称为**集类**. 我们用粗

体字 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$、…等表示集类。集类中的元素实际上是 X 中的子集，因此集类是集的集。

定义 设 $\boldsymbol{R}$ 是空间 X 上的集类，如果 $\boldsymbol{R}$ 对"$\cup$"、"$-$"两个运算封闭(即对任何 $E\in\boldsymbol{R}$, $F\in\boldsymbol{R}$, 总有 $E\cup F\in\boldsymbol{R}$, $E-F\in\boldsymbol{R}$)，那末称 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的环；如果 $\boldsymbol{A}$ 是 X 上的环，并且 $X\in\boldsymbol{A}$，称 $\boldsymbol{A}$ 是 X 上的代数。

今后总用 $\boldsymbol{R}$ 表示环，$\boldsymbol{A}$ 表示代数。

显然，代数是对求余运算封闭的环。

例 4 集类$\{\emptyset, X\}$是 X 上的代数。

例 5 $\boldsymbol{R}_0$ 表示直线 $\mathbb{R}$ 上一切有限个互不相交的左开右闭有限区间$(a_i, b_i]$, $i=1, 2, \cdots, n$ 的和集的全体，$\boldsymbol{R}_0$ 是 $\mathbb{R}$ 上的环，但不是代数。

事实上，只要利用两个左开右闭的有限区间$(a, b]$、$(c, d]$之差仍然是有限左开右闭区间的和(注意 $\emptyset$ 可以视为 $\emptyset=(a, a]$)，容易证明 $\boldsymbol{R}_0$ 是 $\mathbb{R}$ 上的环。因为 $X\overline{\in}\boldsymbol{R}_0$，所以 $\boldsymbol{R}_0$ 不是 $\mathbb{R}$ 上的代数。

$\boldsymbol{R}_0$ 是直线上具有特别重要意义的环。

为了讨论方便，引入对称差运算 $\triangle$：设 A、B 是两个集，称集

$$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$$

为 A、B 的**对称差**。

环具有如下性质。

定理 3 设 $\boldsymbol{R}$ 是空间 X 上的环，那末

(1) $\emptyset\in\boldsymbol{R}$;

(2) $\boldsymbol{R}$ 对于对称差运算封闭;

(3) $\boldsymbol{R}$ 对通运算封闭;

(4) 记 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{R}^c$，此地 $\boldsymbol{R}^c=\{E^c|E\in\boldsymbol{R}\}$，那末 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$是 X 上的代数，并且是包含 $\boldsymbol{R}$ 的最小的代数。

证明 (1)～(3)是显然的。今证(4)：对任何 E, $F\in\boldsymbol{R}$，因为

$$\begin{aligned}
&(X-E)\cup(X-F)=X-E\cap F\in\boldsymbol{R}^c,\\
&(X-E)-(X-F)=(X-E)\cap F=F-F\cap E\in\boldsymbol{R},\\
&(X-E)\cup F=X-(E-F)\in\boldsymbol{R}^c,\\
&(X-E)-F=X-(E\cup F)\in\boldsymbol{R}^c,\\
&F-(X-E)=F\cap E\in\boldsymbol{R}.
\end{aligned}\tag{1.8}$$

再注意到 $\boldsymbol{R}$ 本身是环，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$对"$\cup$"、"$-$"封闭。又显然 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$对余运算封闭，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$是 X 上代数。如果又有另一个代数 $\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{R}$，必然有 $\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{R}^c$，从而 $\boldsymbol{A}\supset\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$是包含 $\boldsymbol{R}$ 的最小代数。

例 6 $\boldsymbol{A}_0$ 是由直线 $\mathbb{R}$ 上有限个互不相交的左开右闭区间(有限的或无限的，(a, ∞)也算作左开右闭的，即$(a, \infty)=(a, \infty]$)全体所成的集类。$\boldsymbol{A}_0$

是 R 上代数，并且 $A_0=A(R_0)$.

环或代数这种集类对极限运算一般说来不封闭．例如例 5 中环 R_0 或例 6 中代数 A_0 都含有 $E_n=\left(0,\ 1-\frac{1}{n}\right]$, $n=1, 2, \cdots$, 然而极限集

$$\lim_{n\to\infty} E_n=(0,\ 1)$$

并不在 R_0 或 A_0 中.

因此我们引入

定义 设 S 是空间 X 上的一个集类，如果 S 是环(或代数)，并对可列和运算封闭，即对任意一列 S 中元$\{E_n\}$，总有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\in S$, 称 S 是 X 上的 σ-环(或 σ-代数).

σ-环(或 σ-代数)本身是环(或代数)，所以具有环(或代数)，所具有的一切性质．下面将给出 σ-环(或 σ-代数)的常用的极限性质.

定理 3 设 S 是空间 X 上的 σ-环，那末

(1) S 对可列和运算封闭;

(2) S 对可列通运算封闭;

(3) S 对单调极限运算封闭;

(4) S 对上限、下限、极限运算封闭;

(5) S' 是 X 上的环，S' 成为 X 上的 σ-环的充要条件是对 S' 中任何一列互不相交的集$\{E_n\}$的和运算封闭，或者，S' 对单调增加极限运算封闭.

证明 (1) 是定义，毋需证明.

(2) 设$\{E_n\}\subset S$, 因为 S 是 σ-环，所以 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\in S$. 注意到 S 是 σ-环，由和通公式立即得到

$$E-\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E-E_n)\in S.$$

因此 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n=E-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E-E_n)\in S$, 即 S 对可列通运算封闭.

(3) 当$\{E_n\}$是 S 中一列单调集时，由于

$$\lim_{n\to\infty} E_n=\begin{cases}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n, & \text{当}\{E_n\}\text{单调增加时},\\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n, & \text{当}\{E_n\}\text{单调下降时}.\end{cases}$$

由(2)立即知道(3)成立.

(4) 由(1.2)、(1.3)并利用(1)、(2)立即知道(4)正确.

(5) 必要性是显然的．现在证明充分性：本节习题 2 告诉我们：任何一

列集$\{A_n\}$的和集总可以写成一列互不相交的集$\{B_n\}$的和，其中$B_m=A_m-\bigcup_{n=1}^{m-1}A_n$. 因此由$\boldsymbol{S}'$是环并且对互不相交可列和运算封闭性的假设立即知道$\boldsymbol{S}'$对可列和运算封闭，从而是$\sigma$-环.

如果$\boldsymbol{S}'$是环，并且对单调增加极限运算封闭，那末由$\bigcup_{k=1}^{n}A_k\in\boldsymbol{S}'$以及

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=1}^{n}A_k,$$

知道$\boldsymbol{S}'$中单调增加集列$\left\{\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right\}$的极限$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\boldsymbol{S}'$，即$\boldsymbol{S}'$是$\sigma$-环. 证毕.

通常用得较多的是σ-代数(对求余运算封闭的σ-环).

集类的扩张　对于空间X上的集类$\boldsymbol{E}$，我们有如下的扩张定理.

定理4　设$\boldsymbol{E}$是空间X上的集类，那末

(1) 存在唯一的包含$\boldsymbol{E}$的最小环$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$;

(2) 存在唯一的包含$\boldsymbol{E}$的最小代数$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E})$，并且$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$;

(3) 存在唯一的包含$\boldsymbol{E}$的最小的σ-环$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$，并且$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$;

(4) 存在唯一的包含$\boldsymbol{E}$的最小的σ-代数$\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{E})$，并且$\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}))=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}))$.

证明　证(1)～(4)最小扩张存在性：令$\boldsymbol{X}$是X的一切子集全体，显然$\boldsymbol{X}$既是环，又是σ-环，又是代数，又是σ-代数，并且$\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{X}$. 这说明至少存在一个环(代数、$\sigma$-环、$\sigma$-代数)$\boldsymbol{T}$(例如$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{X}$)，使得$\boldsymbol{T}\supset\boldsymbol{E}$. 对一切$X$上满足$\boldsymbol{T}\supset\boldsymbol{E}$的环(代数、$\sigma$-环、$\sigma$-代数)，作它们的通集类

$$\boldsymbol{T}_0=\bigcap_{\boldsymbol{T}\supset\boldsymbol{E}}\boldsymbol{T},$$

显然，$\boldsymbol{T}_0\supset\boldsymbol{E}$，并且易知$\boldsymbol{T}_0$仍然是环(代数、$\sigma$-环、$\sigma$-代数). 因为$\boldsymbol{T}_0$是一切满足$\boldsymbol{T}\supset\boldsymbol{E}$的环(代数、$\sigma$-环、$\sigma$-代数)的通，所以它是满足$\boldsymbol{T}\supset\boldsymbol{E}$中最小的. 从最小性易知唯一性也是显然的.

下面主要是证明(2)～(4)中的等式：

由于$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{E}$，所以$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))\supset\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E})$. 由于$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$，即$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$.

由于$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{E}$，所以$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$；由于$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$，所以$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$，即$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$.

由于$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{E}$，所以$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}))\supset\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{E})$；由于$\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E})$，所以$\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}))$，即$\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{E})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}))$. 而$\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}))$是显然的，剩下的是只要证明$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}))\supset\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{E})$. 显然，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}))$已是代数，所以只要证明它对可列和运算封闭就可以了. 事实上，如果$\{E_n\}\subset\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}))$，根据定理2,

$$A(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}))=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\cup\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})^c,$$

那末任何 E_n 必是分别属于 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 和 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})^c$ 中集 E_{n1}、E_{n2} 的和，因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=(\bigcup_k{}'E_k)\cup(\bigcup_l{}''E_l),$$

这里 $\bigcup'$、$\bigcup''$ 分别是对属于 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$、$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})^c$ 的集求和，因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 是 σ-环，所以 $\bigcup_k{}'E_k\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$，而

$$\bigcup_l{}''E_l=X-\bigcap_l{}''(X-E_l)\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})^c,$$

（上式实际上是(1.8)中第一式推广到一列集的情况，并利用 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 对可列通运算封闭得到的，）即 $A(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}))$ 对可列和运算封闭，从而 $A(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}))=\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{E})$. 证毕.

定理 4 表明由一个集类要扩张成最小的代数、σ-环或 σ-代数可以经过逐步扩张得到.

集类的限制 设 X 是一空间，$\boldsymbol{E}$ 是 X 上的集类，C 是 X 中任一固定子集，$\boldsymbol{E}\cap C=\{E\cap C|E\in\boldsymbol{E}\}$，因此 $\boldsymbol{E}\cap C$ 既是 X 上的集类，也可以视为 X 的子集 C（C 作为一个空间，称为 X 的子空间）上的集类，称 $\boldsymbol{E}\cap C$ 为 $\boldsymbol{E}$ 在 C 上的限制.

对于集类的限制有如下重要的结果.

定理 5 设 $\boldsymbol{E}$ 是空间 X 上的集类，那末对任何 X 的子集 C，

(1) $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\cap C=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap C)$；

(2) 当 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 还是 σ-代数时，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap C)$ 也是 σ-代数.

证明 (2) 是显然的. 今证(1)如下：

因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 是 σ-环，易知 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\cap C$ 也是 σ-环. 又因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{E}$，所以 $(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\cap C)\supset\boldsymbol{E}\cap C$，从而 σ-环 $(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\cap C)\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap C)$.

再证 $(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\cap C)\subset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap C)$. 为方便起见，记 $D=X-C$，考虑形为 $F\cup F'$ 的集全体所成的集类 $\boldsymbol{S}$，其中 $F\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap C)$，$F'\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap D)$. 因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap C)$、$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap D)$ 都是 σ-环，易知 $\boldsymbol{S}$ 必是 X 上的 σ-环. 由于对任何 $E\in\boldsymbol{E}$，有 $F=E\cap C\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap C)$，$F'=E\cap D\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap D)$，并且 $E=F\cup F'$，所以 $\boldsymbol{S}\supset\boldsymbol{E}$. 从而 $\boldsymbol{S}\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$，注意到 $\boldsymbol{S}\cap C=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap C)$，因而

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\cap C)=\boldsymbol{S}\cap C\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\cap C,$$

从而(1)证得.

单调类 设 $\boldsymbol{M}$ 是 X 的某些子集所成的集类，如果 $\boldsymbol{M}$ 中任何一个单调序列 $\{E_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\boldsymbol{M}$，称 $\boldsymbol{M}$ 是 X 的一个单调类.

定理 6 设 $\boldsymbol{E}$ 是 X 的某些子集所成的集类，那末必有唯一的单调类 $\boldsymbol{M}$，使得

(1) $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{M}$;

(2) 包含 $\boldsymbol{E}$ 的任何单调类 $\boldsymbol{M}_1$，必 $\boldsymbol{M}_1\supset\boldsymbol{M}$.

定理 6 的证明方法类似定理 4.

显然，从定义直接可知，任意个单调类的通仍是单调类. σ-环必是单调类. 一个环 $\boldsymbol{R}$，如果又是单调类，那末 $\boldsymbol{R}$ 必是 σ-环.

今后用 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{E})$ 表示由集类 E 按定理 6 所得到的单调类，即包含 E 的最小单调类.

下面证明一个以后要用到的定理.

定理 7　设 R 是 X 的某些子集所成的环，那末

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}).$$

证明　因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 是包含 $\boldsymbol{R}$ 的单调类，所以 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})\subset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$.

如果我们能证明 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 是一个环，那末 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 便是 σ-环，从而 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})\subset\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$. 这样定理就被证得.

证明 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 是环. 对任何 $E\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$，记

$$\boldsymbol{K}(E)=\{F/F\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}),\ \text{而且}\ E-F、F-E、E\cup F\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})\}.$$

由于 $\boldsymbol{K}(E)$ 定义中 E、F 的地位对称，因此，$F\in\boldsymbol{K}(E)$ 等价 $E\in\boldsymbol{K}(F)$.

先证 $\boldsymbol{K}(E)$ 是单调类. 任取 $\boldsymbol{K}(E)$ 中一单调序列 $\{F_n\}$，因为

$$F_n-E\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}),\quad E-F_n\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}),\quad E\cup F_n\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}),$$

然而 $\{F_n-E\}$、$\{E-F_n\}$、$\{E\cup F_n\}$ 都是单调序列，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 是单调类，所以

$$\lim_{n\to\infty}F_n-E=\lim_{n\to\infty}(F_n-E)\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty}F_n\cup E=\lim_{n\to\infty}(F_n\cup E)\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}),$$

$$E-\lim_{n\to\infty}F_n=\lim_{n\to\infty}(E-F_n)\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}).$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$. 这就说明 $\boldsymbol{K}(E)$ 是单调类.

由于 $\boldsymbol{R}$ 是环，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})\supset\boldsymbol{R}$，因此对任何 $E\in\boldsymbol{R}$，$F\in\boldsymbol{R}$，必有 $F\in\boldsymbol{K}(E)$，所以 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{K}(E)$. 但 $\boldsymbol{K}(E)$ 是单调类，所以 $\boldsymbol{K}(E)\supset\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 对任何 $E\in\boldsymbol{R}$ 成立. 又因为 $\boldsymbol{K}(E)\subset\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$，所以 $\boldsymbol{K}(E)=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 对任何 $E\in\boldsymbol{R}$ 成立. 由于对称性，对任何 $F\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$，$E\in\boldsymbol{R}$，必有 $E\in\boldsymbol{K}(F)$ 即 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{K}(F)$ 对任何 $F\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 成立. 再利用 $\boldsymbol{K}(F)$ 是单调类，所以 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})\subset\boldsymbol{K}(F)$ 对任何 $F\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 成立. 然而 $\boldsymbol{K}(F)\subset\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$，所以，对一切 $F\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$，$\boldsymbol{K}(F)=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$. 从 $\boldsymbol{K}(E)$ 定义可知 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 是环. 证毕.

系　设 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{R}$ 都是由 X 的某些子集所成的集类，如果 $\boldsymbol{M}$ 是单调类，$\boldsymbol{R}$ 是环，而且 $\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{R}$，那末 $\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$.

证明　显然 $\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$. 证毕.

习 题

1. 证明下面的等式:

(1) $(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)-C=(A_1-C)\cap(A_2-C)\cap\cdots\cap(A_n-C)$;

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$;

(3) $(A-B)\cap(C-D)=A\cap C-(B\cup D)$;

(4) $\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha-B=\bigcup\limits_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$;

(5) $\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha-B=\bigcap\limits_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$;

(6) 设 $A\subset X$, $B\subset X$, 那末$(A-B)^c=B\cup(A\cup B)^c$. (这里上角 c 是关于 X 求余.)

2. 设 $\{A_n\}$ 是一列集, 作 $B_1=A_1$, $B_n=A_n-\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}A_k\ (n>1)$. 证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集, 且

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\bigcup_{k=1}^{n}B_k,\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

3. 设 $A_n=(0,\ n^{(-1)^n})$, $n=1,\ 2,\ \cdots$, 求 $\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$.

4. 设 X 是一个空间, A 是 X 中的任一个集, 称函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\in A;\\ 0, & 当\ x\in A^c,\end{cases}$$

为集 A 的特征函数. 证明

(1) $A=B$ 的充要条件是 $\chi_A(x)=\chi_B(x)$;

(2) $A=X$ 的充要条件是 $\chi_A(x)=1$, $A=\emptyset$ 的充要条件是 $\chi_A(x)=0$;

(3) $A\subset B$ 的充要条件是 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$;

(4) $\chi_{A\Delta B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$;

(5) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$, $\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$;

(6) $\chi_{\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\varliminf\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$, $\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$处处收敛于一个函数.

5. 设f是定义在集 E 上的实函数, 对任何实数 C, 记 $E(f\geqslant C)=\{x\,|\,f(x)\geqslant C,\ x\in E\}$, $E(f>C)=\{x\,|\,f(x)>C,\ x\in E\}$. 证明

(1) $E(f>C)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E\left(f>C+\dfrac{1}{n}\right)$;

(2) $E(f\geqslant C)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant C-\dfrac{1}{n}\right)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left(f>C-\dfrac{1}{n}\right)$;

(3) 设$\{f_n\}$是定义在E上一列实函数，并且处处收敛于f，那末

$$E(f>C)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left(f_n>C+\frac{1}{k}\right).$$

6. A、B、C是三个集，包含A、B、C的最小环、最小代数、最小σ-环、最小σ-代数是什么？

7. 如果$B\supset C$，称差$B-C$为正规差，证明

(1) 如果集类$\boldsymbol{R}$对和、通、正规差三个运算封闭，那末$\boldsymbol{R}$必是环；

(2) 如果集类$\boldsymbol{R}$对和、通、对称差三个运算封闭，那末$\boldsymbol{R}$必是环.

§2 映射、等价关系和势

在§1中介绍了集与集之间的包含、相等关系以及集之间的运算(它也可以视为集的一种关系). 在本节中我们要介绍另一种关系——对应关系，它是函数概念的发展. 在此基础上，还要对集论中最基本的概念之一——"势"作适当介绍.

1 映射

设A、B是两个非空集，如果存在规则φ，使A中任一元素x，在规则φ下，确定了B中一个元素y，即

$$\varphi:\ x\mapsto y,\ x\in A, \tag{2.1}$$

就称规则φ为A到B的映射(也称为映照，在泛函分析中常称映射为算子)，称y为(在映射φ下)x的象，记为$y=\varphi(x)$，或$y=\varphi x$. 如果y是映射φ下某个元素x的象，称满足关系$y=\varphi(x)$的x是y的一个原象，称所有y的原象的全体为y的原象集，简称为y的原象，称集A是映射φ的定义域，记为$\mathscr{D}(\varphi)$. 所有$\mathscr{D}(\varphi)$中元素x的象y的全体记为$\mathscr{R}(\varphi)$，称$\mathscr{R}(\varphi)$为φ的值域，更一般地，如果C是$\mathscr{D}(\varphi)$的一个子集，一切C中元素的象全体记为$\varphi(C)$，称为C在φ下的值域(特别，$C=A$时$\varphi(A)=\mathscr{R}(\varphi)$). A到B的映射也常表示为φ: $A\to B$.

对于映射，我们以后也经常用下面的术语"φ是A到B的映射，$\mathscr{D}(\varphi)$是它的定义域"，这个术语的意思是φ只是对A的子集$\mathscr{D}(\varphi)$中每个x有意义，即有象. 当说"φ是A到B的映射"时，总

是指 $\mathscr{D}(\varphi)=A$.

映射是(单值)函数概念的推广，它是数学中基本概念之一. 例如，任何实变数函数可以看成数集到数集的映射；求导运算可以看成可微函数集到函数集上的映射；积分可以看成可积函数集到数集的映射；$n\times m$ 阶阵可以看成m维线性空间到n维线性空间的映射；代数学中同态、同构等都是一种映射；数学中的初等运算也是映射，例如实数中加法 $a+b=c$，就可以看成平面到直线的映射：$(a, b)\to c$.

复合映射 设φ是A到B的映射，ψ是C到D的映射，当$C\supset\mathscr{R}(\varphi)$时，作$A$到$D$的映射

$$h:\ x\mapsto\psi(\varphi(x)),$$

称h是φ、ψ的复合映射，记为$h=\psi\circ\varphi$.

显然，复合映射是复合函数概念的推广.

映射的限制和延拓 设φ_i, $i=1, 2$是两个映射，如果$\mathscr{D}(\varphi_1)\subset\mathscr{D}(\varphi_2)$，并且对任何$x\in\mathscr{D}(\varphi_1)$,

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x),$$

即φ_1、φ_2在$\mathscr{D}(\varphi_1)$上一致时，称φ_1为φ_2在$\mathscr{D}(\varphi_1)$上的限制，而称φ_2是φ_1的(一个)延拓.

当φ_1是φ_2在$\mathscr{D}(\varphi_2)$的子集M上限制时，常记φ_1为$\varphi_2|M$.

例1 设$f(x)=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$；$g(x)=|\sin x|$, $-\infty<x<\infty$. 可视$f(x)$是$g(x)$在$[0, \pi]$上的限制，视$g(x)$是$f(x)$在$(-\infty, \infty)$上的延拓.

例2 设$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$, $|z|<1$；$g(z)=\dfrac{1}{1-z}$, $z\neq1$. 解析函数$f(z)$是解析函数$g(z)$在$|z|<1$上的限制，而$g(z)$就是$f(z)$在复平面上除去$z=1$点外的区域上的一个延拓.

单射、满射和双射 设φ是A到B的映射. 如果对任何x, $y\in A$，当$x\neq y$时，总有

$$\varphi(x)\neq\varphi(y),$$

即不同的点映射出来的象也不同，那末称φ是单射；如果映射φ满

是 $\varphi(A)=B$，即 $\mathscr{R}(\varphi)=B$ 时，称 φ 是 A 到 B 的满射；如果 φ 是满射，同时又是单射时，称 φ 是 A 到 B 的双射，又称 φ 是 A 到 B 上的一一对应。

例 3 设 $A=[0, 1]=B$, $\varphi_1(x)=\frac{1}{2}x$, $\varphi_2(x)=\sin\pi x$, $\varphi_3(x)=x$. 显然，

(1) φ_1 是 A 到 B 的单射，而非满射；

(2) φ_2 是 A 到 B 的满射，而非单射；

(3) φ_3 是 A 到 B 的双射.

例 4 设 $C[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上连续函数全体，$C^1[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上连续可微函数全体，而 $C_0^1[a, b]$ 是 $C^1[a, b]$ 中满足 $f(a)=0$ 的函数全体. 作映射

$$\varphi:\ f\mapsto\int_0^x f(t)\,dt,\ f\in C[0, 1].$$

显然，φ 是 $C[0, 1]$ 到 $C^1[0, 1]$ 的单射，但不是满射，而 φ 是 $C[0, 1]$ 到 $C_0^1[0, 1]$ 上的双射.

例 5 设映射

$$\psi:\ f(x)\mapsto\frac{d}{dx}f(x),\ f(x)\in C^1[a, b].$$

显然，ψ 是 $C^1[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的满射，而非单射(因为 $\psi(f)=\psi(f+c)$，其中 c 为任何一个常数). 但 ψ 在 $C_0^1[a, b]\,(\subset C^1[a, b])$ 上的限制记为 ψ_1，ψ_1 是 $C_0^1[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的双射.

恒等映射和逆映射 设 A 是一个集，φ 是 A 上的映射，如果

$$\varphi:\ x\mapsto x$$

即 A 中每个元素的象是自身，称 φ 是 A 上的恒等映射，记 φ 为 I.

显然恒等映射是 A 上的双射，它虽简单，却是很重要的映射. 例 3 中的 φ_3 便是 $[0, 1]$ 上的恒等映射. 既然任何一个集，都有它上面的恒等映射，因而在遇有许多不同集上的恒等映射时，我们常用 I_A 加以标明是集 A 上的恒等映射.

利用恒等映射就可引入逆映射概念.

设 φ 是 A 到 B 的映射，如果存在 B 到 A 的映射 φ_l^{-1}(或 φ_r^{-1})，使得

$$\varphi_l^{-1}\circ\varphi=I_A \quad (\text{或 } \varphi\circ\varphi_r^{-1}=I_B),$$

那末称 φ_l^{-1}(或 φ_r^{-1})为 φ 的左(或右)逆映射；如果存在 B 到 A 的映射 φ^{-1}，它既是 φ 的左逆映射，又是 φ 的右逆映射，那末称 φ 是 A 到 B 上的可逆映射，并称 φ^{-1} 为 φ 的逆映射。

定理 1 φ 是 A 到 B 上可逆映射的充要条件是 φ 是双射.

证明 充分性 设 φ 是双射，对任何 $y\in B$，必存在唯一的 $x\in A$，使得

$$y=\varphi(x). \tag{2.1}$$

据此作 B 到 A 的映射

$$\varphi^{-1}:\ y\mapsto x, \tag{2.2}$$

显然，对任何 x，由(2.1)和(2.2)，易知

$$(\varphi^{-1}\circ\varphi)(x)=\varphi^{-1}(\varphi(x))=\varphi^{-1}(y)=x,$$

即 $\varphi^{-1}\circ\varphi=I_A$. 反之，对任何 $y\in B$，由(2.2)和(2.1)，易知

$$(\varphi\circ\varphi^{-1})(y)=\varphi(\varphi^{-1}(y))=\varphi(x)=y,$$

即 $\varphi\circ\varphi^{-1}=I_B$. 因此 φ 是可逆的，并且(2.2)定义出的 φ^{-1} 就是 φ 的逆(映射).

必要性 假定 φ 可逆，因而存在 φ^{-1}，使得 $\varphi^{-1}\circ\varphi=I_A$, $\varphi\circ\varphi^{-1}=I_B$. 因此对任何 $x_1, x_2\in A$, $y\in B$,

$$x_i=(\varphi^{-1}\circ\varphi)(x_i)=\varphi^{-1}(\varphi(x_i)),\ i=1,2, \tag{2.3}$$

$$y=(\varphi\circ\varphi^{-1})(y)=\varphi(\varphi^{-1}(y)). \tag{2.4}$$

由(2.4)易知 $\mathscr{R}(\varphi)=B$，即 φ 是满射. 由(2.3)易知当 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$时，必然有 $x_1=\varphi^{-1}(\varphi(x_1))=\varphi^{-1}(\varphi(x_2))=x_2$，即 φ 还是单射，因而 φ 是双射. 证毕.

显然，当 φ 是单射时，φ 是 $\mathscr{D}(\varphi)(=A)$到 $\mathscr{R}(\varphi)(\subset B)$的双射. 因而单射 φ(一般不是可逆映射)是 $\mathscr{D}(\varphi)$到 $\mathscr{R}(\varphi)$上的可逆映射. 这个逆映射常仍用 φ^{-1} 表示，不过 $\mathscr{D}(\varphi^{-1})=\mathscr{R}(\varphi)$，即 $\varphi\circ\varphi^{-1}=I_{\mathscr{R}(\varphi)}$, $\varphi^{-1}\circ\varphi=I_{\mathscr{D}(\varphi)}$.

例如，例 3 中 φ_1 是单射，$\varphi_1^{-1}(x)=2x$，而 φ_3 是[0, 1]上恒等映

射，易知 $\varphi_3^{-1}(x)=\varphi_3(x)=x$. 而例 4 中的映射 φ(积分)的逆映射就是例 5 中 ψ(微分)在 $C_0^1[a, b]$ 上的限制，即 $\varphi^{-1}=\psi$.

注 我们这里映射是采用单值函数概念推广的形式. 当然也可以引入多值映射，即对任何 $x\in\mathscr{D}(\varphi)$，$\varphi(x)$ 可以是 B 中的一个(子)集. 但是，如果注意到点 x 也可以视为 A 中的单点子集 $\{x\}$，那末，不管"单值"映射、"多值"映射，均可视为 A 的一切单点子集所组成的集 $\boldsymbol{A}$ 到 B 的一切子集所构成的集 $\boldsymbol{B}$ 的单值映射. 然而从最一般的观念来看，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 仍然是两个集. 在我们定义映射时，并未对 A、B 加任何限制，因而从原则上来说，最一般的映射概念只要对单值的引入即可. 只有在具体场合才需要注意映射的单值性和多值性.

2. 等价关系

设 A 是一个集，$\sim$ 是 A 中元素之间的某种联系(也称关系)，如果联系 $\sim$ 满足下面三个性质：

(1) 自反性　　对任何 $a\in A$，$a\sim a$;

(2) 对称性　　如果 $a\sim b$，那末 $b\sim a$;

(3) 传递性　　如果 $a\sim b$，$b\sim c$，那末 $a\sim c$.

那末称联系 $\sim$ 为 A 上的等价关系. 如果 $a\sim b$，称 a、b 在等价关系 $\sim$ 下等价.

例 6 A 是一个集，A 中元素之间的"$=$"关系显然是 A 上的等价关系. 又对一切 a、$b\in A$，规定 $a\sim b$ 都能成立的关系，显然也是 A 上的等价关系. 这两种等价关系，称为平凡的等价关系.

等价关系是数学上已普遍存在的一些概念的抽象.

例 7 N 是自然数集，当 $m, n\in N$ 时，如果 $m\equiv n \pmod 4$，规定 $m\sim n$. 由熟知的 mod 运算，易知 $\sim$ 是 N 上的等价关系. m、n 等价的充要条件是它们的差是 4 的倍数.

例 8 R^2 是平面点全体(即实数对 (x, y) 全体)，当 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 的 $y_1=y_2$ 时，规定 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$. 显然 $\sim$ 是 R^2 上的等价关系. 两点等价的充要条件是它们的第二坐标相等.

例 9 设 A 是 $n\times n$ 方阵全体，当 $a, b\in A$，并存在可逆阵 t，

使得 $a=t^{-1}bt$(在线代数中，称阵 a 和 b 相似)时，规定 $a\sim b$. 由矩阵运算知道下面三个式子成立：

(1) $a=e^{-1}ae$, 这里 e 是 $n\times n$ 的单位阵；

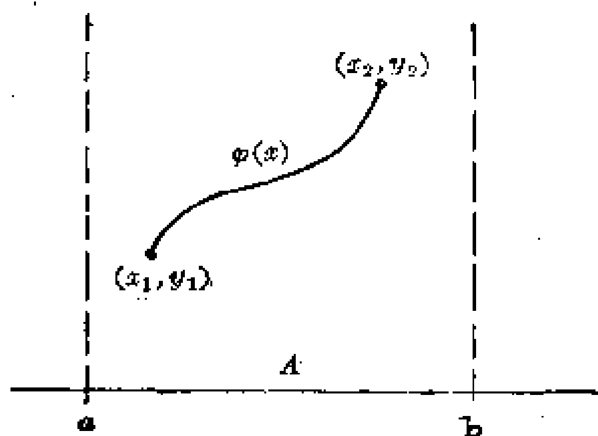
(2) 如果 $a=t^{-1}bt$, 那末 $b=(t^{-1})^{-1}at^{-1}$;

(3) 如果 $a=t^{-1}bt$, $b=s^{-1}cs$, 那末 $a=(st)^{-1}c(st)$.

以上三式说明～是 A 上的等价关系.

例 10 设 $f(x,y)$ 是柱 A: $a\leqslant x\leqslant b$; $-\infty<y<\infty$ 上二元连续函数，固定 x 时，f 关于 y 局部满足 Lipshitz 条件. 对于柱 A 中点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，如果存在适合方程

$$\frac{d}{dx}\varphi(x)=f(x, \varphi(x)) \quad (2.5)$$



的连续函数 $\varphi(x)$(根据微分方程的知识，$\varphi(x)$ 必属于 $C^1[a, b]$)，使得 $y_1=\varphi(x_1)$, $y_2=\varphi(x_2)$，规定 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$，那末～是 A 上的等价关系.

事实上，对任何 $(x_0, y_0)\in A$，根据常微分方程理论，存在 (2.5) 的唯一解 $y=\varphi(x)$，适合 $\varphi(x_0)=y_0$. 利用这个事实立即知道～是 A 上的等价关系，并且在同一积分曲线上的点彼此等价.

在偏微分方程中也有相仿于例 10 的等价关系.

例 11 同是例 10 中柱 A，如果 A 中两点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 能用某个连续曲线 l: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t\in[0, 1])$ 连结起来，即 $x_1=\varphi(0)$, $y_1=\psi(0)$; $x_2=\varphi(1)$, $y_2=\psi(1)$，规定 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$.

对任何 $(x, y)\in A$，当取以 1 为周期，并且满足 $\varphi(0)=\varphi(1)=x$, $\psi(0)=\psi(1)=y$ 的连续函数 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 时，就有 $(x, y)\sim(x, y)$；如果有 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t\in[0, 1])$ 实现 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$，显然 $x=\varphi(1-t)$, $y=\psi(1-t)$ 必实现 $(x_2, y_2)\sim(x_1, y_1)$；如果有

$x=\varphi_1(t)$, $y=\psi_1(t)$ ($t\in[0, 1]$) 实现 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$, $x=\varphi_2(t)$, $y=\psi_2(t)$ ($t\in[0, 1]$) 实现 $(x_2, y_2)\sim(x_3, y_3)$, 显然

$$\varphi(t)=\begin{cases}\varphi_1(2t), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \varphi_2(2t-1), & \text{当 } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\psi(t)=\begin{cases}\psi_1(2t), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \psi_2(2t-1), & \text{当 } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

必实现 $(x_1, y_1)\sim(x_3, y_3)$. 因此，$\sim$是 A 上等价关系. 由于 A 中任何两点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 必有连续曲线联接这两点，所以 A 中一切点按$\sim$都是彼此等价的.

例 12 设 A 是复平面上区域全体，G_1, $G_2\in A$, 如果存在 G_1 到 G_2 的一个双射 $\varphi(z)$, 并且 $\varphi(z)$ 是 G_1 上解析函数，规定 $G_1\sim G_2$. 由复变函数中有关解析的双射 φ 的 φ^{-1} 的解析性以及解析函数的复合函数的解析性知道$\sim$是 A 上等价关系，并且能共形映照的两个区域 G_1、G_2 彼此等价.

读者也可以举出很多等价关系的例子. 下面只再举一个具有普遍意义的(这点可从下面定理 2 看出)的等价关系.

例 13 设 A、B 是两个集，φ 是 A 到 B 的映射，当 $\varphi(x)=\varphi(y)$ 时，规定 $x\sim y$ (即两个元素的象相同时，规定 $x\sim y$). 由于

(1) $\varphi(x)=\varphi(x)$, $x\in A$;

(2) 如果 $\varphi(x)=\varphi(y)$, 那末 $\varphi(y)=\varphi(x)$;

(3) 如果 $\varphi(x)=\varphi(y)$, $\varphi(y)=\varphi(z)$, 那末 $\varphi(x)=\varphi(z)$.

由此易知 $\sim$ 是 A 上的等价关系. 这种等价关系称为由映射 φ 按等值方式导出的等价关系，简称为由 φ 导出 (或决定)的等价关系.

等价类 设 A 是一个集，$\sim$ 是 A 上的等价关系. 对任何 $a\in A$, $\tilde{a}$ 表示与 a 等价的元素全体所成的子集，即 $\tilde{a}=\{b\,|\,b\sim a,\ b\in A\}$, 称 $\tilde{a}$ 为元素 a 在等价关系$\sim$下所导出(或决定)的等价类.

引理1 设 A 是一个集，$\sim$ 是 A 上的等价关系，那末对任何 a、$b\in A$，等式 $\tilde{a}\cap\tilde{b}=\emptyset$ 和 $\tilde{a}=\tilde{b}$ 中必有一个成立.

证明 如果 $\tilde{a}\cap\tilde{b}=\emptyset$，引理已证得. 如果 $\tilde{a}\cap\tilde{b}\neq\emptyset$，那末必有 $c\in\tilde{a}\cap\tilde{b}$，从而对任何 $a'\in\tilde{a}$，$b'\in\tilde{b}$，由传递性就有 $a'\sim a\sim c$，$b'\sim b\sim c$，因此 $a'\sim b$，$b'\sim a$，即 $a'\in\tilde{b}$，$b'\in\tilde{a}$. 由于 a'、b' 分别都是任取的，所以 $\tilde{a}\subset\tilde{b}$，$\tilde{b}\subset\tilde{a}$，即 $\tilde{a}=\tilde{b}$. 证毕.

例如，在例 6 中，按"$=$"的等价关系所决定的等价类 $\tilde{a}=\{a\}$，按另一个平凡等价关系所决定的等价类为 $\tilde{a}=A$（对一切 $a\in A$）. 例 7 中数 $i(i=1, 2, 3, 4)$ 所决定的等价类为 $\tilde{i}=\{i+4k\}(k=0, 1, 2, \cdots)$. 例 8 中每个点 (x, y) 所决定的等价类为 $\widetilde{(x, y)}=\{(x', y')\,|\,y'=y\}$. 例 9 中的 $\tilde{a}$ 就是与 a 相似的 $n\times n$ 方阵全体. 例 10 中属于同一积分曲线上的点为一个等价类. 例 13 中

$$\tilde{x}=\{x'\,|\,\varphi(x')=\varphi(x)\}.$$

商 设 A 是一个集，$\sim$ 是 A 上的等价关系，称由 $\sim$ 所决定的等价类 $\tilde{a}$ 作为元素所组成的集为 A 关于 $\sim$ 的商集，简称为商，记为 $A/\sim$.

显然，$A/\sim$ 是由 A 的某些子集所成的集类.

如果我们引入

定义 设 A 是一个集，$\{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是一族互不相交的（A 的）子集，如果 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=A$，称 $\{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是 A 的剖分. 设 $\{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是 A 的一个剖分，$\sim$ 是 A 上的一个等价关系，如果剖分 $\{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 中每个 A_λ 按等价关系 $\sim$ 都是一个等价类，并且当 $\lambda\neq\mu$ 时，A_λ、A_μ 是不同的等价类，称 $\{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是由 $\sim$ 导出（决定）的剖分.

下面是剖分、等价关系、映射之间的联系.

定理2 设 A 是一个集.

(1) A 上的一个等价关系能导出 A 上的一个剖分；A 上的一个剖分能导出 A 上的一个等价关系 $\sim$，并且由 $\sim$ 所导出的 A 的剖分就是原来的剖分，

(2) A 上的一个映射由等值方式能导出 A 上的一个等价关系；由 A 上的等价关系能导出 A 上的一个映射 φ，并且 φ 的等值方式导出的等价类就是原等价关系的等价类.

证明　(1) 设 $\sim$ 是 A 上等价关系. 因为任何一个 $a'\in A$，必存在 $\tilde{a}\in A/\sim$，使得 $a'\in\tilde{a}$，所以

$$A=\bigcup_{\tilde{a}\in A/\sim}\tilde{a},$$

由引理 1 易知 $\{\tilde{a}\mid\tilde{a}\in A/\sim\}$ 是 A 的剖分. 反之，设 $\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是 A 的一个剖分，对于 $a,\ b\in A$，如果存在一个 $\lambda\in\Lambda$，使得 a、$b\in A_\lambda$ 时，规定 $a\sim b$，利用 $\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 彼此互不相交性，易知 $\sim$ 是 A 上的等价关系，并且对每个 $\lambda\in\Lambda$，A_λ 在 $\sim$ 下是等价类，当 $\lambda\neq\mu$ 时，A_λ、A_μ 是不同的等价类.

(2) 设 φ 是 A 到 A 上映射，由例 13(取 $B=A$)，按 φ 的等值方式就导出 A 的一个等价关系. 反之，设 $\sim$ 是 A 上的等价关系，根据(1)，由 $\sim$ 可以导出 $A/\sim$. 对于每个 $\tilde{a}\in A/\sim$，从中任选一个元素，例如 $a\in\tilde{a}$，作 A 上的映射 φ，当 $a'\in\tilde{a}\in A/\sim$ 时，

$$\varphi:\ a'\mapsto a,$$

即 φ 把每个等价类 $\tilde{a}$ 中元素映成该等价类中被选定的元素. 因为 $\tilde{a}\cap\tilde{b}=\emptyset$ 或 $\tilde{a}=\tilde{b}$ 二者必居其一，显然 φ 的等值方式导出的等价类就是原来等价关系的等价类. 证毕.

等价关系在数学的分类问题里是很重要的.

3. 对等

现在引入集的分类.

定义　设 A、B 是两个集，如果存在一个 A 到 B 的双射，那末称 A 和 B 对等.

一般说来，任取两个集 A、B，不一定存在 A 到 B 的双射. 例如 $A=\{1,\ 2\}$，$B=\{3\}$，就不存在 A 到 B 的双射. 事实上，如果有 A 到 B 的映射 φ，那末必有 $\varphi(1)=3=\varphi(2)$. 所以 φ 不可能是单射，当然更不可能是双射.

显然，对等是集与集之间的一种关系，对于对等，我们不再引

入新符号，仍记为 $\sim$.

引理 2 集之间的对等关系 $\sim$ 有下面三个基本性质：

(1) $A\sim A$;

(2) 如果 $A\sim B$，那末 $B\sim A$;

(3) 如果 $A\sim B$, $B\sim C$，那末 $A\sim C$.

此外还有一个常用的性质：

(4) 设 $\{A_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$、$\{B_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是两族分别彼此互不相交的集族，且对每个 $\lambda\in\Lambda$, $A_\lambda\sim B_\lambda$，那末必有 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \sim \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.

证明(1)～(3)是显然的，它们说明对等 $\sim$ 是集之间的一种等价关系.

证明(4) 由假设对每个 $\lambda\in\Lambda$，必有 A_λ 到 B_λ 的双射 φ_λ，作 $A=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 到 $B=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ 的映射 φ:

$$\varphi(x)=\varphi_\lambda(x), \quad x\in A_\lambda(\lambda\in\Lambda),$$

显然 φ 是 A 到 B 的双射，从而(4)成立. 证毕.

下面给出判断两个集对等的基本定理.

定理 3 (F. Bernstein 1898) 设 A、B 是两个集，如果 A 对等于 B 的子集，B 又对等于 A 的子集，那末 A 与 B 必对等.

证明定理 3 之前先举一个例子说明定理的假设合理.

例 14 设 $A=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$, $B=\{2, 3, \cdots, n, \cdots\}$. 如果取自然数集的恒等映射，那末 B 就对等于 A 的一个子集 $\{2, 3, \cdots, n, \cdots\}$. 反之，如果取 $\varphi(k)=k+3$，那末 φ 便是 A 到 B 的子集 $\{3, 4, \cdots, n, \cdots\}$ 的双射，即 A 也能对等于 B 的一个子集.

定理 3 的证明 由假设存在 A 到 B 的子集 B_1 的双射 φ_1，以及 B 到 A 的子集 A_1 的双射 φ_2. 因为 $B_1\subset B$，所以在 φ_2 下，$\varphi_2(B_1)=A_2\subset A_1$，即

$$A \overset{\varphi_1}{\sim} B_1 \overset{\varphi_2}{\sim} A_2, \quad (A_2\subset A),$$

因而 $\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1$ 实现了 A 到 A_2 的对等：$A\overset{\varphi}{\sim}A_2$, $A_2=\varphi(A)$.

记 $A_3=\varphi(A_1)$, $A_4=\varphi(A_2)$，由于 $A_2\subset A_1\subset A$，所以

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(A_2) & \subset & \varphi(A_1) & \subset & \varphi(A) \\ \| & & \| & & \| \\ A_4 & \subset & A_3 & \subset & A_2\subset A_1\subset A \end{array}$$

如此手续做下去，如记 $A_{n+2}=\varphi(A_n)$ $(n=3, 4, \cdots)$，就得到

$$A=A_0\supset A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots,$$

$$D=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

因为 $\varphi(A_n)=A_{n+2}$，$\varphi(A_{n+1})=A_{n+3}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 以及 φ 是单射，所以

$$\varphi(A_n-A_{n+1})=\varphi(A_n)-\varphi(A_{n+1})=A_{n+2}-A_{n+3},$$

即 φ 实现了对等：$A_n-A_{n+1}\sim A_{n+2}-A_{n+3}$，$(n=0, 1, 2, \cdots)$（例如图中 $E=A-A_1$ 与 $I=A_2-A_3$ 在 φ 下对等，…）．显然 A、A_1 可以分解成下列分别彼此互不相交的集的和：

$$\begin{array}{l} A=(A-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup(A_3-A_4)\cup\cdots\cdots\cup D \\ \qquad\quad\ \searrow^{\varphi}\ \swarrow_{I}\qquad\qquad\quad\ \searrow^{\varphi}\ \swarrow_{I}\qquad\qquad\qquad\ \updownarrow I \\ A_1=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup(A_3-A_4)\cup(A_4-A_5)\cup\cdots\cdots\cup D \end{array}\tag{2.6}$$

如果对 $n=0, 2, \cdots, 2n, \cdots$，取 A_n-A_{n+1} 到 $A_{n+2}-A_{n+3}$ 上的映射为 φ；$A_n-A_{n+1}(n=1, 3, \cdots, 2n+1, \cdots)$ 以及 D 上用恒等映射 I（如式(2.6)中箭头所示），便知 A 和 A_1 对等．证毕．

4．有限集和无限集

现在利用集的对等概念，给"有限"和"无限"这两个概念赋以严格的数学定义，并给出它们的特征．

定义　M_n 表示最初 n 个自然数的集，即 $M_n=\{1, 2, \cdots, n\}$．设 A 是一个集，如果 A 是空集或能与某个 M_n 对等，称 A 为有限集，并称 n 为 A 的计数（即 A 中元素的个数），空集的计数规定为 0．不是有限集的集称为无限集，

为了给出有限集和无限集的特征，先证下面引理.

引理 3 M_n 不与它的真子集对等.

证明 用归纳法略证如下.

当 $n=1$ 时，M_1 只有一个真子集 $\emptyset$，显然 M_1 不与 $\emptyset$ 对等. 假设 $n=k$ 时，引理成立，现证当 $n=k+1$ 时，引理必成立：

假如不对，存在双射 φ 实现 M_{k+1} 与它的真子集 M' 对等，记 $\varphi(k+1)=l$.

(1) 如果 $l=k+1$，那末从 M_{k+1}、M' 中都去掉 $k+1$，φ 便成了 M_k 到 M_k 的真子集 $M'-\{k+1\}$ 的双射. 这与归纳假设冲突，所以不可能出现 $l=k+1$.

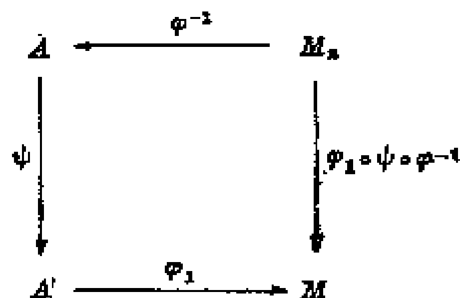
(2) 如果 $l\neq k+1$，但 $k+1\in M'$. 因而存在 $m\in M_{k+1}$，$\varphi(m)=k+1$. 今作 M_{k+1} 到 M' 的新的双射 ψ：仅将 φ 在元素 m、$k+1$ 上的象对调，其余不变. 易知 ψ 满足 $\psi(k+1)=k+1$，并且是 M_{k+1} 到其真子集 M' 的双射. 但根据(1)，这已被证明不可能.

(3) 如果 $k+1\overline{\in} M'$，那末从 M_{k+1} 中去掉 $k+1$，M' 中去掉 l，即 φ 限制在 M_k 上，是 M_k 到 M_k 的真子集 $M'-\{l\}$ 的双射，根据归纳法假设，这也不可能.

从逻辑上讲，不外上述三种情况，但都被一一证明不可能. 所以引理 3 成立.

由引理 3 立即得到

定理 4 (1)集为有限的充要条件是决不与其真子集对等；(2) 集为无限的充要条件是必与其真子集对等.



证明 (1) 的必要性 假设 A 是有限集，即存在 M_n 和 φ，使得 $A\overset{\varphi}{\sim}M_n$. 如果 A 能对等于某个真子集 A'，即存在 ψ：$A\overset{\psi}{\sim}A'$. 因为 $A'\subsetneqq A$，所以 $M'=\varphi(A')\subsetneqq\varphi(A)=M_n$. 由于 $M_n\overset{\varphi^{-1}}{\sim}A\overset{\psi}{\sim}A'\overset{\varphi_1}{\sim}M'$(此地 φ_1 为 φ 在 A' 上限制)，所以 $M_n\overset{\Phi}{\sim}M'$，其中 $\Phi=\varphi_1\circ\psi\circ\varphi^{-1}$(见图)，这与定理 3 冲

突．所以(1)的必要性证得．

(2)的必要性　假设 A 是无限集，显然 A 不空．在 A 中任取 a_1，$A-\{a_1\}$不空(否则 $A\sim M_1$)；再任取 $a_2\in A-\{a_1\}$，同样 $A-\{a_1, a_2\}$不空(否则 $A\sim M_2$)；对任何自然数 n，如此手续可一直做下去(否则 A 将和某 M_n 对等)．从而$\{a_n\}$是 A 中一列彼此互不相同的元素，记 $A_1=A-\{a_n\}$．在 A 中取一真子集 $B=\{a_2, a_3, \cdots\}\cup A_1$(缺掉元素 a_1)．作映射 φ 如下：

$$\varphi(x)=\begin{cases}a_{n+1}, & \text{当 } x=a_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\\ x, & \text{当 } x\in A_1.\end{cases}$$

易知 φ 是 A 到真子集 B 的双射，(2)的必要性证得．

如果一个集 A 决不与真子集对等，它必是有限集，因为如果是无限集，那末由(2)的必要性，A 必和真子集对等，这与假设冲突，所以(1)也是充分的．

同样，一个集能与真子集对等，它必是无限的(因为有限集是决不与其真子集对等的)．由此可知(2)也是充分的．证毕．

下面的系是显然的，但结论是基本的．

系　有限集的计数是唯一的．

由于自然数集 $N=\{1, 2, \cdots\}$必能与其真子集，例如 $B=\{2, 3, \cdots\}$对等，所以 N 是无限集．

有了上面关于有限集和无限集的定义和讨论，不难知道本书以前所用的有限和无限之类的术语，实际含义是和这里一致的．

5．势

对于有限集，可以根据它们的计数相等与否判断它们是否对等．对于无限集如何？这就导致引入如下势的概念．

定义　将彼此相互对等的集归于同一类(“等价类”)，不对等的两个集不属于同一类．对于同一个类中的一切集，我们称它们具有相同的势，用 $\overline{\overline{A}}$ 表示集 A 的势．对于有限集 A，$\overline{\overline{A}}$ 就是它的计数．

势是一切彼此对等的集之间的某种共同属性，是有限集的计数(即元素个数)概念的推广．有关势的一般讨论，如势的“大”、

“小”，势的计算等问题是属于集论中专门讨论的一个课题．本书不拟涉及．我们只简单地介绍普遍用到的两种无限集的势．

可列集 设 N 是自然数集，一切与 N 对等的集称为可列集，又称为可数集．可列集的势(也即 N 的势 $\overline{\overline{N}}$)记为 $\aleph_0$(读做“阿列夫零”)．

集 A 是可列的，即存在一个映射 φ，它是 N 到 A 的双射．如记

$$\varphi(n)=a_n\in A,$$

那末集 A 就可以写成 $\{a_n\}(n=1, 2, \cdots)$，即 A 的元素全体可以写成一个序列．由此可知本书中以前所用的“一列”、“可列”的实际含义是和这里吻合的．关于可列集有如下常用的性质．

定理 5 (1) 可列集的任何子集是有限集或可列集；

(2) 有限个或可列个可列集的和集仍为可列集，有限个或可列个有限集的和集是有限集或可列集；

(3) 如果集 A 是由有限个指标所决定的元素 $a_{x_1,\cdots,x_n}$ 全体，其中每个指标 $x_i(i=1, \cdots, n)$在有限集或可列集上独立变化，那末 A 必是有限集或可列集；

(4) 任何无限集中必含有可列的真子集；

(5) 设 B 是无限集，A 是有限集或可列集，那末 $\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{B}}$.

(性质(4)、(5)表明可列集是无限集中“最小”的无限集)

证明 (1) 设 A 是可列集，因而 A 可以写成

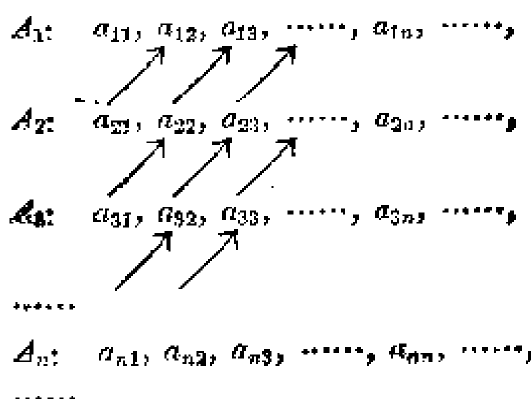
$$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}, \cdots \tag{2.7}$$

如果 $B\subset A$，不妨设 B 不空．在(2.7)中依着号码看是否属于 B 中的元素．因此得到 B 中的元是

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

(n_k 是第 k 次出现的号数)．显然，如果$\{n_i\}$中有最大的，B 是有限集；无最大的，B 便是可列集．

(2) 先设$\{A_n\}$是一列集，而且对每个 n，A_n 也是可列集．这样，A_n 可以写成



如按箭头所示，依次(即按 a_{pq} 的"高度" $p+q=h$ 由小到大，在同一高度中，按 p 从大到小)可将 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 中所有元素排列起来，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可列集．如果 $\{a_{pq}\}$ 中有相同的元素时，那末先把它们形式地看成不相同的，这时是可列集，再去掉重复元素就相当于这个形式上可列集的子集，由(1)知道 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是有限集或可列集．

显然，当只有有限个集，或有些集 A_n 只含有限个元素时，可类似讨论．

(3) 由(2)知道，对于由两个指标独立地在有限集或可列集上变化的元素 $\{a_{pq}\}$ 全体 B_2 是有限集或可列集．由归纳法可以证明对任何 k，$\{a_{x_1,\cdots,x_k}\}$ 全体 B_k 是有限集或可列集．因而由(1)，$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ 也是有限集或可列集．

(4) 这在证明定理 4 的(2)的必要性时已经证明过(在定理 4 的(2)的证明中，集 $B=\{a_2, a_3, \cdots\}$ 就是无限集 A 的可列真子集)．

(5) 因为 B 是无限集，据(4)，有可列集 $B_1 \subset B$．再由(1)、(2)，$B_1 \overset{\varphi}{\sim} B_1 \cup (A-B)$．显然 $B-B_1 \overset{I}{\sim} B-B_1$．由于 $(B-B_1) \cap (B_1 \cup (A-B))=\emptyset$，根据引理 2 的(4)，

$$B=(B-B_1)\cup B_1 \sim (B-B_1)\cup(B_1\cup(A-B))=B\cup A$$

证毕．

定理 5 中的(2)是最基本的性质．另外，性质(1)～(3)中是将

"有限"和"可列"的条件和结论混在一起说的，读者不难分清在具体场合，什么时候出现有限集，什么时候出现无限集。

现在利用定理 5 给出一些重要的可列集的例子。

例 15 有理数全体是可列集。

证明 事实上，有理数集包含了 N，所以是无限集。而每个有理数 r 可以写成既约分数的形式 $r=p/q,\ q>0$。称 $h=|p|+q$ 为 r 的"高度"。对于每个 $h(=0,1,2,\cdots)$，高为 h 的有理数全体记为 A_h，显然 A_h 是有限集。由定理 5 的(2)，$\bigcup_{h=0}^{\infty}A_h$ 是可列集。

例 16 整系数多项式全体是可列集。

证明 整系数多项式全体显然是无限集。记 n 次多项式 $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 为 $P_{a_0,\cdots,a_n}$，显然整系数多项式全体为 $\{P_{a_0,\cdots,a_n}\}$ $(n=0,1,\cdots)$，当 n 固定时，a_0、$\cdots$、a_n 在整数集(是可列集)上独立变化。因而从定理 5 的(3)立即得到它是可列集。

例 17 代数数全体是可列集。

证明 设 x 是实数，如果它是某个整系数多项式的根，称 x 为代数数。显然，任何自然数，有理数都是代数数，因而代数数全体必是无限集。设 $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 是整系数多项式，称 $h=\sum_{i=0}^{n}|a_i|$ 为 $P_n(x)$ 的"高度"。显然，同一个高度的次数不超过 n 的整系数多项式只有有限个，而每个多项式只有有限个实根，记高度为 h 的、次数不超过 n 的多项式实根全体为 A_h^n，则 A_h^n 是有限集。由定理 5 的(2)，$\bigcup_{h=0}^{\infty}A_h^n$ 最多是可列集。因此，代数数全体 $\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{h=0}^{\infty}A_h^n$ 是可列集。

例 18 A 是直线上一族互不相交的区间构成的集，如果每个区间的长度不是零，那末 A 必是有限集或可列集。

证明 事实上，当区间 $d\in A$ 时，由于 d 的长度不是零，所以 d 中必有有理数，在 d 中取任一有理数 r_d，作映射 φ: $d\to r_d$。由于 $d_1,\ d_2\in A,\ d_1\cap d_2=\varnothing$，所以 $\varphi(d_1)\neq\varphi(d_2)$，从而 φ 是 A 到有理数

集的单射，因此 φ 是 A 到有理数集的子集 $\varphi(A)$ 的双射，即 A 对等于有理数集的子集．由定理 5 的(1)，A 或是有限集或是可列集．

连续势　一切与直线上区间 $[0, 1]$ 对等的集，它的势被称为连续势，记作 $\aleph$（读做“阿列夫”）．

因为 $[0, 1]$ 中有理数全体易知是无限集，所以 $[0, 1]$ 是无限集，因此具有势为 $\aleph$ 的集具有一般无限集的性质．我们不再进一步去证明其他性质．这里仅指出势为 $\aleph$ 的集必是不可列的，并给出一些重要而常见的势为 $\aleph$ 的集的例子．

例 19　区间 $[0, 1]$ 是不可列集．

证明　根据定理 5 的(5)，$(0, 1]$ 与 $[0, 1]$ 势相同，我们只要证 $(0, 1]$ 是不可列集就可以了．

如果 $(0, 1]$ 是可列的，那末 $(0, 1]=\{t_n\}$，$(n=1, 2, \cdots)$，将 $(0, 1]$ 中所有实数按十进制无限小数表示（即十进制有理小数 $0.a_1a_2\cdots a_n000\cdots$ 规定写成 $0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\cdots$ 的循环小数形式，目的是使 $(0, 1]$ 中数与它的十进制无限位小数表示是一一对应）．

$$
\begin{aligned}
&t_1=0.t_{11}t_{12}\cdots t_{1n}\cdots,\\
&t_2=0.t_{21}t_{22}\cdots t_{2n}\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&t_n=0.t_{n1}t_{n2}\cdots t_{nn}\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

今作另一个无限位小数 $t=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$，但要求 $b_i\neq t_{ii}$，$b_i\neq 0(i=1, 2, \cdots)$ 显然这是能做到的（因为对每个 i，t_{ii} 是 $0, 1, \cdots, 9$ 中一个数，这十个数字中除去 0，t_{ii} 外随便取一个作为 b_i 即可）．显然 t 是无限位小数，$t\in(0, 1]$，但由于对任何 i，t 与 t_i 的第 i 位数不相等．所以 $t\neq t_i$．这就与 $\{t_i\}=(0, 1]$ 假设冲突，因此原假设 $(0, 1]$ 可列是不真的．证毕．

例 20　实数全体的势为 $\aleph$．

证明　因为 $(0, 1]=(0, 1)\cup\{1\}$，所以 $(0, 1)$ 的势为 $\aleph$．

显然
$$\varphi(x)=\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi$$
是$(0, 1)$到$(-\infty, \infty)$上的双射，所以实数全体与$(0, 1)$对等，从而势为$\aleph$.

例 21 无理数全体、超越数全体的势是$\aleph$.

证明 记无理数全体为B，有理数全体为R，因为$B\cup R=(-\infty, \infty)$，所以$B$是无限集. 由定理 5 的(5)和例 20，立即得到
$$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{B\cup R}}=\aleph.$$

不是代数数的数称为超越数(例如π、e等是超越数). 由于代数数全体是可列集(见例 17)，和证明无理数的势为$\aleph$一样，易知超越数全体的势为$\aleph$.

在 Cantor 创立集合论以前，好多数学家化了很长时间才证明个别的数如e是超越数，而集合论一出现，立即证明超越数很多，远比代数数多. 当然，势的理论并不提供哪一个具体的数是超越数.

例 22 实数列全体E^∞的势为$\aleph$.

证明 记B是E^∞中满足$0<x_i<1$的数列$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$全体. 作$B$到$E^\infty$的映射：
$$\varphi(x)=\left(\operatorname{tg}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \operatorname{tg}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \cdots,\ \operatorname{tg}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \cdots\right)$$
显然φ是B到E^∞上的双射，因而$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{E^\infty}}$. 由此可知，我们只要证明$\overline{\overline{B}}=\aleph$即可.

如果对$(0, 1)$中任何点x，把x和B中的点$\tilde{x}=(x, x, \cdots, x, \cdots)$对应，易知$(0, 1)$对等于$B$的一个子集($\tilde{x}$的全体). 根据 Bernstein 定理，我们只要证明B对等于$(0, 1)$的子集即可.

为此，对B中任何点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，按十进位无限小数表示每个$x_n$：
$$x_1=0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots x_{1n}\cdots,$$

$$x_2=0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots x_{2n}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\cdots x_{nn}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

对每个 $x\in B$，作(0, 1)上小数

$$\psi(x)=0.x_{11}x_{21}x_{12}x_{31}x_{22}x_{13}\cdots x_{n1}x_{(n-1)2}\cdots x_{1n}\cdots$$

显然 $\psi(x)\in(0,1)$，并且当 $x\neq y$ 时，$\psi(x)\neq\psi(y)$．从而 B 对等于(0, 1)的某个子集．证毕．

下面两个例子是例 22 的特例和应用．

例 23 n 维欧几里德空间 E^n 中的点全体势为 $\aleph$．

证明 因为 E^n 中点为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以视为 E^∞ 中点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots)$，从而 E^n 对等于 E^∞ 的子集．另一方面，E^1 中点 x 可以视为 E^n 中点 $(x, 0, \cdots, 0)$，从而 E^1 对等于 E^n 的子集．再根据例 22，E^1 对等于 E^∞，即 E^∞ 也对等于 E^n 的子集．由 Bernstein 定理知道 $\overline{\overline{E^n}}=\aleph$．

例 24 $[a, b]$上连续函数全体记为 $C[a, b]$，它的势为 $\aleph$．

证明 因为实数全体和 $C[a, b]$上常数函数全体这个子集对等．由 Bernstein 定理，只要证明 $C[a, b]$能对等于 E^∞ 的子集即可．

事实上，因为$[a, b]$上有理数全体为可列集，所以可以记为 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$．当 $f(x)\in C[a, b]$ 时，因为是连续的，所以 $f(x)$完全由有理数上的函数值，即数列 $f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n), \cdots$完全确定．因此映射

$$\varphi: f\mapsto(f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n), \cdots)$$

是$C[a, b]$到 E^∞ 的映射，易知 φ 是单射，从而 φ 是$C[a, b]$到 E^∞ 的子集 $\varphi(C[a, b])$的双射，即 $C[a, b]$也对等于 E^∞ 的子集．证毕．

6．g 进位小数

设 g 是任意取定的大于 1 的一个自然数，$\{t_n\}$是任意一列小于 g 的非负整数，下列级数

$$\frac{t_1}{g}+\frac{t_2}{g^2}+\cdots+\frac{t_n}{g^n}+\cdots \tag{2.8}$$

收敛，并且极限值属于 $[0, 1]$，称上述级数为 g 进位小数，简记为

$$0.t_1t_2\cdots t_n\cdots \tag{2.9}$$

如果存在一个 n_0，当 $n>n_0$ 时，$t_n=0$，那末称(2.8)(或(2.9))为 g 进位有限小数，否则，称为 g 进位无限小数.

注意，g 进位有限小数 $0.t_1\cdots t_n$ 和 g 进位无限小数 $0.t_1\cdots t_{n-1}(t_n-1)(g-1)(g-1)\cdots$ 表示同一个数值(这和十进位小数情况相同). 但从 g 进位小数的观念来看，我们仍把它们看成是不同的对象.

引理 4 (1) g 进位有限小数全体是可列集；

(2) g 进位无限小数全体的势为 $\aleph$；

(3) g 进位小数全体的势为 $\aleph$.

证明 (1) g 进位有限小数 $0.t_1t_2\cdots t_n(n=1, 2, \cdots)$ 全体就是一切具有有限个指标而每个指标可以独立地取 $0, 1, \cdots, g-1$ 这有限个数全体. 由定理 5 的 (3) 知它是有限集或可列集. 又因为至少包含下面一列数

$$0.1, 0.11, \cdots, 0.\underbrace{11\cdots1}_{n}, \cdots$$

所以 g 进位有限小数全体是可列集.

(2) 和例 19 中十进位无限小数情况完全相仿，g 进位无限小数全体与 $(0, 1]$ 对等，因而它的势为 $\aleph$.

(3) 由定理 5 的(5) 和已证明的本引理的 (1)、(2) 立即可得 (3). 证毕.

定理 6 (1) 设 M 是由两个不同元素 p、q 所组成的形式序列全体，那末 M 的势为 $\aleph$；

(2) Q 是可列集，那末 Q 的子集全体所成的集 S 的势为 $\aleph$.

证明 (1) 作 M 到二进位小数全体 B 的映射 φ：对任何 $b=\{b_n\}\in M$，

$$\varphi(b)=0.t_1t_2\cdots t_n\cdots,$$

其中每个 t_n 取值如下：当 $b_n=p$ 时，取 $t_n=0$；当 $b_n=q$ 时，取 $t_n=1$. 易知 φ 是 M 到 B 的双射. 根据引理 4 的(3)，$\overline{\overline{M}}=\aleph$.

(2) 因 Q 是可列集，所以 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots\}$. 作$S$到二进位小数全体 B 的映射 φ：对任何 $C\subset S$,

$$\varphi(C)=0.t_1t_2\cdots t_n\cdots.$$

当 $q_n\in C$ 时，取 $t_n=1$；当 $q_n\overline{\in} C$ 时，取 $t_n=0$. 易知 φ 是 Q 到 B 的双射. 从而 $\overline{\overline{S}}=\aleph$. 证毕.

7. 幂集及其势

定义　设 A 是一个集，它的一切子集全体所成的集 S 称为 A 的幂集.

例如，A 是一个有限集，$A=\{1, 2, \cdots, n\}$，那末 S 是一切不超过自然数 n 的自然数集全体，而 $\emptyset$ 也在其中. 当 $A=(-\infty, \infty)$时，S 是空集和一切实数集全体.

如果 A 是有限集，它的计数是 n. 显然，这时 S 也是有限集，并且它的计数是 2^n. 如果 A 是一般的集(可以无限). 它的幂集 S 的势就记为

$$\overline{\overline{S}}=2^{\overline{\overline{A}}}.$$

对于有限集 A，如果它的计数 n(n 可以为 0)，易知 $2^n>n$. 一般地，我们也可以证明下列定理.

定理 7　设 A 是一个集，必有 $2^{\overline{\overline{A}}}>\overline{\overline{A}}$.

这个定理我们不去证明它，可参见[1]、[2]、[5]、[7]、[8]等.

从定理 7，我们立即得到

定理 8　势没有最大的.

习　题

1. 设 φ 是 A 到 B 的映射，$\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是 A 中一族集. 证明

(1) $\varphi(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}\varphi(A_\alpha)$;

(2) $\varphi(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\varphi(A_\alpha)$，并举例说明 $\varphi(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\varphi(A_\alpha)$一般不成立.

2. 设 φ 是 A 到 B 的映射，B_1 是 B 的子集，称 A 中的集$\{x|\varphi(x)\in B_1\}$

为集 B_1 的原象，记为 $\varphi^{-1}(B_1)$（这里 φ^{-1} 并不是 φ 的逆映射记号，而是求 B_1 的原象的记号）. 设 $\{B_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是 B 中的一族集. 证明

(1) 当 $B_\alpha\subset B_\beta$ 时，$\varphi^{-1}(B_\alpha)\subset\varphi^{-1}(B_\beta)$；

(2) $\varphi^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}\varphi^{-1}(B_\alpha)$；

(3) $\varphi^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\varphi^{-1}(B_\alpha)$；

(4) 当 $B_\alpha\cap B_\beta=\emptyset$ 时，$\varphi^{-1}(B_\alpha)\cap\varphi^{-1}(B_\beta)=\emptyset$.

3．设 $\{\varphi_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是 A 到 B 的一族映射. 如果对一切 $\alpha\in\Lambda$，都有 $\varphi_\alpha(x)=\varphi_\alpha(y)$ 时，规定 $x\sim y$. 证明 $\sim$ 是 A 上的等价关系（称为由 $\{\varphi_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 族按等值方式导出的等价关系）. 特别，当 $A=[0,1]$，$\{\varphi_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是 $[0,1]$ 上多项式全体，证明：由 $\{\varphi_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 按等值方式导出的等价关系是平凡的等价关系.

5．设 A 是平面上曲线

$$S: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$
$$(a、b、c、d、e、f\text{ 为常数})$$

全体. 如果存在平面上移动和旋转变换能使 $S_1\to S_2$ 时规定 $S_1\sim S_2$，证明 $\sim$ 是 A 上等价关系，并用 $a、b、c$ 表示出每个等价类的特征.

6．设 A 是 $[0,1]$ 上连续函数全体，对 $f,g\in A$，如果 $f-g$ 是一个多项式，那末规定 $f\sim g$. 证明 $\sim$ 是 A 上的等价关系.

7．设 E 是一个集，A 是定义在 E 上的函数全体，E_0 是 E 的固定子集. 对于 $f,g\in A$，如果在 E_0 上 $f(x)=g(x)$，规定 $f\sim g$. 证明下列事实

(1) $\sim$ 是 A 上的等价关系；

(2) $A/\sim$ 与 E_0 上所有函数的集 B 对等.

8．证明：例 8 中集 $\mathbf{R}^2/\sim$ 与 y 轴这条直线对等；例 10 中集 $A/\sim$ 与直线对等.

9．设 A 是平面上三角形全体（不包括退化成线段的三角形）. 如果两个三角形 $\triangle_1、\triangle_2$ 相似，那末规定 $\triangle_1\sim\triangle_2$. 证明 $\sim$ 是 A 的等价关系，并且 $A/\sim$ 与平面上直线 $x=0$，$y=0$，$x+y=\pi$ 所围成的区域对等.

10．直接作出 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的双射.

11．证明无限集必包含无限多个互不相交的无限真子集.

12．证明 g 进位循环小数（定义与十进制相同）全体是可列集.

13．证明可列集的有限子集全体是可列集，无限子集全体的势为 $\aleph$.

14．$A=\{a_{x_1x_2\cdots}\}$，其中每个 x_i 在一个势为 $\aleph_0$ 或 $\aleph$ 的集上变化，证明 A 的势为 $\aleph$.

15．设 A 是一数集，如果存在一个常数 M，使得 A 中任取有限个数 x_1,

$\cdots, x_n \in A$，总有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant M,$$

证明 A 必是有限集或可列集.

16. 证明$[a, b]$上左方连续的单调函数全体的势为 $\aleph$(注：单调函数全体的势也是 $\aleph$).

17. 设$\{A_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$是一族势为 $\aleph$ 的集，当 Λ 是有限集、可列集、势为 $\aleph$ 的集时，$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 的势如何？

18. 设 R 是有理数集，$\{f_n\}$是定义在 R 上的一列函数，对于数集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(R)$中的数，再进行$+$、$-$、$\times$、$\div$、$\sqrt{\ }$、$\sqrt[3]{\ }$，…等一列运算的有限次运算(假如是允许的)所得的数集记为 A. 问 A 的势是什么？并问 A 为有限集的充要条件是$\{f_n\}$应是怎样的一列函数？

§3 直积、序和选择公理

本节中全是介绍性的内容，不给出实质性的结果，其中有些概念以后要用到.

1. 直积

直积是一个常用的概念.

定义 设 A_1、A_2 是两个集. 由一切 A_1 中的元素 a 和 A_2 中元素 b 构成的有次序的元素对(a, b)全体记为$A_1\times A_2$，这里所谓次序是指先写 A_1 中元素后写 A_2 中元素，称集 $A_1\times A_2$ 是 A_1、A_2 的直积(集)，或乘积(集)，又称为 Cartesian 乘积(笛卡尔乘积)，而称 a(或 b)为点(a, b)的 A_1 坐标(或 A_2 坐标).

类似地，对有限个集 A_1、…、A_n，用 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$(或者 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$)表示一切有次序的元素组$(a_1, \cdots, a_n)$，$(a_i\in A_i, i=1, \cdots, n)$的全体，称为$A_1, \cdots, A_n$ 的直积或笛卡尔乘积. 如果 $A_1, \cdots, A_n$ 都是数直线，称 $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$ 是 n 维笛卡尔空间.

例如，平面(即数对(x, y)全体)就可视为 A_1、A_2 都取为数直线的直积. 当然 n 维笛卡尔空间也可以视为 A_1 取为 $k(1\leqslant k\leqslant n)$

维的笛卡尔空间和 A_2 取为 $n-k$ 维笛卡尔空间的直积 $A_1\times A_2$.

投影 设 P_{A_1} 是 $A_1\times A_2$ 到 A_1 的如下映射

$$(x, y)\mapsto x$$

称 P_{A_1} 为 $A_1\times A_2$ 到 A_1 上的投影. 设 Z 是 $A_1\times A_2$ 上的任何一个集,称集$\{P_{A_1}z|z\in Z\}$为 Z 在 A_1 上的投影,记为 $P_{A_1}Z$.

显然, P_{A_1} 是 $A_1\times A_2$ 到 A_1 的满射. 类似地, 也可以引入 $A_1\times A_2$ 在 A_2 上的投影 P_{A_2}.

投影就是解析几何学中坐标投影的推广.

利用直积可以引入映射的图象概念.

图象 设 f 是集 A_1 的子集 $\mathscr{D}(f)$ 到集 A_2 的映射,称 $A_1\times A_2$ 的子集$\{(x, f(x))|x\in\mathscr{D}(f)\}$为 f 的图象. 记 f 的图象为 G_f.

映射 f 的图象 G_f 是由 f 决定出来的 $A_1\times A_2$ 中的子集(G_f 中点的 A_2 坐标由 A_1 坐标决定). 自然, 集 G_f 中就蕴含着 f 的某种性质, 在一定场合, 可以用 G_f 来研究 f. 本书下册中我们将看到这方面的事实,其它数学分支中也有用图象来讨论映射的. 这里,我们仅指出如下事实.

引理 1 设 G 是 $A_1\times A_2$ 的子集,那末 G 是某个定义在 A_1 的子集 $\mathscr{D}(f)$ 到 A_2 的映射 f 的图象的充要条件是对任何 $x\in P_{A_1}G$, 在 G 中只有唯一的点 a, 使 $P_{A_1}a=x$.

证明 必要性 设 $G=G_f$, f 是 $\mathscr{D}(f)$ $(\subset A_1)$到 A_2 的映射. 对任何 $x\in P_{A_1}G=P_{A_1}G_f=\mathscr{D}(f)$, 显然$(x, f(x))\in G$, 并且在 G 中只有唯一的点 $a=(x, f(x))$, 使得 $P_{A_1}a=x$.

充分性 对 G 中任何一点(x, y), 规定 $f: x\mapsto y$, $x\in P_{A_1}G$, 由假设易知 f 是定义在 $P_{A_1}G$ 到 G 的单值函数, 并且 $G=G_f$. 证毕.

运算是映射,而用直积可以描述映射,因而直积也可用来描述运算. 例如实数集 R 上的加法: $a+b=c$ 可以用 $R\times R\times R$ 中所有点$(x, y, x+y)$全体这个子集来表示.

多元直积(乘积) 设$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是一族集, Λ 是指标集, 一切元素族$\{a_\lambda\}$($a_\lambda\in A_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$)全体记为 $\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} A_\lambda$, 称集 $\underset{\lambda\in\Lambda}{\times} A_\lambda$ 为$\{A_\lambda|\lambda$

$\in\Lambda\}$的直积或笛卡尔乘积，而称a_μ为$\{a_\lambda\}$的A_μ坐标，简称为(第)μ坐标.

如果取$\Lambda=\{1, 2\}$或$\Lambda=\{1, 2, \cdots, n\}$便知道这里定义和前面的定义一致.

多元直积与下面用映射叙述的方式是等价的.

设$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是一族集，$\Lambda$是指标集. f是Λ到$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$的映射，但对任何$\lambda\in\Lambda$，$f(\lambda)\in A_\lambda$. 适合这种条件的映射全体$\{f|f(\lambda)\in A_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$称为$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$的直积.

由此可知，如果对一切$\lambda\in\Lambda$，$A_\lambda=A$，那末直积$\bigtimes\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$就是$\Lambda$到$A$的映射全体. 这时也将$\bigtimes\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$记为$A^\Lambda$. 例如$\Lambda$是$[a, b]$，$A$为实数全体，即$A=\mathbb{R}$，而$\mathbb{R}^{[a,b]}$就是$[a, b]$上实函数全体. 当$\Lambda$是自然数全体$N$时，$\mathbb{R}^N$就是$E^\infty$.

附 录

2. 序

序已成为近代数学常用的概念了. 这里也略加介绍.

顺序，在读者所学过的数学中事实上已多次接触，不过有些地方没有明确指出而已. 例如数学分析中重要的极限概念是研究变量的变化趋势，即按照某种顺序变化着的趋势. 数学分析中"有序变量"概念中就明确有了顺序的含义. 又如在黎曼积分中，常说"当相邻分点间的最大距离λ趋向零"这句话，这里"λ趋向零"实质上也是指按某个顺序趋向零. "条件收敛级数不能打乱顺序，……"这句话就明显地告诉我们，在级数求和中就包含有顺序在内. 现在要给顺序以明确的数学规定.

序 设A是一个集，$\prec$是A中某些元素之间的一种关系，如果这种关系具有下面的性质：

(1) 自反性 对A中一切元素a，成立着$a\prec a$；

(2) 反称性 如果$a\prec b$，又$b\prec a$，那末必有$a=b$；

(3) 传递性 如果$a\prec b$，又$b\prec c$，那末必有$a\prec c$.

我们就称关系$\prec$为A上的一个*顺序关系*，简称为序(关系).

当$a\prec b$时，读作a在b前(或b在a后)，也可说成a先于b(或b后于

a).

例 1 设 A 是由集 X 的一切子集组成的一个集，“$\subset$”关系就可作为 A 中元素的序．例如当 $a, b\in A$ 时，如果 $a\subset b$，规定 $a\prec b$．显然这是 A 上的一个序．

例 2 T 为一个集，$A=\mathbf{R}^T$(即 T 上实函数全体)．当 $f, g\in A$，而且对每个 $t\in T$，$f(t)\leqslant g(t)$时，规定 $f\prec g$，显然这是 A 上的一个序．

例 3 设 A 是全体实数，当 $a\leqslant b$ 时，规定 $a\prec b$，显然它是 A 上的一个序，这个序通常称为*自然(顺)序*，如果 $a\leqslant b$ 时，规定 $b\prec a$，显然，它也是 A 上的一个序，这个序通常称为*逆自然(顺)序*．

例 4 设 $D(t_0, \cdots, t_n)$是$[0, 1]$上的有限分点组，其中

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=1.$$

因为 $D(t_0, t_1, \cdots, t_n)$与$[0, 1]$上的剖分$[0, 1]=[t_0, t_1]\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(t_i, t_{i+1}]\right)$是一一对应的，所以也称 $D(t_0, \cdots, t_n)$是$[0, 1]$的剖分．集 A 是$[0, 1]$上所有有限分点组 $D(t_0, \cdots, t_n)$的全体．设 $D_1(t_0, \cdots, t_n)$，$D_2(t'_0, \cdots, t'_m)$是 A 中两个元素，当点集$\{t_0, \cdots, t_n\}$是点集$\{t'_0, \cdots, t'_m\}$的子集(通常称 D_2 是 D_1 的加细)时，规定 $D_1\prec D_2$．显然，它是 A 上的序．黎曼积分中实际上用到了这种序．

例 5 A 是实数对(x, y)的全体．当两个点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)满足(i)$x_1<x_2$，或(ii)$x_1=x_2$，而 $y_1\leqslant y_2$ 时，规定$(x_1, y_1)\prec(x_2, y_2)$．显然，它是 A 上的一个序．这个序通常称为*字典(顺)序*．

例 6 设 A 是 n 维复向量空间上的线性变换全体，对任何 $a, b\in A$(即 a、b 都是 $n\times n$ 的方阵)，如果 $b-a\geqslant 0$(即方阵 $c=b-a$ 是正的，或者说对一切 n 维复向量空间的向量 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$\sum c_{ij}x_i\bar{x}_j\geqslant 0$，这里 c_{ij} 是C的矩阵元)时，规定 $a\prec b$．由线代数的知识容易证明它是 A 上的序．

注意，对于“序”的定义，我们这里采取满足自反、反称、传递三条，有的书上规定序时只用自反、传递两条，也有只用传递一条的．例如实数 a、b 的关系 $a<b$，从序来看，关系“$<$”就只适合传递这一条．

半序集和全序集 从上面所举的例子看出序是相当普遍地存在的．我们从序的定义和上面的例中可以清楚地看到，一个集 A 上如有序“$\prec$”，这个序关系并不是对 A 中任何两个元 a、b 都有不是 $a\prec b$ 就是 $b\prec a$ 的．除了例 3 而外，其他例子都是如此．我们称一个有了序的集 A 为*半序集*(或*偏序集*)．如果一个有了序的集 A，其中任何两个元素 a、b 都可比较顺序，即不是 $a\prec b$，便是 $b\prec a$ 时，称 A 按 $\prec$ 成*全序集*．

显然，全序集是一种特殊的半序集．例 3 中无论取 $\prec$ 为自然顺序或逆

自然顺序时，都成全序集．如果 A 是一个半序集，把 A 上的序 $\prec$ 限制在它的任何一个子集 B 上，自然 B 也是一个半序集（无特别申明时，总是把 B 上的序取为 A 上的序）．如果 B 还是全序集时，称 B 为半序集 A 中的全序子集．显然，全序集的任何子集仍是全序集．

例如在例 1 中，如果 B 是由 A 中满足 $a\subset b$ 的两个元素 a、b 构成的集，那末 $B=\{a, b\}$ 便是例 1 中半序集 A 的全序子集．又如例 5 中，如果取 B 是数对 $\{(x, 0)\}$ 的全体，B 便是例 5 中半序集 A 的全序子集．

上、下界　A 是半序集，B 是 A 的子集．如果存在 $a\in A$，使得对一切 $b\in B$，都有 $b\prec a$（或 $a\prec b$）时，称 a 为 B 的上界（或下界）．

例如在例 3 中，实数集 A 上取自然顺序．这里的上、下界概念和过去熟知的定义一致．再如在例 5 中，取 $B=\{(x, y)\,|\,x<0\}$．显然任何元素 $(0, y)$ 都是 B 的上界．

一般说来，半序集中的子集可以没有上界，即便有界，也并不一定唯一．例如在例 5 的半序集中取集 $B=\{(x, 0)\,|\,0<x<\infty\}$ 时，就没有上界．

上、下确界　A 是半序集，B 是 A 的子集．设 a 是 B 的一个上界（或下界），如果 B 的任何一个上界（或下界）b，都有 $a\prec b$（或 $b\prec a$），那末称 a 是 B 的**上确界**（或**下确界**）．

显然，上、下确界也是和实数集的上、下确界定义相仿的．当实数集的序取为自然顺序时，两个定义是一致的．

例如在例 1 中，取 A 的子集 $B=\{E_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$（其中每个 E_α 是 X 的子集），这时 B 的上确界是 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$，而下确界是 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$．

设 B 是半序集 A 的子集．如果 B 有上确界或下确界，从上、下确界的定义和序的性质(2)知道，B 的上、下确界必是唯一的．但应该注意，一般说来，即使子集 B 有上、下界，它也未必有上、下确界．这一点是与直线上数集有区别的．例如 A 是由 a、b、c、d 四个元素组成的集，并规定 $a\prec a$，$b\prec b$，$c\prec c$，$d\prec d$，$a\prec c$，$b\prec d$．显然，集 $B=\{a, b\}$ 有两个上界 c、d，但 B 没有上、下确界．

定理 1　设 A 是半序集，f 是 $A\to A$ 的映射，如果满足

(1) A 的任何一个全序子集都有上确界；

(2) 对任何 $x\in A$，$x\prec f(x)$，

那末 f 必存在一个不动点，即存在 $\omega\in A$，使得 $f(\omega)=\omega$．

极大元　设 A 是半序集，如果 a 是 A 中这样的元素：不存在 A 中其它元素 b（即 $b\neq a$），使得 $a\prec b$，那末称 a 为 A 的**极大元**．

显然，如果 a 是半序集 A 的极大元，那末一切使得 $a\prec b$ 成立的 b 必有

$b=a$.

例如取 $A=[0, 1]$，序取为自然顺序. 易知1是 A 的极大元. 再如 A 是由 a、b 两个元素构成的集，规定 $a\prec a$, $b\prec b$，这样 A 是半序集，显然，a、b 都是 A 的极大元. 下面再给一例.

例 7 设 A_0 是实数对 (x, y) 全体，但序 $\prec$ 规定如下：当两点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 同时满足 $x_1\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y_2$ 时，规定 $(x_1, y_1)\prec(x_2, y_2)$. 显然，它是 A_0 上的序. 取 A 为 A_0 的子集 $\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 时，A 按上述序为半序集. 显然，所有平面第一象限中单位圆周上的点都是 A 上的极大元.

全序集中如果有极大元，显然极大元是唯一的.

类似地，可以引入极小元.

逆序 设 A 是半序集，$\prec$ 是 A 上的序. 在 A 上我们可以引入新的顺序关系 $\prec^{-1}$：当 $a\prec b$ 时，规定 $b\prec^{-1}a$. 易知 $\prec^{-1}$ 也是 A 上的一个序，称 $\prec^{-1}$ 是 $\prec$ 的逆序.

3. 曹恩(Zorn)引理及其等价公理

这一小节主要介绍在研究"无限过程"时常用的一个逻辑工具——Zorn 公理. 它在泛函分析和其它处理无限过程中是经常用到的，习惯上把 Zorn 公理叫做引理.

Zorn 引理 设 A 是半序集，如果 A 的每个全序子集都有上界，那末 A 必有极大元.

这个引理似乎是可以接受的，它可以粗略地这样看(不是证明)：先任取 A 中元素 a，如果它不是极大元，那末必有 $a_2\in A$, $a_2\neq a_1$，使得 $a_1\prec a_2$；如果 a_2 还不是极大元，又必有 $a_3\in A-\{a_1, a_2\}$，使得 $a_1\prec a_2\prec a_3$；如果 a_3 还不是极大元，照上面手续一直可以做下去，得到一个全序子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. 依假设，有一个上界 $a_\omega\in A$，如果 a_ω 还不是 A 的极大元，必有 $a_{\omega+1}\in A-\{a_1, \cdots, a_n, \cdots, a_\omega\}$，

$$a_1\prec a_2\prec\cdots\prec a_n\prec\cdots\prec a_\omega\prec a_{\omega+1}$$

如果 $a_{\omega+1}$ 还不是极大元，又可得到全序子集

$$a_1\prec a_2\prec\cdots\prec a_n\prec\cdots\prec a_\omega\prec a_{\omega+1}\prec\cdots\prec a_{\omega+n}\prec\cdots$$

由假设，它又有一个上界 $a_{2\omega}$，$a_{2\omega}$ 还不是 A 的极大元时又可再做，什么时候出现 A 的极大元就什么时候停止. 上述手续一直做下去，"必"有一次会出现 A 的极大元(因为每抽一次全序性仍能保持，而 A 中后于 a_1 的元最终也"会"被抽空! 直到不能再抽时，那最后的一次就得 A 的极大元).

Zorn 引理(公理)和下面几个公理是等价的(即承认一个可以推出其它).

策墨罗(Zermelo)选择公理 设 $S=\{M\}$ 是一族两两互不相交的非空集构成的集，必存在满足下面两个性质的集 L：

(1) $L\subset\bigcup\limits_{M\in S}M$;

(2) L 与 S 中每个集 M 的交中仅含一个元素.

通常称元素 $L\cap M$ 为集 M 的**代表元**，而 L 称为**代表元集**.

策墨罗选择公理的另一种表述方式如下:

设 $S=\{M\}$是一族非空的集构成的集. 必存在一个满足下面两个条件的集 L:

(1) $L\subset\bigcup\limits_{M\in S}M$;

(2) L 与 S 中每个集 M 的交非空.

策墨罗良序公理

定义　A 是一个半序集，如果 A 的任何一个非空子集必有一个下界包含在子集自身中(显然，它必是该子集的下确界)，称集 A 是**良序集**.

例如自然数集按自然顺序为序时是良序集. 而整数集按自然顺序为序时，就不是良序集，因为$\{-1,\ -2,\ \cdots,\ -n,\ \cdots\}$就没有下界，更不必说有下确界和下界包含在自身中了. 同样，实数集按自然顺序为序也不是良序的.

良序公理　任何一个集必可在它上面规定一个序而成为良序集.

粗糙地理解就是: A 是任何一个集(不是空集)，我们从中依次抽取元素，一个一个地到"抽空"(!　)为止，依抽的先后次序为序即可.

豪斯道夫(Hausdorff)极大原理　每个半序集中必有一个极大全序子集.

这里所谓极大全序子集的意思，就是不能再在其中添加一个新元素，使其仍成为全序集. Hausdorff 极大原理另一个等价表示方法如下:

极大原理　设 A 是半序集，S 是 A 的全序子集全体，在 S 中用包含关系作为序成为半序集，那末半序集 S 必有极大元.

有关上述许多公理之间的关系和等价性的证明可参见[7].

当然还有一些等价形式，但较常用的是上述的一些形式.

4. 势的比较

对任何两个集 A、B，它们的势是否可以比较大小?应用上述公理就可回答这个问题. 因为对任何两个集 A、B，从逻辑上讲只有四种情况:

(1) A 对等于 B 的某子集，而 B 不对等于 A 的任何子集;

(2) B 对等于 A 的某子集，而 A 不对等于 B 的任何子集;

(3) A 对等于 B 的某子集，B 也对等于 A 的某子集;

(4) A 不对等于 B 的任何子集，而 B 也不对等于 A 的任何子集.

如果出现(1)时，规定 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$; 如果出现(2)时，规定 $\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$; 如果出现(3)时，由 Bernstein 定理知 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 剩下的便是会不会出现(4). 用 Zermelo 选

择公理就可以排除(4)的出现，从而势可以比较大小．也就是说，由势构成的集是全序集．其实，Zermelo 选择公理正是为了解决势的比较而提出来的．

§4 直线上的点集

前面讨论的是一般的集．这一节将讨论直线(一维欧几里德空间)E^1 中点集(也即实数集 $\mathbb{R}$)．它们一方面是基础性的知识，是本书实函数论部分各章必不可少的准备．另一方面，也是更一般的理论(例如距离空间、拓扑空间上点集理论)的重要原型．直线上的点集，作为一般集论中的集来看，自然是特殊的、具体的，从分析数学的观念来看，它和一般集论中的集有一个很重要的区别，这就是直线上有"点列$\{x_n\}$收敛于点 x"的极限概念，以及与极限相联系的映射连续的概念．分析数学总是离不开某种连续性的研究，而在一般集论中是没有极限或连续之类的概念的．

1．直线上的区间

区间是很熟悉的直线上的一类点集．点集$(\alpha,\ \beta)=\{x|\alpha<x<\beta\}$称为 E^1 上开区间，这里 $-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant\infty$；点集$(\alpha,\ \beta]=\{x|\alpha<x\leqslant\beta\}$称为 E^1 上左开右闭区间，这里 $-\infty\leqslant\alpha<\beta<\infty$；同样，称点集$[\alpha,\beta)=\{x|\alpha\leqslant x<\beta\}$为左闭右开区间，这里$-\infty<\alpha<\beta\leqslant\infty$；点集$[\alpha,\ \beta]=\{x|\alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$称为 E^1 上的闭区间，这里 $-\infty<\alpha\leqslant\beta<\infty$．

上述四种点集统称为 E^1 上区间．区间常记为$\langle\alpha,\ \beta\rangle$．

闭区间$[\alpha,\ \alpha]$就是直线上单点集$\{\alpha\}$．

此外，规定$[\alpha,\ \alpha)$、$(\alpha,\ \alpha]$均表示空集．

如果区间$\langle\alpha,\ \beta\rangle$的端点 α、β 都是有限数时，称$\langle\alpha,\ \beta\rangle$是有限区间，否则称为无限区间．

2．点集的上、下确界

设 A 是直线上的点集．如果存在一个数 M(或 m)，使得一切 $x\in A$，有 $x\leqslant M$(或 $x\geqslant M$)，称数集 A 有上界(或有下界)，并称 M(或 m)是 A 的一个上界(或下界)．如果数集 A 既有上界，又

有下界，那末称 A 为有界，否则称 A 为无界。

显然，如果 M 是 A 的一个上界，那末一切大于 M 的数 M' 也是 A 的上界。同样，如果 m 是 A 的一个下界，那末一切小于 m 的数 m' 也是 A 的下界。

设 A 是有上界(或下界)的点集，如果 M(或 m)是 A 的一个上界(或下界)，并且对任何 $\varepsilon>0$，存在 $x\in A$，使得 $x>M-\varepsilon$(或 $x<m+\varepsilon$)，那末称 M(或 m)是 A 的上确界(或下确界)。上、下确界分别记为

$$M=\sup_{x\in A}x,\quad m=\inf_{x\in A}x.$$

如果 A 没有上界，那末规定 A 的上确界 $\sup\limits_{x\in A}x=\infty$. 同样，如果 A 没有下界，那末规定 A 的下确界 $\inf\limits_{x\in A}x=-\infty$. 直线上点集 A 的上、下确界分别简记为 $\sup A$、$\inf A$.

显然，对任何点集 A，$\sup A$、$\inf A$ 都有意义，当然可能是无限大，而点集 A 有界的充要条件是 $\sup A$ 和 $\inf A$ 都是有限数。

3. 直线上的开、闭集

在数学分析中研究函数极值可达时，常常用到 Weierstrass 的抽取子序列收敛的方法。例如在证明 $[a, b]$ 上连续函数 f 的极大(或极小)值可达时，就要用到抽取一个收敛序列 $\{x_n\}$，使 $\{f(x_n)\}$ 收敛于极大(或极小)值，从而证明在点 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的函数值 $f(x)$ 就是 f 在 $[a, b]$ 上的极大(或极小)值。撇开函数所具有的性质，从点集的观念来看，这里很重要的一点是利用了集 $[a, b]$ 具有这样的性质：$[a, b]$ 上任取一个收敛序列 $\{x_n\}$，它的极限 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 仍属于 $[a, b]$. 如果 $[a, b]$ 换为 (a, b)，尽管 f 仍是 (a, b) 上连续函数，但 f 的极大(或极小)值就不一定可达了。由此可见，直线上点集 A 是否对极限运算封闭，对分析数学来说是很重要的。下面我们先讨论开集，然后再讨论对极限运算封闭的集。

开集 设 G 是直线上的一个点集，$x\in G$，如果存在包含 x 的某区间 (α, β)，使得 $(\alpha, \beta)\subset G$ 成立，那末称 x 是 G 的内点。如

集 G 的每个点都是 G 的内点，那末称 G 是开集. 称包含 x 的开集为 x 的环境.

规定空集是开集.

例 1 任何开区间 (a, b) 显然是开集，而 $(a, b]$ 就不是开集了.

开集有如下基本性质。

定理 1 (1) 空集和全空间是开集；

(2) 任意个开集的和是开集；

(3) 有限个开集的通是开集.

证明 (1) 是显然的. 下面证明(2)、(3).

(2) 设 $\{G_\alpha | \alpha \in A\}$ 是一族开集，记 $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. 任取 $x \in G$，今证 x 必是 G 的内点：事实上，因 $x \in G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$，所以必存在某个指标 γ，使得 $x \in G_\gamma$. 因为 G_γ 是开集，所以存在 x 的环境 (α, β)，使得 $x \in (\alpha, \beta) \subset G_\gamma$，从而 $x \in (\alpha, \beta) \subset G$. 因此，$G$ 是开集.

(3) 设 G_1、…、G_n 是有限个开集，记 $G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$. 任取 $x \in G$，因为 $G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$，所以 $x \in G_k (k=1, \cdots, n)$，从而存在 (α_k, β_k)，使得 $x \in (\alpha_k, \beta_k) \subset G_k$. 令 $\alpha_0 = \min_{1 \le k \le n} \alpha_k$, $\beta_0 = \max_{1 \le k \le n} \beta_k$，显然，$x \in (\alpha_0, \beta_0) \subset (\alpha_k, \beta_k) \subset G_k$，对一切 $k = 1, 2, \cdots, n$ 都成立，从而 $x \in (\alpha_0, \beta_0) \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k = G$，即 x 是 G 的内点. 证毕.

应该注意，(3)中“有限”这个假设不能换为“无限”. 下面就是反例.

例 2 取 $G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \cdots$, $\{G_n\}$ 是一列开集，而 $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = G = \{0\}$ 就不是开集.

从几何直观来说，开集 G 的每点是内点，这意味着每一点都存在一个环境 (α, β)，这个环境中的点都是 G 中的点. 由此可以设想开集 G 应该是一段一段区间拼起来的. 为了证实这个想法

是正确的，我们引入如下定义：

定义　设 G 是开集，如果开区间 $(\alpha, \beta)\subset G$，并且端点 α、β 都不属于 G，那末称 (α, β) 是 G 的构成区间。

定理 2（开集的构造）　直线上非空开集 G 必可唯一地表示成有限个或可列个互不相交的开区间 (α_ν, β_ν) 的和，$G=\bigcup_{\nu=1}^{k}(\alpha_\nu, \beta_\nu)$，$k\leqslant\infty$，并且这时每个 (α_ν, β_ν) 必是 G 的构成区间。

证明　假设 G 是开集，任取 $x\in G$，由开集定义，存在 (α, β)，使得 $x\in(\alpha, \beta)\subset G$。

记 A_x 是由一切适合 $x\in(\alpha, \beta)\subset G$ 的开区间 (α, β) 作为元素的集。

(I)　先证 A_x 中必有一个最大的开区间 (α_0, β_0)（即一切 A_x 中的区间 $(\alpha, \beta)\subset(\alpha_0, \beta_0)$）。

记

$$\alpha_0=\inf_{(\alpha,\beta)\in A_x}\alpha,\quad \beta_0=\sup_{(\alpha,\beta)\in A_x}\beta. \tag{4.1}$$

显然 $x\in(\alpha_0, \beta_0)$，并且对任何 $(\alpha, \beta)\in A_x$ 都有 $(\alpha, \beta)\subset(\alpha_0, \beta_0)$。再证 $(\alpha_0, \beta_0)\subset G$：事实上，对任何 $y\in(\alpha_0, \beta_0)$，不妨设 $\alpha_0<y<x$。由下确界定义和(4.1)知道必存在 $(\alpha', \beta')\in A_x$，使得

$$\alpha_0\leqslant\alpha'<y<x<\beta' \tag{4.2}$$

因为 $(\alpha', \beta')\subset G$，由(4.2)立即得到 $y\in(\alpha', \beta')\subset G$。类似地，可以证明当 $x<y<\beta_0$ 时，也有 $y\in G$。由此得到 $(\alpha_0, \beta_0)\subset G$。这就是说 $(\alpha_0, \beta_0)\in A_x$。

(II)　证明 (α_0, β_0) 必是 G 的构成区间。显然只要证明 α_0、$\beta_0\,\overline{\in}\,G$ 就可以了。如果 $\alpha_0\in G$，由于 G 是开集，从而存在 (α', β')，使得 $\alpha_0\in(\alpha', \beta')\subset G$。于是

$$x\in(\alpha', \beta_0)\subset(\alpha', \beta')\cup(\alpha_0, \beta_0)\subset G,$$

但 $(\alpha', \beta_0)\neq(\alpha_0, \beta_0)$，这与 (α_0, β_0) 是 A_x 中最大的相冲突，所以 $\alpha_0\,\overline{\in}\,G$。同样可证 $\beta_0\,\overline{\in}\,G$。

(III)　证明 G 的任何两个构成区间 (α, β)、(α', β') 互不相交。事实上，如果 $(\alpha, \beta)\cap(\alpha', \beta')\neq\emptyset$，显然必将发生其中一个区

间端点落在另一个区间中，从而这个端点应属于 G，这就与构成区间的定义相冲突．

(IV) 既然每个 $x\in G$ 都落在某构成区间内，因而 G 是构成区间的和，但构成区间是互不相交的，由§2的例18知道 G 的构成区间或有限个或可列个．因而 $G=\bigcup\limits_{\nu=1}^{k}(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$，$k\leqslant\infty$，其中 $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$ 互不相交，并且是 G 的构成区间．

(V) 唯一性　假设 $G=\bigcup\limits_{\nu=1}^{k}(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$，$\nu\leqslant k$，并且当 $\mu\neq\nu$ 时，$(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)\cap(\alpha_\mu,\ \beta_\mu)=\emptyset$．今证每个 $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$ 必是 G 的构成区间：显然 $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)\subset G$，如果 $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$ 不是构成区间，例如 $\alpha_\nu\in G=\bigcup\limits_{\mu=1}^{k}(\alpha_\mu,\ \beta_\mu)$，因此存在某个 $(\alpha_{\nu'},\ \beta_{\nu'})$ $(\nu'\neq\nu)$，使得 $\alpha_\nu\in(\alpha_{\nu'},\ \beta_{\nu'})$，从而 $(\alpha_{\nu'},\ \beta_{\nu'})$ 与 $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$ 的交不空．这与 $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$、$(\alpha_{\nu'},\ \beta_{\nu'})$ 是互不相交的假设冲突．证毕．

极限点　设 A 是直线上的点集；x_0 是直线上的一个点（可以属于 A，也可以不属于 A），如果 x_0 的任何一个环境 $O(x)$ 中总含有 A 中无限多个点，称 x_0 为 A 的极限点．

例如，当 x_0 是集 A 的内点时，显然 x_0 必是 A 的极限点．又如当 $-\infty<a<b<\infty$ 时，区间 $\langle a,\ b\rangle$ 的端点 a、b 都是 $\langle a,\ b\rangle$ 的极限点．

空集和有限集就没有极限点．

例3　集 $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}$ 有且仅有一个极限点 0．

一个点是一个集的极限点的定义有许多常用的等价形式．

定理3　设 A 是直线上一个点集，x_0 是直线上一点，下面几件事是彼此等价的：

(1) x_0 是 A 的极限点．

(2) x_0 的任何环境 $O(x_0)$ 中必含有 A 中不同于 x_0 的点，即 $(O(x_0)-\{x_0\})\cap A\neq\emptyset$．

(3) 存在 A 中的元素序列 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，使得

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

(4) 存在 A 中由互不相同的元素组成的序列 $\{x_n\}$，使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

证明 只要能从 (1)⇒(2)[注]，(2)⇒(3)，(3)⇒(4)，(4)⇒(1) 就可以了．由 (1)⇒(2) 是显然的．

(2)⇒(3) 任取自然数 n，由于

$$\left(\left(x_0-\frac{1}{n},\ x_0+\frac{1}{n}\right)-\{x_0\}\right)\cap A\neq\emptyset.$$

从中任取一个元素 x_n，显然 $x_n\in A$，$x_n\neq x_0$，且 $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$，由此易知 $\{x_n\}$ 满足 (3) 的要求．

(3)⇒(4) 由于有 A 中的元素列 $\{x_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

且 $x_n\neq x_0$，$n=1, 2, \cdots$．显然可以从 $\{x_n\}$ 中选出一个互不相同的元素组成的子序列 $\{x_{n_\nu}\}$，并且 $\lim_{\nu\to\infty} x_{n_\nu}=x_0$．即 (4) 成立．

(4)⇒(1) 设 $\{x_n\}$ 是 A 中一列互不相同的元素构成的收敛于 x_0 的序列．对任何 x_0 的环境 $O(x_0)$，总存在 x_0 的环境 $(\alpha, \beta)\subset O(x_0)$．记 $\varepsilon=\min(x_0-\alpha, \beta-x_0)$．对这个 ε，必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-x_0|<\varepsilon$，即 $x_n\in(\alpha, \beta)\subset O(x_0)$．由于 $\{x_n\}$ 是互不相同的，所以 $O(x_0)$ 中含有 A 中无限个点．因此，x_0 是 A 的极限点．证毕．

定理中 (3)、(4) 是极限点的序列表达方式，(1)、(2) 是环境表达方式．今后可在不同的场合，根据方便灵活运用不同的方式．

闭集 设 A 是直线上的点集，A' 表示 A 的极限点全体，称 A' 为 A 的导集．如果 $A'\subset A$，称 A 为闭集．

显然，闭集就是对求极限点的运算封闭的集．

下面是闭集定义的等价形式．

定理 4 下面三件事是等价的．

[注] 记号“⇒”表示“导致”或“推出”．

(1) A 是直线上闭集.

(2) 由 A 中元素构成的任何收敛序列必收敛于 A 中的元素.

(3) A 的余集 $A^c=E^1-A$ 是开集.

证明 (1)⇒(2) 设$\{x_n\}$是由A中元素构成的序列,记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 如果有无限个编号,例如 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,使得 $x_{n_k}=x_0$,这里 $x_0\in A$ 是显然的. 不妨最多只有有限个编号(可能没有)的元素为 x_0,从$\{x_n\}$中去掉这有限个编号便是满足 $x_n\neq x_0$,且收敛于 x_0 的序列. 由定理 3 的(3),x_0 是集 A 的极限点(即 $x_0\in A'$). 因为假设 A 是闭集,所以也有 $x_0\in A$.

(2)⇒(3) 假设(2)成立,今证 A^c 是开集. 如果 A^c 不是开集,即 A^c 中必有一点 x_0,它不是 A^c 的内点. 换言之,在任何 x_0 的环境$\left(x_0-\frac{1}{n},\ x_0+\frac{1}{n}\right)$(这里 n 是自然数),必含有 A 中点 x_n. 显然,$x_n\neq x_0$,并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 根据假设,$x_0\in A$,这与假设 $x_0\in A^c$ 冲突,所以(3)成立.

(3)⇒(1) 既然 A^c 是开集,因此 A^c 中任何一点 x_0,必存在环境$(\alpha,\ \beta)\subset A^c$,从而 x_0 不可能成为 A 的极限点. 证毕.

判断一个集 A 是不是闭集,序列的形式(2)和余集的形式(3)都是常用的. 现在利用(3)给出闭集的一些重要的性质.

定理 5 (1) 空集和全空间是闭集;

(2) 任意一族闭集的通集是闭集;

(3) 有限个闭集的和集是闭集.

由和通公式和定理 1 立即可以得到定理 5. 希望读者直接从闭集的定义并利用定理 3 来证明闭集的性质(1)～(3).

定理 5 的(3)中,"有限个"的条件不能改为无限个.

例 4 $(-1,\ 1)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right]$,其中每个 $A_n=\left[-1+\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right]$是闭集,而和集$(-1,\ 1)$就不是闭集.

利用定理 4 的(3)和开集的构造定理还可以得到:

定理 6　直线上闭集 F 必或是全直线或是从直线上挖去有限个或可列个互不相交的开区间.

如果 A 是闭集，那末称 A^c 的构成区间为 A 的余区间.

定理 7　开集减闭集是开集；闭集减开集是闭集.

证明　设 G 是开集，F 是闭集. 由于

$$G-F=G\cap F^c,\quad F-G=F\cap G^c,$$

从定理 1、4、5 易知本定理成立.

既开又闭集　直线上除了开集、闭集之外，还有很多(从势的观念来看，远比开、闭集多)既不开又不闭的集. 例如 $(a, b]$，$[0, 1]$ 上有理点全体，直线上无理数全体等都是既不开又不闭的集，此外，直线上 $\emptyset$、E^1 确是既开又闭的集，利用开集构造定理和闭集性质，读者可以证明，直线上除了 $\emptyset$、E^1 外不存在其它的既开又闭的集了.

闭包　给定一个直线上的点集 A，一般说来它对极限运算不能封闭. 下面将证明只要将它的极限点全体 A' 补充上去以后，就成为一个对极限运算封闭的集. 为此引入：

定义　设 A 是直线上一个点集，称集 $A\cup A'$ 是 A 的闭包，记为 $\overline{A}$.

例 5　A 是直线上有理点全体，显然 $\overline{A}$ 是全直线.

定理 8　设 A 是直线上的点集. 那末

(1)　$x\in\overline{A}$ 的充要条件是 x 的任何环境中必含有 A 中的点.

(2)　$x\in\overline{A}$ 的充要条件是存在 A 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

(3)　$\overline{A}$ 必是闭集，并且是包含 A 的最小闭集，即任一包含 A 的闭集 F 总有 $F\supset\overline{A}$；

(4)　A 是闭集的充要条件是 $A=\overline{A}$.

证明　(1)、(2)是显然的.

(3)　只要证明 $\overline{A}^c$ 是开集就可以了. 任取 $x_0\in\overline{A}^c$，显然 $x_0\overline{\in}\overline{A}$. 如果 x_0 不是 $\overline{A}^c$ 的内点，那末对 x_0 的任何环境 (α, β)，必含有 $\overline{A}$ 中点 x'. 因为 $\overline{A}=A\cup A'$，所以 $x'\in A$ 或 $x'\in A'$. 如果 $x'\in A'$. 那末对于 x' 的任何环境 $(\alpha', \beta')\subset(\alpha, \beta)$，必含有 A 中点 x''，显

然 $x'' \in (\alpha, \beta)$. 由此得到 x_0 的任何环境 (α, β) 中必含有 A 中非 x_0 的点, 从而 x_0 的任何环境 $O(x_0)$ 中也必含有 A 中非 x_0 的点, 所以 x_0 是 A 的极限点, 即 $x_0 \in A'$, 这与假设 $x_0 \in \overline{A}^c$ 相冲突. 因此, $\overline{A}^c$ 的每个点都是内点, 即 $\overline{A}^c$ 是开集, 从而 $\overline{A}$ 是闭集.

再证 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集: 设 F 是闭集, 并且 $F \supset A$, 因此 $F' \supset A'$. 但 $F' \subset F$, 所以 $F \supset A \cup A' = \overline{A}$.

(4) 充分性是显然的. 现证明必要性: 因为 A 是闭的, 所以 $A \supset A'$, 从而 $A \supset A \cup A' = \overline{A}$, 而 $A \subset \overline{A}$ 是显然的, 所以 $A = \overline{A}$. 证毕.

因为包含集 A 的最小闭集是唯一的, 所以集的闭包概念又可以定义为包含集 A 的最小闭集.

求一个集的闭包运算具有下列基本性质.

定理 9 (1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(2) $A \subset \overline{A}$;

(3) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

证明 (1)－(3) 是显然的. 今证 (4): 因为 $\overline{A \cup B} \supset A$, $\overline{A \cup B} \supset B$, 所以 $\overline{A \cup B} \supset \overline{A}$, $\overline{A \cup B} \supset \overline{B}$, 从而 $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$. 反之, 因为 $\overline{A} \cup \overline{B} \supset A$, $\overline{A} \cup \overline{B} \supset B$, 所以 $\overline{A} \cup \overline{B} \supset A \cup B$, 但 $\overline{A} \cup \overline{B}$ 是两个闭集的和集, 所以是闭集, 从而 $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$. 因此 (4) 证得

希望读者直接用序列的语言证明定理 9 的 (4).

4. 孤立集和完全集

设 A 是直线上点集, 经求导集的运算, 由 A 可以产生 A'. 如果要问 A 与 A' 有什么关系, 一般地说, 是很复杂的. 有可能 $A' = \emptyset$, 有可能 A' 虽不空, 但 $A' \cap A = \emptyset$, 也有可能发生 $A' \subset A$ 或 $A' \supset A$, 或 $A' = A$, 或者互不包含. 但比较重要的是下面几种情况.

当 $A' \cap A = \emptyset$ 时, 称 A 为孤立集;

当 $A \subset A'$ 时, 称 A 为自密集;

当 $A' \subset A$ 时, 这是已经讨论过的闭集;

当 $A' = A$ 时, 称 A 为完全集.

这一小节是讨论孤立集和完全集.

孤立集 设 A 是直线上点集，$x_0\in A$，如果存在 x_0 的一个环境 (α, β)，使得 (α, β) 中除含有 x_0 外不再含有 A 中其它点时，称 x_0 是 A 的孤立点.

例如，当 $A=[0, 1]\cup\{2\}$ 时，点 2 是 A 的孤立点。$[0, 1]$ 中点都是 A 的极限点.

显然，孤立点不是极限点，反之，对 A 中点 x_0，如果 x_0 是 A 的极限点，x_0 决不会是 A 的孤立点. 所以，孤立点和极限点是相对立的概念.

定理 10 A 是孤立集的充要条件是 A 中每一点都是 A 的孤立点.

证明 必要性 因为 $A'\cap A=\emptyset$，所以 A 中每个点 x_0 不属于 A'. 从而必存在 x_0 的某个环境 (α, β)，在 (α, β) 中再不含除 x_0 而外的 A 中的点，因而 x_0 是 A 的孤立点.

充分性 如果 A 中每个点都是 A 的孤立点，显然，A 中每个点就不可能是 A 的极限点，即 $A\cap A'=\emptyset$，从而 A 是孤立集. 证毕.

我们引入如下概念：设 (α, β)、(γ, δ) 是两个开区间，当 $\beta=\gamma$ 时，称 (α, β)、(γ, δ) 为相邻的区间.

已密集和完全集 显然，x_0 是集 A 的孤立点的充要条件是 x_0 必是包含在 A 的余集 A^c 中某两个相邻区间的公共端点. 如果 A 是已密集，那末 A 中每个点都是 A 的极限点，即 A 中每个点都不是 A 的孤立点. 因此，A 是已密集的充要条件是 A 中任何点都不可能成为包含在 A 的余集 A^c 中的某两个相邻区间的公共端点，或者说，A 是已密集的充要条件是 A^c 中不存在相邻接的区间. 利用这个事实，我们便得到如下定理.

定理 11 直线上集 A 是完全集的充要条件是 A 的余集 A^c 是任何两个构成区间都不相邻的开集.

证明 因为 A 是完全集（即 $A=A'$）的充要条件是 $A\subset A'$，$A\supset A'$ 同时成立，即既是已密又是闭的集. 用余集来表达时，就是 A^c

既是开集，又在 A^c 中决不包含两个相邻的区间．显然，一个开集中决不包含两个相邻的区间的充要条件是它的构成区间中任何两个不相邻．证毕．

显然，闭区间 $[a, b]$ $(b>a)$ 以及有限个长度不为 0（可以无限大）的互不相交的闭区间之和 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ $(b_i>a_i, i=1, \cdots, n)$ 等都是完全集．但这些例子是平凡的．现在要利用定理 11 给出一个不平凡的完全集的重要例子，在许多场合可用它来说明一些问题．

Cantor 集 将 $[0, 1]$ 三等分，挖去中间的开区间

$$I_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

将剩下的两个区间 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 分别三等分，并挖去

$$I_1^{(2)}=\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \quad I_2^{(2)}=\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

这时就剩下四个闭区间：

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

继而将这四个区间分别三等分，又挖去其中每一个的中间的开区间，……，如此手续一直做下去．



（Cantor 完全集构造示意图）

第 n 次手续时，去掉的开区间（称为第 n 级区间，每个区间长度为 $\frac{1}{3^n}$，计有 2^{n-1} 个）：

$$I_1^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right), \quad I_2^{(n)}=\left(\frac{7}{3^n}, \frac{8}{3^n}\right), \cdots,$$

$$I_{2^{n-1}}^{(n)}=\left(\frac{3^n-2}{3^n}, \frac{3^n-1}{3^n}\right).$$

记 $\mathcal{O}=\bigcup\limits_{n,k} I_k^{(n)}$，这是开集，所以 $K=[0,1]-\mathcal{O}$ 是闭集，称为 Cantor 集．K 的余区间全体是 $\{I_k^{(n)}\}$ $(k=1, 2, \cdots, 2^{n-1}, n=1, 2, \cdots)$ 以及 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, \infty)$（称这两个区间为第 0 级区间）．显然它们都两两不相邻（因为任何两个区间之间都插入了一个属于比它们级别高的区间），因此 K 是完全集．

Cantor 集有如下重要性质．

定理 12 (1) $K\subset[0,1]$，但 $[0,1]$ 中被挖去的区间长度之和 $\sum\limits_{n,k} m(I_k^{(n)})=1$（这里 $m(I_k^{(n)})$ 表示 $I_k^{(n)}$ 的长度）；

(2) K 是完全集，并且势是 $\aleph$．

证明 (1) 因为第 n 级每个区间长度为 $\frac{1}{3^n}$，但有 2^{n-1} 个所以被挖去的 n 级区间总长为 $\frac{2^{n-1}}{3^n}$，因而整个挖去的长度为

$$\sum_{n,k} m(I_k^{(n)})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1.$$

(2) 将 $[0,1]$ 中点用三进制表示，而

$I_1^{(1)}=(0.1, 0.2)$；

$I_1^{(2)}=(0.01, 0.02)$，$I_2^{(2)}=(0.21, 0.22)$；

……

$I_k^{(n)}=(0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1, 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}2)$，

其中 $k=1, 2, \cdots, 2^{n-1}$，a_1、…、a_{n-1} 等不是 0 便是 2，因此，被挖去的点的三进制展开中至少有一位是 1（三进制有理数无论采取有限位或无限位展开都是如此）．

如果记 A 是 $(0,1]$ 中的三进制无限位展开中每位仅取 0 或 2 的数全体，显然 $A\subset K\subset[0,1]$，所以如能证明 $(0,1]$ 和 A 的子集对等，根据 Bernstein 定理，K 的势便是 $\aleph$．为此，我们只要将 A 中的任何数（三进制展开）$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\cdots$（每个 a_i 仅取 0 或 2）和二进制数 $x'=0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\cdots\frac{a_n}{2}\cdots\cdots$ 对应，即作映射

$$\varphi:\ x=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{3^\nu}\mapsto x'=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{2}\cdot\frac{1}{2^\nu}$$

(这里(0, 1]的二进制有理数展开也取为无限位小数表示式). 易知 φ 就实现 A 到(0, 1]的双射. 证毕.

其实,我们可以更一般地证明任何非空完全集的势必为 $\aleph$, 这个事实的证明可参看[1], [2], [5]. 读者利用这个事实也可以很容易地直接证明: 如果 $x_0\in K$, 那末对 x_0 的任何环境 (α, β), $(\alpha, \beta)\cap K$ 的势也是 $\aleph$.

5. 稠密和疏朗

我们知道直线上点全体的势是 $\aleph$,而有理数全体的势是 $\aleph_0$, 可是直线上任何一点 x 的任何环境中都含有有理数, 从而任何一个实数都是有理数的极限点. 这就是说有理数集具有稠密性. 在讨论连续性时, 稠密性是一个重要的性质. 例如在 §2 例 24 中, 证明 $[a, b]$ 上连续函数全体势为 $\aleph$ 时, 就用到"一个连续函数完全由它在有理点的值而确定"的事实. 这就是说, 一个连续函数的整体, 由具有稠密性的部分点集上所确定. 一般地,我们引入如下定义.

定义 设 A、B 是直线上两个点集. 如果 B 中每个点的任何一个环境中必含有 A 的点, 那末称 A 关于 B 稠密. 特别, 当 B 是全直线时, 如果 A 在 B 中稠密, 就称 A 是稠密集.

例如 A 是[0, 1]上有理数全体, B 是[0, 1]或是[0, 1]上无理数全体, 那末 A 在 B 中稠密. 当 $B=(-\infty, \infty)$时, A 便不在 B 中稠密了. 这是因为对任何环境(α, β), 如果 $\alpha>1$, 它就不含有 A 中的点.

例 6 设 $B=[0, 1]\cup\{2\}$, A 是[0, 1]中有理数全体. 显然 A 不在 B 中稠密, 如果把 B 的孤立点 2 加到 A 上去, 显然集 $A_1=A\cup\{2\}$ 在 B 中就稠密了.

定理 13 设 A、B、C 是三个集.

(1) A 在 B 中稠密的充要条件是 $B\subset\overline{A}$;

(2) 如果 A 关于 B 稠密, B 关于 C 稠密, 那末 A 关于 C 也稠密.

证明 (1) 如果 A 关于 B 稠密, 根据定义易知 B 中每个点

或是在 A 中或是(如果不在 A 中) A 的极限点，从而 $B\subset A\cup A'=\overline{A}$. 反之，如果 $B\subset\overline{A}$，因为 $\overline{A}$ 中任何点(从而 B 中任何点)的每个环境中必含有 A 中的点(见定理8(3)的证明)，所以 A 关于 B 稠密.

(2) 根据假设，我们有 $B\subset\overline{A}$，$C\subset\overline{B}$. 从而 $C\subset\overline{B}\subset\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$，再由(1)知道 A 关于 C 也稠密. 证毕.

和稠密概念相对立的是疏朗.

定义 设 A 是直线上的点集. 如果 A 关于直线上的任何非空环境都不稠密，就称 A 是*疏朗集*或称为*无处稠密集*.

例如 E^1 上孤立集 A 必疏朗. 事实上，任取开区间 (α, β)，如果 (α, β) 中不含 A 中的点，就不需再讨论，如果 (α, β) 中含有 A 的某个点 x_0，由于 x_0 是孤立点，所以必存在 $\delta>0$，使得 $(x_0, x_0+\delta)\subset(\alpha, \beta)$，而 $(x_0, x_0+\delta)$ 中不再含有 A 中点. 因此，A 在 (α, β) 中不会稠密.

定理 14 设 A 是一个点集，下面几件事是等价的.

(1) A 是疏朗集.

(2) $\overline{A}$ 不包含任何一个非空环境.

(3) $\overline{A}$ 是疏朗集.

(4) $\overline{A}$ 的余集 $\overline{A}^c$ 是稠密集.

(5) 任何非空环境 (α, β) 中必有非空环境 $(\alpha', \beta')\subset(\alpha, \beta)$，使得 (α', β') 中不含 A 中的点.

证明 证明的路线是(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(1).

(1)⇒(2) 设 A 疏朗，自然 A 在任何非空环境 (α, β) 中不稠密. 根据定理 13 的(1)，从而 $\overline{A}$ 决不包含 (α, β).

(2)⇒(3) 设 $\overline{A}$ 不包含任何一个非空环境. 根据定理 13 的(1)，$\overline{A}$ 决不在任何非空环境 (α, β) 中稠密，从而 $\overline{A}$ 是疏朗的.

(3)⇒(4) 设 $\overline{A}^c$ 不是稠密集. 至少有一个非空环境 (α, β) 不包含有 $\overline{A}^c$ 中的点，从而 $\overline{A}\supset(\alpha, \beta)$，这就与 $\overline{A}$ 是疏朗的假设矛盾.

(4)⇒(5) 设 $\overline{A}^c$ 是稠密集，因而任何非空环境 (α, β) 中含有

$\overline{A}^c$ 的点. 因为 $\overline{A}^c$ 是开集,从而存在非空环境 $(\alpha', \beta')\cap\overline{A}=\emptyset$, 自然更有 $(\alpha', \beta')\cap A=\emptyset$.

(5)⇒(1) 设 A 具有性质(5),显然 A 就在任何非空环境 (α, β) 中不稠密,所以 A 是疏朗的. 证毕.

注意,对于定理中的(4)有如下的事实: A 为疏朗时, A^c 必是稠密. 这个结论是从疏朗和稠密的定义直接可知的. 但反之不真,即 A^c 是稠密时, A 不一定就是疏朗. 例如 A 是有理数全体, A^c 是无理数全体, A、A^c 均是稠密集. 所以作为充要条件来说,(4)中闭包这个条件不能疏忽.

由于 Cantor 集 K 是闭集,而 K 不包含任何一个开区间,由定理 14 的(2),可以得到 Cantor 集的另一个性质.

定理 15 Cantor 集是疏朗完全集.

6. 相对开、闭集

现在把开、闭集概念推广成相对开集、相对闭集的概念. 有时这是方便的.

定义 设 A、B 是直线上两个集,且 $A\subset B$. 如果 $x_0\in A$, 并且总存在一个 x_0 的环境 (α, β), 使得 $(\alpha, \beta)\cap B$ 中一切点都在 A 中,称 x_0 是 A **相对于 B 的内点**; 如果 A 中一切点都是相对于 B 的内点,称 A 是**相对于 B 的开集**; 如果 A 的极限点全体 A' 中凡是属于 B 的点(即 $A'\cap B$ 中的点)都在 A 中(即 $A'\cap B\subset A$),称 A 是**相对于 B 的闭集**.

例如,当 A 是开集(或闭集)时,那末 A 相对于一切集 $B(\supset A)$ 仍是开集(或闭集). 而任何一个集 A 相对于自身(即取 $B=A$)总是既是开的,又是闭的. 再如 $A=(0, 1)$, $B=(0, 1)\cup[2, 3]$, A 相对于 B 既是开的,又是闭的.

读者自然可以设想再引入相对闭包的概念,并推广定理 1–9 的结果到相对开、闭集的情况. 这里不拟一一举例证明,仅指出相对开、闭集与开、闭集的基本联系,通过这个联系也易于将定理 1–9 加以推广并得到相应的结论.

定理 16 集 A 相对于集 B 为闭集(或开集)的充要条件是存

在闭集 F(或开集 G)使得 $A=B\cap F$(或 $A=B\cap G$).

证明　(1) 先讨论相对闭的情况：设 A 相对于 B 是闭的，因此 $A'\cap B\subset A$，从而 $(A'\cup A)\cap B\subset A$，即 $\overline{A}\cap B\subset A$. 另一方面，显然有 $\overline{A}\cap B\supset A$，所以 $\overline{A}\cap B=A$. 因此只要取 $F=\overline{A}$ 就可以了.

反之，如果 $A=B\cap F$，F 是闭集. 由于 $A'\subset B'\cap F'$，所以

$$A'\cap B\subset B'\cap F'\cap B\subset F\cap B=A,$$

即 A 相对于 B 是闭集.

(2) 再讨论相对开的情况：容易直接证明(希读者补证)A 相对于 B 开的充要条件是 $B-A$(即 $A^c\cap B$)相对于 B 是闭的.

根据第一步的结论，$B-A$ 相对于 B 闭的充要条件是存在闭集 F，

$$B-A=B\cap F, \tag{4.3}$$

从而由和通公式得

$$A=B-(B-A)=B-F=B\cap F^c. \tag{4.4}$$

记 $G=F^c$，G 是开集. 证毕.

7. 点集上的连续函数

现在我们把数学分析中区间 $\langle a,\ b\rangle$ 上连续函数推广到一般点集上.

定义　设 A 是直线上的一个集，f 是定义在 A 上的函数，如果对每个 $x\in A$，$f(x)$ 是有限值，称 f 是 A 上**有限函数**. 如果数集 $f(A)$ 是有界集，称 f 是 A 上**有界函数**.

定义　设 A 是直线上一个集，f 是定义在 A 上的有限函数. 又设 $x_0\in A$，如果对任何 $\varepsilon>0$，必存在一个 $\delta>0$，当 $|x'-x|<\delta$，并且 $x'\in A$ 时，就有

$$|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon, \tag{4.5}$$

称 f **在 x_0 点连续**，或称 x_0 是 f 的一个**连续点**. 如果 A 中每个点都是 f 的连续点，称 f 是 A 上**连续函数**.

显然，当 A 是区间 $\langle a,\ b\rangle$ 时，上述定义和数学分析中一致. 另外，如果 x_0 是 A 的孤立点，那末 A 上任何函数 f 必在 x_0 连续.

和数学分析中一样，这是连续点的 $\varepsilon-\delta$ 表达方式，当然还有

序列的表达方式. 此外我们还要给出连续函数的另一种重要表达方式.

定理 17 设 A 是任一点集, f 是 A 上的有限实函数. 下面几件事是等价的.

(1) f 是 A 上的连续函数.

(2) 对任何 $x\in A$, 以及一切由 A 中元素所构成的收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x).$$

(3) 对任何闭集 F, F 的原象 $f^{-1}(F)$ 是相对于 A 的闭集.

(4) 对任何开集 G, G 的原象 $f^{-1}(G)$ 是相对于 A 的开集.

证明 我们证明的路线是(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1).

(1)⇒(2) 设 f 是 A 上的连续函数, 因而一切点 $x\in A$ 都是连续点, 如果 $\{x_n\}\subset A$[注], 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, 从 x 是连续点的定义知必有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$.

(2)⇒(3) 显然, 只要证明: 对任何闭集 F, $f^{-1}(F)$ 的极限点 x 如果在 A 中, 必在 $f^{-1}(F)$ 自身中. 由于 x 是 $f^{-1}(F)$ 的极限点, 所以存在 $x_n\in f^{-1}(F)$ $(n=1, 2, \cdots$, 它们与 x 是否相同均可), 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, 由于性质(2), 所以

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x).$$

然而 $f(x_n)\in F$, 由定理 4 的(2), 知道 $f(x)\in F$. 从而 $x\in f^{-1}(F)$.

(3)⇒(4) 设 G 是任何开集, 因而 G^c 是闭集. 由于

$$A=f^{-1}(G)\cup f^{-1}(G^c),$$

根据性质(3), $f^{-1}(G^c)$ 是相对于 A 的闭集, 因而 $A-f^{-1}(G^c)=f^{-1}(G)$ 是相对于 A 的开集(参见定理 16 证明中的(2)).

(4)⇒(1) 设 x_0 是 A 中任何一点. 今证 x_0 必是 f 的连续

[注] $\{x_n\}\subset A$ 表示点列 $\{x_n\}$ 中的点 x_n $(n=1, 2, \cdots)$ 都取自于集 A 中的, 本书中以后常用这个记号.

点：对任何 $\varepsilon>0$，取 $f(x_0)$ 的环境 $G=(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$，根据(4)，$f^{-1}(G)$ 是相对于 A 的开集．因为 $x_0\in f^{-1}(G)$，所以存在 x_0 的一个环境 (α, β)，使得 $(\alpha, \beta)\cap A\subset f^{-1}(G)$．因而存在 $\delta>0$，使得 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset(\alpha, \beta)$，从而 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A\subset f^{-1}(G)$．这就是说，对任何 $x'\in A$，并且 $|x'-x_0|<\delta$ 时，必有

$$|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 x_0 是 f 的连续点．证毕．

利用开、闭集原象的开、闭性表达连续函数的方式，很容易得到两个连续函数的复合函数必是连续的（建议读者严格表述并证明这一点）．这种表达方式便于把连续函数的概念推广到一般的拓扑空间上．

8．连续函数的延拓

定义在点集 A 上的连续函数 f 是否能延拓成直线上的连续函数？显然，一般说来是不能的．例如 $(0, 1)$ 上函数 $\sin\frac{1}{x}$，易知是不可能保持连续性地延拓到全直线的．但有下面结果．

定理 18 定义在直线上的闭集 F 上的连续函数 f 必可延拓成全直线上的连续函数．

证明 我们不妨假设 f 是实函数，显然，关键是在于如何在开集 F^c 上补充定义．为此，令 $F^c=\bigcup\limits_{\nu=1}^{k}(a_\nu, b_\nu)$ $(k\leqslant\infty)$ 是 F^c 的构成区间分解（见定理 2）．作全直线上函数

$$g(x)=\begin{cases} f(a_\nu), & \text{如果 } x\in(a_\nu, b_\nu) \text{ 而且 } b_\nu=\infty, \\ f(b_\nu), & \text{如果 } x\in(a_\nu, b_\nu) \text{ 而且 } a_\nu=-\infty, \\ \dfrac{b_\nu-x}{b_\nu-a_\nu}f(a_\nu)+\dfrac{x-a_\nu}{b_\nu-a_\nu}f(b_\nu), & \\ \qquad \text{如果 } x\in(a_\nu, b_\nu), \ (\nu=1, 2, \cdots, k), & \\ f(x), & \text{如果 } x\in F. \end{cases} \tag{4.6}$$

显然，g 是 f 的延拓．下面分两步来证明 $(-\infty, \infty)$ 上每个点都是 g 的连续点．

(1) 设 $x_0\in F^c$．因而必有某个 ν，使得 $x_0\in(a_\nu, b_\nu)$，因为 g

在(a_ν, b_ν)上是线性函数，所以x_0是g的连续点.

(2) 设$x_0\in F$. 我们先证明g在x_0点是右连续的:

(i) 如果存在$\delta>0$，使得$(x_0, x_0+\delta)\cap F=\emptyset$，那末$x_0$必是$F^c$的某构成区间$(a_\nu, b_\nu)$ $(a_\nu=x_0)$的左端点，由于g在(x_0, b_ν)上线性连接两端$(x_0, f(x_0))$、$(b_\nu, f(b_\nu))$，所以g在x_0是右方连续的. (ii)假设对任何$\delta>0$，$(x_0, x_0+\delta)\cap F\neq\emptyset$，由于$x_0$是$f$的连续点，所以对$\varepsilon>0$，必存在$\delta>0$，当$x'\in(x_0, x_0+\delta)\cap F$时，

$$|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{4.7}$$

因为不是(i)的情况，所以不妨设$x_0+\delta\in F$，而对于$(x_0, x_0+\delta)\cap F^c$中任何一点$x'$(假如有的话)，必存在$F^c$的构成区间$(a_\nu, b_\nu)$，使得$x'\in(a_\nu, b_\nu)\cap(x_0, x_0+\delta)$. 因为$(a_\nu, b_\nu)\subset(x_0, x_0+\delta)$，由(4.7)得到

$$|f(a_\nu)-f(x_0)|<\varepsilon, \quad |f(b_\nu)-f(x_0)|<\varepsilon. \tag{4.8}$$

由(4.8)得到

$$|f(x')-f(x_0)|\leqslant|f(a_\nu)-f(x_0)|\frac{b_\nu-x'}{b_\nu-a_\nu}+|f(b_\nu)-f(x_0)|\frac{x'-a_\nu}{b_\nu-a_\nu}<\varepsilon.$$

由(i)，(ii)得到g在x_0是右连续的.

同样可证g在x_0也是左连续的，即x_0是g的连续点.

对于复函数f，总可将f分解成实部、虚部，把它们分别加以延拓就可以了. 证毕.

习 题

1. 设A是一个集，A的内点全体记为$K(A)$(称为A的核). 证明$K(A)$必是开集.

2. 证明任何一个集A的导集A'必是闭集.

3. 设A_1、…、A_n是有限个集，证明

$$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)'=A_1'\cup A_2'\cup\cdots\cup A_n',$$

并举例说明对于一列集$\{A_n\}$，上面等式不成立.

4. 证明直线上孤立集必是有限集或可列集.

5. 设 A 是一个集，x_0 是一个点，如果 x_0 的任何环境中都既含有 A 中点又含有 A^c 中点，就称 x_0 是 A 的境界点，A 的境界点全体记为 $\Gamma(A)$（称为 A 的境界）．证明 $\Gamma(A)$ 是闭集，并且 $\Gamma(A)=\overline{A}\cap\overline{A^c}$．

6. 设 A 是 $[0, 1]$ 中有理数全体，求出 $\Gamma(A)$．

7. 设 A 是一个集，对任何 $\varepsilon>0$，记 $O(A, \varepsilon)=\{x|\inf\limits_{x'\in A}\rho(x, x')<\varepsilon\}$，这里 $\rho(x, x')=|x-x'|$（称 $\inf\limits_{x'\in A}\rho(x, x')$ 为点 x 到集 A 的距离）．证明 $O(A, \varepsilon)$ 是开集．

8. (1) 设 F 是闭集，证明 F 必可表示成可列个开集的通．

(2) 设 G 是开集，证明 G 可表示成可列个闭集的和．

9. 证明直线上开集全体的势是 $\aleph$（从而直线上闭集全体的势也是 $\aleph$）．

10. 证明直线上一切构成区间的端点都是有理数的开集全体的势是 $\aleph$．

11. 把 $[0, 1]$ 中数用十进制小数展开，十进制有理数规定展开成有限位小数，但以 6 为小数尾数的有限小数规定取无限循环小数展开．证明这时展开中一切不用 6 的全体是完全集．

12. 对任何 $\varepsilon>0$，作 $[0, 1]$ 上一个疏朗集 M，使得开集 $M^c\cap(0, 1)$ 的构成区间总长度小于 ε．

13. 设 A 是直线上的有界闭集，$\{G_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是一族开集，并且覆盖 A，即 $A\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$．证明必可从 $\{G_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 中选出有限个开集 G_1、…、G_n，使得 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i$（即选出有限个开集覆盖 A）．

14. (Lindelöf 覆盖定理)　设 A 是直线上一个集，$\{G_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是一族开集，并且覆盖 A，证明必存在最多可列个开集 $\{G_n, n=1, 2, \cdots, k, k\leqslant\infty\}$，使得 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}G_i$．

15. 证明任一非空完全集的势是 $\aleph$．

16. 证明直线上任何一个不可列集 A，必有一点 x，使得它的任何环境中必含有 A 中不可列个点．并且这种点 x 可以在 A 中取到．

17. 证明：如果集 A 的导集 A' 是有限集或可列集，A 必是可列集．

18. 证明：如果 F 是直线上的闭集，当它的势不是有限或可列时，必为 $\aleph$．

19. 设 f 是集 A 上的有限实函数，证明 f 在 x_0 连续的充要条件是对 $f(x_0)$ 的任何环境 $O(f(x_0))$，必存在 x_0 的环境 $O(x_0)$，使得 $f(O(x_0))\subset O(f(x_0))$．

20. 设 A、B 是两个集．令 $d=\inf\limits_{x\in A, y\in B}\rho(x, y)$，称 d 为集 A、B 的距离，

这里 $\rho(x, y)=|x-y|$. 证明，当 $d>0$ 时，函数

$$g(x)=\frac{\rho(x, B)(1+\rho(x, A))}{\rho(x, B)+\rho(x, A)}$$

是在 A 上取值为 1, B 上取值为 0，而且在全空间（即全直线）上连续的函数.

21. 设 A、B 是直线上两个闭集，并且 A 是有界集，d 为 A、B 的距离（见习题 20）. 证明必存在 $x_0\in A$, $y_0\in B$，使得

$$|x_0-y_0|=d.$$

并举例说明，当 A、B 都是无界集时，上述结论不对.

22. 直线上无理点全体不能表示成可列个闭集的和.

§5 单调函数、有界变差函数及黎曼-斯蒂阶积分

这一节中，一方面介绍重要的两类函数，即单调函数和有界变差函数，同时也为第二章建立新积分作准备.

1. 黎曼积分的回顾

黎曼积分是读者熟悉的重要分析工具之一. 下面以区间 $[a, b]$ 上有限实函数 f 的黎曼积分为例来作一回顾.

定义 设 f 是 $[a, b]$ 上有限实函数，任取 $[a, b]$ 上一分点组

$$D: \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

作和式

$$S(f; x_0, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}), \tag{5.1}$$

其中 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$. 记 $\lambda=\max\limits_{i}(x_i-x_{i-1})$. 如果存在数 S，使得

$$\lim_{\lambda\to 0} S(f; x_0, \cdots, x_n)=S, \tag{5.2}$$

称 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积，记 S 为 $\int_a^b f(x)dx$（或简写成 $\int_a^b fdx$），并称 $\int_a^b fdx$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的黎曼积分.

利用黎曼积分工具可以计算，例如几何形体的面积、体积、物理学上的功、能量、物体的重心和转动惯量（更一般的是矩）等等，这是熟知的.

如果物质是非均匀的，例如物质质量、电荷的电量等在空间某

个范围内分布是非均匀的，但只要这些量在空间中每点 x 的密度存在，而且密度函数 $\rho(x)$ 黎曼可积(例如 $\rho(x)$ 连续)，这种场合的计算仍可用黎曼积分为工具．例如以 $[a, b]$ 区间为例，那就是用下面的黎曼积分：

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx. \tag{5.3}$$

如果物质的质量或电荷的电量是非均匀的，而且没有密度函数．例如物体的总质量、或总电荷量全部集中在 $[a, b]$ 的某一点 x_0 上．要讲密度，这时 $\rho(x_0)$ 便是无限大，而其余的点 $\rho(x)=0$．显然不能仅仅因为只有一个点 x_0 的 $\rho(x_0)\neq 0$ 而随便忽略掉．如用(5.3)计算，必然就得出和实际情况不符合的错误结论．由此可见对复杂的分布，黎曼积分就不行了．应当直接计算下面这种类型的和式的极限：

$$S(f; x_0, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta M_i, \tag{5.4}$$

其中 ΔM_i 表示 $(x_{i-1}, x_i]$ 上或是物质的质量或是电荷量之类的量．

和式(5.4)中的 ΔM_i 完全相当于(5.1)中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$．如果说 Δx_i 是区间 $[a, x_i]$ 与 $[a, x_{i-1}]$ 的长度之差，那末 ΔM_i 就是 $[a, x_i]$ 与 $[a, x_{i-1}]$ 上或物质质量或电荷量的差．从数学上看，$[a, x]$ 上总质量或电荷量就是一个 $[a, b]$ 上单调增加函数 $g(x)$．因此，在数学上有必要推广黎曼积分而考虑下面的和式极限(一种积分)

$$S(f, g; x_0, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})).$$

如果再考虑到，例如 $[a, b]$ 上分布的电荷既有正，又有负的情况，那就意味着还应该考虑 g 是 $[a, b]$ 上这样形式的函数：$g(x)=g_+(x)-g_-(x)$，$g_+(x)$、$g_-(x)$ 分别是代表 $[a, b]$ 中正电荷、负电荷的总电荷量(都算绝对值的记法)，即还应考虑 $g(x)$ 是两个单调增加函数之差的形式的函数，从而 $g(x)$ 不再单纯是单调函数了．这就导致了一般的黎曼-斯蒂阶(Riemann-Stieltjes)积分．

下面我们先对单调增加函数以及能写成两个单调增加函数之差的函数的性质和结构做一些讨论．

2. 单调函数

设 g 是区间 $\langle a, b\rangle (a\neq b)$ 上有限实函数，如果 $x, x'\in\langle a, b\rangle$，当 $x'>x$ 时，

$$g(x')\geqslant g(x) \quad (\text{或 } g(x')\leqslant g(x)) \tag{5.5}$$

称 g 是 $\langle a, b\rangle$ 上*单调增加函数*(或*单调下降函数*)。如果 (5.5) 中严格的不等式成立，就称 g 是*严格单调增加函数*(或*严格单调下降函数*)。

单调增加函数和单调下降函数统称为*单调函数*。

设 g 是 $\langle a, b\rangle$ 上有限函数，如果 x_0 是 g 的第一类不连续点，分别称

$$g(x_0+0)-g(x_0), \quad g(x_0)-g(x_0-0)$$

是 g 在 x_0 点的*右方跃度*、*左方跃度*。有时为了方便，把 g 的连续点 x 看成是左方跃度和右方跃度均为零的点。当 g 是单调函数时，又称 $g(x_0+0)-g(x_0-0)$ 为 g 在 x_0 点的*跃度*(自然，对于端点 a、b，如果 g 有定义，并且发生不连续时，只有一方的跃度可谈)。

例如，$\theta(x)$ 是 Heaviside 函数：

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时},\end{cases} \tag{5.6}$$

由它又可产生 $(-\infty, \infty)$ 上的三个函数：

$$\theta_1(x)=-\theta(-x)+1=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$$

$$\theta(x)-1=\begin{cases}0, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时},\end{cases}$$

$$\theta_1(x)-1=\begin{cases}0, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

显然，(i) $\theta(x)$、$\theta_1(x)$、$\theta(x)-1$、$\theta_1(x)-1$ 都是 $(-\infty, \infty)$ 上单调增加函数，而且它们唯一的不连续点是 $x=0$；(ii) $\theta(x)$、$\theta(x)-1$ 在 $x=0$ 处右方跃度为 1，左方跃度为 0，而 $\theta_1(x)$、$\theta_1(x)-1$ 在 $x=0$ 处左方跃度为 1，右方跃度为 0；(iii) $\theta(x)$、$\theta_1(x)$ 在 $(-\infty, 0)$

上为 0，而 $\theta(x)-1$，$\theta_1(x)-1$ 在 $(0,\infty)$ 上为 0.

上面四个函数是描述一般函数 g(特别是单调函数和有界变差函数)的第一类不连续点的一些基本的函数，下面我们将会看到这一点．用它们可以反映例如是物质总质量为 1 或总电荷量为 1，但都集中在一点的情况．

单调增加函数有下面一些常用的性质．

定理 1　设 g 是 $(-\infty,\infty)$ 上单调增加函数．下列命题成立：

(1) 当 $g(x)$ 单调下降时，$g(-x)$、$-g(x)$ 都是单调增加函数．

(2) g 的不连续点都是第一类的，并且最多只有可列个[注]．

(3) 设 g 单调增加，令 $\{y_n\}$ 是 g 在 (α,β) 中不连续点全体，那末级数

$$\begin{aligned} g_+(\{y_n\}) &= \sum_n (g(y_n+0)-g(y_n)), \\ g_-(\{y_n\}) &= \sum_n (g(y_n)-g(y_n-0)) \end{aligned} \tag{5.7}$$

收敛，并且

$$\begin{aligned} g_+(\{y_n\})+g_-(\{y_n\}) &= \sum_n (g(y_n+0)-g(y_n-0)) \\ &\leqslant g(\beta-0)-g(\alpha+0). \end{aligned} \tag{5.8}$$

(4) 设 g 单调增加的，$\{x_n\}$ 是 g 的不连续点全体，函数项级数

$$\begin{aligned} g_+(x) &= \sum_{x_n>0} [(g(x_n+0)-g(x_n))\theta(x-x_n) \\ &\quad + (g(x_n)-g(x_n-0))\theta_1(x-x_n)], \\ g_-(x) &= \sum_{x_n<0} [(g(x_n+0)-g(x_n))(\theta(x-x_n)-1) \\ &\quad + (g(x_n)-g(x_n-0))(\theta_1(x-x_n)-1)] \end{aligned} \tag{5.9}$$

在任何 $[\alpha,\beta]$ 上绝对一致收敛，从而在 $(-\infty,\infty)$ 上收敛．

(5) 函数 $g_d(x)=g_+(x)-g_-(x)$ 的不连续点全体就是 $\{x_n\}$，$g_d(x)$ 在 x_n 与 $g(x)$ 有相同的左、右跃度，并且对任何 $[\alpha,\beta]$，

$$\begin{aligned} g_d(\beta)-g_d(\alpha) &= (g(\alpha+0)-g(\alpha))+(g(\beta)-g(\beta-0)) \\ &\quad + \sum_{x_n\in(\alpha,\beta)} (g(x_n+0)-g(x_n-0)). \end{aligned} \tag{5.10}$$

[注]　其实有更一般的结果：$[a,b]$ 上任何有限函数 f，它的第一类不连续点全体最多是可列集．

(6) 函数 $g_c(x)=g(x)-g_d(x)$ 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上连续的单调增加函数.

(7) 如果存在两个单调增加函数 $g_{c'}(x)$, $g_{d'}(x)$, 使得 $g(x)=g_{c'}(x)+g_{d'}(x)$, 其中 $g_{d'}(x)$ 也满足(5.10), $g_{c'}(x)$ 是连续的, 那末必有常数 a, 使 $g_{d'}(x)=g_d(x)+a$, $g_{c'}(x)=g_c(x)-a$.

(8) g 在任何区间 $[\alpha,\ \beta]$ 上黎曼可积.

在证明定理 1 之前, 先对(3)～(7)作些说明, 这不仅对理解定理本身和把握它的证明, 而且对今后的应用都是有益的. (5.7)中 $g_+(\{y_n\})$、$g_-(\{y_n\})$ 分别是有限区间 $(\alpha,\ \beta)$ 中所有不连续点右方跃度、左方跃度的总和. (5.8)表明这些跃度总和不超过 $g(\beta-0)-g(\alpha+0)$. 由(5.9)所定义的 $g_d(x)$ 实际上是专门"记录" $g(x)$ 跳跃情况的"记录函数". (5.10)表明由这个"记录函数"决定的差 $g_d(\beta)-g_d(\alpha)$ 是记录了 $g(x)$ 在 $(\alpha,\ \beta)$ 中所有的跃度, 而(5.10)的右边第一、二项分别记录了左端点 α 的右方跃度, 右端点 β 的左方跃度. 其实(5.9)中的一般项 $d_n(x)=[(g(x_n+0)-g(x_n))\overline{\theta}(x-x_n)+(g(x_n)-g(x_n-0))\overline{\theta}_1(x-x_n)]$ ($\overline{\theta}(x-x_n)$ 或为 $\theta(x-x_n)$ 或为 $\theta(x-x_n)-1$, $\overline{\theta}_1(x-x_n)$ 或为 $\theta_1(x-x_n)$ 或为 $\theta_1(x-x_n)-1$) 只是记录一点 x_n 处情况的函数. 而(6)中的分解 $g(x)=g_c(x)+g_d(x)$ 表明 g 之所以单调增加, 除了来源于不连续点的跳跃, 即函数 $g_d(x)$ 的贡献外, 还来源于单调增加连续函数 $g_c(x)$ 的贡献. (7)表明除去常数之别外, $g(x)=g_c(x)+g_d(x)$ 是唯一的. (1)～(8)是单调函数的连续性和可积性, 而单调函数的可微性将放在第三章§5加以介绍.

定理 1 的证明 (1) 是显然的. 由此可见今后只要讨论单调增加函数.

(2) 显然, 只要证明对任何自然数 n, $[-n,\ n]$ 中只含有可列个不连续点就可以了.

设 A_n 是 $(-n,\ n)$ 中不连续点全体, 在 A_n 中任取有限个点 x_1, $\cdots$, x_k, 不妨设为 $-n<x_1<x_2<\cdots<x_n<n$. 在 $(x_i,\ x_{i+1})$ 中任取一点 x_i' $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$, 再任取 x_0', x_n' 适合 $-n<x_0'<x_1$, $x_n<$

$x'_n<n$. 显然

$$\sum_i(g(x_i+0)-g(x_i-0))\leqslant\sum_{j=0}^{n-1}(g(x'_{j+1})-g(x'_j))$$
$$\leqslant g(n-0)-g(-n+0),\quad(5.11)$$

但 $g(n-0)-g(-n+0)$ 是固定常数，由§2习题15可知 A_n 是可列集.

(3) 将(2)中 $[-n, n]$ 换为 $[\alpha, \beta]$，就知道对任何自然数 k，

$$\sum_{n=1}^{k}(g(y_n+0)-g(y_n-0))\leqslant g(\beta-0)-g(\alpha+0).\quad(5.12)$$

再令 $k\to\infty$，就得到(5.8).

(4) 显然只要证明级数(5.9)在任何 $[-n, n]$ (n 是自然数)一致收敛就可以了. 而当 x 只在 $[-n, n]$ 上变动时，显然

$$g_+(x)=\sum_{x_i\geqslant 0}[(g(x_i+0)-g(x_i))\theta(x-x_i)$$
$$+(g(x_i)-g(x_i-0))\theta_1(x-x_i)]$$
$$=\sum_{x_i\in[0,n]}[(g(x_i+0)-g(x_i))\theta(x-x_i)$$
$$+(g(x_i)-g(x_i-0))\theta_1(x-x_i)].\quad(5.13)$$

因为 $\sum\limits_{x_i\in[0,n]}(g(x_i+0)-g(x_i-0))<\infty$，$|\theta(x-x_i)|\leqslant 1$，$|\theta_1(x-x_i)|\leqslant 1$，所以上式是 $[-n, n]$ 上绝对一致收敛的函数项级数，同样可证，(5.9)中第二个级数也在 $[-n, n]$ 上绝对一致收敛.

(5) 利用级数(5.9)直接计算 $g_d(\beta)-g_d(\alpha)$ 的值不难验证(5.10)成立. 剩下的只要证明 $g_+(x)$ ($g_-(x)$)的不连续点全体是 $\{x_i\}\cap[0, \infty)$ ($\{x_i\}\cap(-\infty, 0)$)就可以了. 为此，我们只要证明 $g_+(x)$ 在 $[0, n]$ 上不连续点全体是 $\{x_i\}\cap[0, n]$. ($g_-(x)$ 可以相仿证得.)事实上，令 $\{y_i\}$ 是 $\{x_i\}\cap[0, n]$ 全体，由(5.13)可知，$g_+(x)$ 作为 $[0, n]$ 上函数

$$g_+(x)=\sum_{x_i\in[0,n]}[(g(x_i+0)-g(x_i))\theta(x-x_i)$$
$$+(g(x_i)-g(x_i-0))\theta_1(x-x_i)]$$
$$=\sum_i d_i(x),$$

$$d_i(x)=(g(y_i+0)-g(y_i))\theta(x-y_i)$$
$$+(g(y_i)-g(y_i-0))\theta_1(x-y_i). \qquad (5.14)$$

当 $x\neq y_i$ 时，x 是 $d_i(x)$ 的连续点，因而当 $x\neq y_i(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 时，x 是每个 $d_i(x)$ 的连续点．利用数学分析中下列定理：如果函数项级数 $\sum_i f_i(x)$ 一致收敛，并且 x_0 是每个 $f_i(x)$ 的连续点，那末 x_0 必是 $f(x)=\sum_i f_i(x)$ 的连续点．由于(3)，$\sum_i d_i(x)$ 在 $[0,\ n]$ 上一致收敛，所以当 $x\neq y_i(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 时，x 必是 $g_+(x)$ 的连续点．同样，函数

$$g_+(x)-d_j(x)=\sum_i{}' d_i(x) \qquad (5.15)$$

(其中 $\sum_i{}'$ 表示去掉第 j 行后求和)在 $x=y_j$ 连续．但 $d_j(x)$ 在 y_j 是不连续的，因而 $g_+(x)$ 也必在 y_j 不连续，并且与 $d_j(x)$ 在 y_j 点有相同的左、右跃度．由此可知，$g_+(x)$ 在 $[0,\ n]$ 中不连续点全体就是 $\{x_i\}\cap[0,\ n]$．

(6) 由(5)易知 $g_c(x)=g(x)-g_d(x)$ 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上连续函数，所以只要证明 $g_c(x)$ 是单调增加的就可以了．事实上，对任何 $\alpha<\beta$，由(5.10)、(5.8)立即得到

$$g_d(\beta)-g_d(\alpha)\leqslant(g(\beta-0)-g(\alpha+0))+(g(\alpha+0)$$
$$-g(\alpha))+(g(\beta)-g(\beta-0))$$
$$=g(\beta)-g(\alpha), \qquad (5.16)$$

即 $g_c(\alpha)\leqslant g_c(\beta)$．

(7) 对任何 $x>0$，由(5.10)，

$$g_{d'}(x)-g_{d'}(0)=\sum_{x_n\in(0,x)}(g(x_n+0)-g(x_n-0))$$
$$+g(x)-g(x-0)$$
$$=g_d(x)-g_d(0).$$

由此可知 $g_{d'}(x)=g_d(x)+c$，其中 $c=g_{d'}(0)-g_d(0)$．同样可以证明，对任何 $x<0$，

$$g_{d'}(0)-g_{d'}(x)=g_d(0)-g_d(x),$$

即 $g_{d'}(x)=g_d(x)+c$ 对一切 $x\in(-\infty,\ \infty)$ 成立．从而

$$g_{c'}(x)=g(x)-g_{d'}(x)=g_0(x)-c,\quad x\in(-\infty,\infty).$$

(8) 由于在(5.14)式中，$d_i(x)$在$[0, n]$上黎曼可积，并且在$[0, n]$上

$$g_+(x)=\sum_i d_i(x).$$

而$\sum\limits_i d_i(x)$是一致收敛的，所以$g_+(x)$在$[0, n]$ $(n=1, 2, \cdots)$上也是黎曼可积的．同样可以证明$g_-(x)$在任何$[-n, 0]$ $(n=1,2,\cdots)$上黎曼可积．由此可知，$g_d(x)$在任何$[\alpha, \beta]$上黎曼可积．又由于$g_0(x)$在任何$[\alpha, \beta]$中黎曼可积，因此$g=g_c+g_d$在任何$[\alpha, \beta]$上黎曼可积．证毕．

3．有界变差函数

我们只着重讨论有限闭区间$[a, b]$上的有界变差函数，它在无限区间的推广将作为练习．有界变差函数是由于讨论曲线长度和曲线积分引起的．

定义　设f是$[a, b]$上有限实函数，在$[a, b]$上任取一个分点组

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

作和式
$$\bigvee(f;x_0,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|,$$

称它是f对于分点组$x_0, \cdots, x_n$的变差．如果存在常数M，使得

$$\sup_{x_0,\cdots,x_n}\bigvee(f;x_0,\cdots,x_n)\leqslant M<\infty,\tag{5.17}$$

就称f是$[a, b]$上的有界变差函数．记

$$\bigvee_a^b(f)=\sup_{x_0,\cdots,x_n}\bigvee(f;x_0,\cdots,x_n),\tag{5.18}$$

称$\bigvee\limits_a^b(f)$是f在$[a, b]$上的全变差．对任何$x\in[a, b]$，称$\bigvee\limits_a^x(f)$[注]是f的全变差函数．

$[a, b]$上有界变差函数全体记为$V[a, b]$．

例 1　如果f在$[a, b]$上满足 Lipschitz 条件，即存在常数

[注]　规定$\bigvee\limits_b^b(f)=0$．

M，使得对任何 x、$x'\in[a, b]$，有

$$|f(x)-f(x')|\leqslant M|x-x'|,$$

那末 f 必是有界变差函数．事实上，因为

$$\bigvee(f; x_0, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|=M(b-a),$$

所以 $\bigvee\limits_a^b(f)\leqslant M(b-a)$.

例 2 连续函数不一定是有界变差函数．例如

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

是 $[0, 1]$ 上连续函数．但如果取分点

$$x_n=\frac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}, \quad n=0, 1, 2, \cdots, m,$$

那末

$$\bigvee(f; 0, x_m, x_{m-1}, \cdots, x_1, 1)$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{m}\left|x_i\sin\frac{1}{x_i}-x_{i-1}\sin\frac{1}{x_{i-1}}\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i}.$$

由于当 $m\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{i=1}^{m-1}\dfrac{1}{i}\to\infty$，所以 f 不是 $[0, 1]$ 上有界变差函数．

例 3 $[a, b]$ 上单调函数 g 必是有界变差函数，而且有 $\bigvee\limits_a^b(g)=|g(b)-g(a)|$．事实上，当 g 单调增加时，

$$\bigvee(g; x_0, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(g(x_i)-g(x_{i-1}))$$
$$=g(b)-g(a).$$

一切分点组的变差都是 $g(b)-g(a)$，从而 $\bigvee_a^b(g)=g(b)-g(a)$. 同样，当 g 单调下降时，$\bigvee_a^b(g)=g(a)-g(b)$.

有界变差函数具有下面的简单性质.

定理 2　(1) 如果 $f\in V[a, b]$，那末 f 必为有界函数.

(2) 如果 $f\in V[a, b]$，那末 $\bigvee_a^b(f)=0$ 的充要条件是 f 为常数.

(3) 如果 $f, g\in V[a, b]$，那末对任何两个常数 α、β，$\alpha f+\beta g\in V[a, b]$，且

$$\bigvee_a^b(f+g)\leqslant\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g), \tag{5.19}$$

$$\bigvee_a^b(\alpha f)\leqslant|\alpha|\bigvee_a^b(f). \tag{5.20}$$

(4) 如果 $f, g\in V[a, b]$，那末 $fg\in V[a, b]$.

(5) 如果 $[c, d]\subset[a, b]$，那末 $V[a, b]\subset V[c, d]$.

(6) 设 $\{f_n\}\subset V[a, b]$，并且 $\sup\limits_n\bigvee_a^b(f_n)<\infty$，如果 $\{f_n\}$ 处处收敛于 f，那末 $f\in V[a, b]$，并且

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\sup_n\bigvee_a^b(f_n). \tag{5.21}$$

(7) $f\in V[a, b]$ 的充要条件是对任何 $c\in(a, b)$，$f\in V[a, c]$ 并且 $f\in V[c, b]$. 而当 $f\in V[a, b]$ 时，有

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f). \tag{5.22}$$

(8) 如果 $f\in V[a, b]$，那末 $\bigvee_a^x(f)$ 是 $[a, b]$ 上单调增加函数.

证明 (1) 对任何 $x\in(a, b)$，由于

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant|f(a)|+|f(x)-f(a)|\\&\leqslant|f(a)|+|f(x)-f(a)|+|f(x)-f(b)|\\&=f(a)+\bigvee(f; a, x, b)\\&\leqslant f(a)+\bigvee_a^b(f),\end{aligned}$$

所以 f 是有界函数.

(2)～(5) 由读者自行证明.

(6) 记 $M=\sup\limits_n\bigvee\limits_a^b(f_n)$，对任何固定的分点组 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，由于

$$\begin{aligned}\bigvee(f; x_0, \cdots, x_n)&=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=\sum_{i=1}^n\lim_{k\to\infty}|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})|\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n|f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})|\\&\leqslant M,\end{aligned}$$

因而 $\sup\limits_{x_0,\cdots,x_n}\bigvee(f; x_0, \cdots, x_n)\leqslant M$，即(5.21)成立.

(7) 当 $f\in V[a, b]$ 时，显然，对任何$[a, c]$上分点组 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=c$，

$$\begin{aligned}\bigvee(f; x_0, \cdots, x_n)&=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\leqslant\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(b)-f(c)|\\&\leqslant\bigvee_a^b(f),\end{aligned}$$

即 $f\in V[a, c]$. 同样可证 $f\in V[c, b]$.

反之，假设 $f\in V[a, c]$ 且 $f\in V[c, b]$. 任取一分点组 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 如果$\{x_i\}$中没有 c，就再添加 c(已有 c 时就不添加)作为一个分点组：$a=x_0<x_1<\cdots<x_k<c<x_{k+1}<\cdots<x_n=b$，从而

$$\bigvee(f;x_0,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(c)-f(x_k)|$$

$$+|f(x_{k+1})-f(c)|$$

$$+\sum_{i=k+1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f),$$

因而 $f\in V[a,b]$，并且还得到了

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f). \tag{5.23}$$

为了证明(5.22)，显然，我们只要再证明 $\bigvee_a^b(f)\geqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$，就可以了．对任何 $\varepsilon>0$，必有 $[a,c]$，$[c,b]$ 上分点组，使得

$$\bigvee(f;x_0,\cdots,x_n)\geqslant\bigvee_a^c(f)-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\bigvee(f;y_0,\cdots,y_m)\geqslant\bigvee_c^b(f)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $x_n=c=y_0$，所以 $\{x_i\}\cup\{y_i\}$ 是 $[a,b]$ 上分点组，从而

$$\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$$

$$\leqslant\bigvee(f;x_0,\cdots,x_n)+\bigvee(f;y_0,\cdots,y_m)+\varepsilon$$

$$\leqslant\bigvee(f;x_0,\cdots,x_{n-1},c,y_1,\cdots,y_m)+\varepsilon$$

$$\leqslant\bigvee_a^b(f)+\varepsilon,$$

再令 $\varepsilon\to0$，就得到与(5.23)相反的不等式，从而(5.22)成立．

(8) 从(7)立即可得．证毕．

注意，(6)中假设 $\sup\bigvee_a^b(f_n)\leqslant M$ 这个条件是不能少的．希望读者自己举例说明这一点．

下面是有界变差函数分解成单调函数之差的分解定理．

定理3（Jordan 分解定理） 设 $f\in V[a,b]$，那末

(1) 必存在$[a, b]$上两个单调增加函数g_1, g_2, 使得$f=g_1-g_2$;

(2) 存在唯一的一对单调增加函数$n(x)$、$p(x)$,使得

$$p(x)+n(x)=\bigvee_a^x(f),\quad x\in[a, b], \tag{5.24}$$

$$f(x)-f(a)=p(x)-n(x). \tag{5.25}$$

证明 (1) 作

$$g_1(x)=\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)+f(x)\right\},$$

$$g_2(x)=\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)-f(x)\right\},$$

当$x'>x$时,因为

$$|f(x')-f(x)|\leqslant\bigvee_x^{x'}(f)=\bigvee_a^{x'}(f)-\bigvee_a^x(f),$$

所以

$$\bigvee_a^x(f)+f(x)\leqslant\bigvee_a^{x'}(f)+f(x'),$$

$$\bigvee_a^x(f)-f(x)\leqslant\bigvee_a^{x'}(f)-f(x'),$$

即g_1、g_2都是$[a, b]$上单调增加函数,并且

$$f=g_1-g_2. \tag{5.26}$$

(2) 取$p(x)=g_1(x)-\frac{1}{2}f(a)$, $n(x)=g_2(x)+\frac{1}{2}f(a)$, 立即知道(5.24)、(5.25)成立. 由于从(5.24)、(5.25)中可以解出$p(x)$、$n(x)$,所以$n(x)$、$p(x)$是唯一的.

显然,$n(x)\geqslant 0$, $p(x)\geqslant 0$,并且$n(a)=p(a)=0$.

由定理1、2立即得到下面的系.

系1 $[a, b]$上有界变差函数的不连续点最多只有可列个,并且都是第一类的. $[a, b]$上有界变差函数必是黎曼可积的.

如果引入如下定义:

定义 设$f\in V[a, b]$,任取$[a, b]$上一组分点$a=x_0<x_1<\cdots$

$<x_n=b$. 用 $\bigvee^+(f;x_0,\cdots,x_n)$、$\bigvee^-(f;x_0,\cdots,x_n)$ 分别表示 $\{(f(x_i)-f(x_{i-1}))\}$中所有非负的项、非正的项的绝对值的和，分别称

$$\bigvee_a^b{}^+(f)=\sup_{x_0,\cdots,x_n}\bigvee^+(f;x_0,\cdots,x_n),$$

$$\bigvee_a^b{}^-(f)=\sup_{x_0,\cdots,x_n}\bigvee^-(f;x_0,\cdots,x_n)$$

为 f 在$[a,b]$的正全变差、负全变差. 而对任何 $x\in[a,b]$，分别称 $\bigvee_a^x{}^+(f)$、$\bigvee_a^x{}^-(f)$为 f 在$[a,b]$上正（全）变差函数、负（全）变差函数.

可以证明下面的事实：

定理 3′ 设 $f\in V[a,b]$，Jordan 分解定理中的 $p(x)$、$n(x)$ 分别是 f 的正变差函数和负变差函数.

这个定理的证明留给读者，或参看[1].

下面是有关有界变差函数与全变差函数连续性的关系.

定理 4 设 $f\in V[a,b]$，那末下面三件事等价：

(1) x_0是 f 的连续点.

(2) x_0是 $\bigvee_a^x(f)$的连续点.

(3) x_0 是 $p(x)$、$n(x)$的公共连续点.

证明 (1)⇒(2) 先利用 f 在 $x_0(x_0\in[a,b])$的右方连续性，证明 $\bigvee_a^x(f)$在 x_0 也具有右方连续性.

对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当 $x'\in[x_0,x_0+\delta]\subset[a,b]$时，

$$|f(x')-f(x)|<\varepsilon/2.$$

对于上面的 ε，又存在$[x_0,x_0+\delta]$上分点组 $x_0<x_1<\cdots<x_m=x_0+\delta$，不妨设 $m>2$，使得

$$\bigvee(f;x_0,\cdots,x_m)>\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f)-\frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.27}$$

因此

$$\bigvee_{x_0}^{x_1}(f)=\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f)-\bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)$$

$$<\sum_{i=1}^{m-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\frac{\varepsilon}{2}-\bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)$$

$$=|f(x_1)-f(x_0)|+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$+\sum_{i=2}^{m-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|-\bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)$$

$$\leqslant|f(x_1)-f(x_0)|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon. \tag{5.28}$$

由于 $\bigvee_{x_0}^{y}(f)$ 是 y 的单调函数，所以当 $x_0<y<x_1$ 时

$$\bigvee_{a}^{y}(f)-\bigvee_{a}^{x_0}(f)=\bigvee_{x_0}^{y}(f)<\varepsilon,$$

即 x_0 是 $\bigvee_{a}^{x}(f)$ 的右方连续点。

同样，利用 f 在 x_0($x_0\in(a,b]$)的左方连续性，可以推出 $\bigvee_{a}^{x}(f)$ 在 x_0 也是左方连续的.

(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(1) 只要注意到 $p(x)$、$n(x)$ 都是单调增加，并且满足(5.24)、(5.25)，容易得到相应的结论.

系 对任何 $f\in V[a, b]$，必存在 $g\in V[a, b]$，满足下面的条件：

(1) g 在 (a, b) 上右连续(即对任何 $x\in(a, b)$，g 在 x 右方连续)；

(2) $g(a)=f(a)$，$g(b)=f(b)$，并且在 f 所有的连续点 x 上，$g(x)=f(x)$；

(3) $\bigvee_{a}^{b}(g)\leqslant\bigvee_{a}^{b}(f)$.

证明 由 Jordan 分解，存在 $p(x)$、$n(x)$，满足(5.24)、(5.25). 作函数 $p'(x)$、$n'(x)$ 如下：

$p'(x)=p(x+0)$，$n'(x)=n(x+0)$，当 $x\in(a, b)$；

$p'(a)=p(a)=0$，$p'(b)=p(b)$，

$$n'(a)=n(a)=0,\quad n'(b)=n(b).$$

由定理 4，容易知道在所有(a, b)中 f 的连续点 x 上，

$$p'(x)=p(x),\quad n'(x)=n(x)$$

并且 $p'(x)$、$n'(x)$仍是单调增加函数，所以取 $g(x)=p'(x)-n'(x)+f(a)$时，在(a, b)中 f 的连续点上，$g(x)=f(x)$，并且 $g(x)$在(a, b)上右连续，而且 $f(a)=g(a)$，即(1)、(2)已被证得．又从

$$\bigvee_a^b(g)\leqslant\bigvee_a^b(p')+\bigvee_a^b(n')=p'(b)+n'(b)$$

$$=p(b)+n(b)=\bigvee_a^b(f)$$

立即得到(3)．

这个系也可以不用 Jordan 分解而直接证明．在下册中要用到这个系．

对于单调函数 g，有分解 $g=g_c+g_d$，这里 g_c 是连续的，而 g_d 是专门记录 g 的不连续点跃度的函数(见定理 1 及系)利用Jordan分解，对于有界变差函数也可获得类似的结果．

定义 设$\{x_n\}$是$\langle a, b\rangle$中一列点，$\{\lambda_n\}$、$\{\mu_n\}$是两个非零实数的序列，并且

$$\sum_n|\lambda_n|<\infty,\quad \sum_n|\mu_n|<\infty,\tag{5.29}$$

c 是常数，称函数项级数所定义出来的函数[注]

$$f(x)=\sum_n\lambda_n\theta(x-x_n)+\sum_n\mu_n\theta_1(x-x_n)+c\tag{5.30}$$

是$\langle a, b\rangle$上的跳跃函数．

引理 1 设 f 是$(-\infty, \infty)$上跳跃函数．下面的命题成立．

(1) 对任何有限区间$[a, b]$，$f\in V[a, b]$．

(2) 如果 f 在$[a, b]$上表示为(5.30)，$\{x_n\}\subset[a, b]$，那末 f 在$[a, b]$上不连续点全体就是$\{x_n\}$，当 $x_n\in(a, b)$时，f 在 x_n 的左方、右方跃度分别就是 μ_n、λ_n，而如果 a 或 b 是不连续点，即 $a=x_n$(或 $b=x_n$)，它的右方(或左方)跃度为 λ_n(或 μ_n)．

[注] 显然，从条件(5.29)可知级数(5.30)在$(-\infty, \infty)$上一致收敛．

(3) 在(5.30)表示下，f 在$[a, b]$上的全变差

$$\bigvee_a^b(f)=\sum_n{}'(|\lambda_n|+|\mu_n|), \tag{5.31}$$

这里"$\sum'$"表示如果发生 $x_n=a$(或 $x_n=b$)时，上面和式中应不计入 μ_n(或 λ_n).

(4) f 在$(-\infty, \infty)$上可以表示成如下形式(不妨设 $x=0$ 是 f 的连续点)

$$\begin{aligned}f(x)=f(0)+\sum_{x_n>0}[&(f(x_n+0)-f(x_n))\theta(x-x_n)\\&+(f(x_n)-f(x_n-0))\theta_1(x-x_n)]\\+\sum_{x_n<0}[&(f(x_n+0)-f(x_n))(\theta(x-x_n)-1)\\&+(f(x_n)-f(x_n-0))(\theta_1(x-x_n)-1)],\end{aligned} \tag{5.32}$$

这里$\{x_n\}$是 f 在$(-\infty, \infty)$上不连续点全体.

证明 (1) 因为在$(-\infty, \infty)$上 f 可以写成满足(5.29)条件的(5.30)形式. 作两个函数

$$g_1(x)=\sum_{\lambda_n>0}\lambda_n\theta(x-x_n)+\sum_{\mu_n>0}\mu_n\theta_1(x-x_n),$$

$$g_2(x)=\sum_{\lambda_n<0}\lambda_n\theta(x-x_n)+\sum_{\mu_n<0}\mu_n\theta_1(x-x_n).$$

由于(5.29)，上面级数都是一致收敛的，因而(5.30)中级数是绝对且一致收敛的. 从而在$(-\infty, \infty)$上 $f=g_1-g_2$，而 g_1，g_2 是$(-\infty, \infty)$上单调增加函数，所以对任何$[a, b]$，$f\in V[a, b]$.

(2) 如果 f 在$[a, b]$上表示成(5.30)时，完全类似于定理1中(4)、(5)的证明，可以得到 f 在$[a, b]$上不连续点全体就是$\{x_n\}$以及(2)的其它结论.

由此可知，$[a, b]$上一个跳跃函数，如果表示成$\{\theta(x-x_n)\}$，$\{\theta_1(x-x_n)\}$的常系数级数和的形式时，除了 f 的不连续点可能编号不同之外，或者在 a 也是 f 的不连续点时(例如 $a=x_n$)可以相差一个任意常数(例如此时 μ_n 可以任意取，取定后 $c=f(a)-\mu_n$)外，表达式(5.30)是唯一的，特别当 a 是 f 的连续点时，表达式(5.30)就是唯一的(最多是不连续点编号不同).

(3) 由(5.12)，

$$g_1(b)-g_1(a)=\sum_{\lambda_n>0}'\lambda_n+\sum_{\mu_n>0}'\mu_n,$$

$$g_2(b)-g_2(a)=\sum_{\lambda_n<0}'(-\lambda_n)+\sum_{\mu_n<0}'(-\mu_n).$$

因此

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^b(g_1)+\bigvee_a^b(g_2)=\sum_n{}'(|\lambda_n|+|\mu_n|). \qquad (5.33)$$

为证明(5.31)，尚须证明 $\bigvee_a^b(f)\geqslant\sum_n{}'(|\lambda_n|+|\mu_n|)$. 事实上，由于(5.29)，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，使得

$$\sum_{N+1}^{\infty}(|\lambda_n|+|\mu_n|)<\varepsilon/2. \qquad (5.34)$$

记 $f_N=\sum_1^N(\lambda_n\theta(x-x_n)+\mu_n\theta_1(x-x_n))$，那末

$$f-f_N=\sum_{N+1}^{\infty}(\lambda_n\theta(x-x_n)+\mu_n\theta_1(x-x_n)).$$

对右边的级数，利用(5.33)知道

$$\bigvee_a^b(f-f_N)\leqslant\varepsilon/2,$$

因此 $\bigvee_a^b(f)\geqslant\bigvee_a^b(f_N)-\bigvee_a^b(f-f_N)\geqslant\bigvee_a^b(f_N)-\frac{\varepsilon}{2}.$

根据习题 8 知道 $\bigvee_a^b(f_N)=\sum_1^N{}'(|\lambda_n|+|\mu_n|)$. 所以

$$\bigvee_a^b(f)\geqslant\sum_1^N{}'(|\lambda_n|+|\mu_n|)-\frac{\varepsilon}{2}$$
$$=\sum_n{}'(|\lambda_n|+|\mu_n|)-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$，便得到

$$\bigvee_a^b(f)\geqslant\sum_n{}'(|\lambda_n|+|\mu_n|).$$

(4) 取一列 $k_n\to\infty$，并且 k_n 都是 f 的连续点. 先证明(5.32)在每个 $[0, k_n]$ 上成立. 事实上，由(1)知道 f 是 $[0, k_n]$ 上有界变差函数. 显然，$[0, k_n]$ 上 f 的不连续点全体是 $\{x_i\}\cap[0, k_n]$，容易证明(见习题 9)

$$\sum_{x_i\in[0,k_n)}(|f(x_i+0)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x_i-0)|)$$
$$\leqslant\bigvee_0^{k_n}(f).$$

由此可知(5.32)式右边级数在$[0, k_n]$内一致收敛，并且这个级数的和是(级数中相应于$x_i\in[0, k_n]$的项为零)

$$f(0)+\sum_{x_i\in[0,k_n]}[(f(x_n+0)-f(x_n))\theta(x-x_n)$$
$$+(f(x_n)-f(x_n-0))\theta_1(x-x_n)].$$

根据跳跃函数表达式唯一性知道

$$f(x)=f(0)+\sum_{x_i\in[0,k_n]}[(f(x_n+0)-f(x_n))\theta(x-x_n)$$
$$+(f(x_n)-f(x_n-0))\theta_1(x-x_n)],$$
$$x\in[0, k_n],$$

即对$x\geqslant0$时，(5.32)成立．同样可证当$x\leqslant0$时，(5.32)也成立．证毕．

定理5 (1) 设$f\in V[a, b]$，如果有$[a, b]$上连续的有界变差函数f_c以及$[a, b]$上跳跃函数f_d，使得

$$f(x)=f_c(x)+f_d(x),$$

那末除去相差一个常数外，上述分解是唯一的，并且

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^b(f_c)+\bigvee_a^b(f_d).$$

(2) 设$f\in V[a, b]$，并且是$[a, b]$上连续函数，那末，对任何$\varepsilon>0$，必存在$\delta>0$，使得$[a, b]$上任何分点组$a=x_0<\cdots<x_n=b$，只要$\lambda=\max_i(x_i-x_{i-1})<\delta$时，必有

$$\bigvee(f;\ x_0,\ \cdots,\ x_n)\geqslant\bigvee_a^b(f)-\varepsilon.$$

定理5的证明留给读者作为练习．

Helly选取原理 下面介绍在经典分析数学某些分支中很有用的关于有界变差函数的一个定理——Helly选取原理．

引理2 设$\{f_\alpha|\alpha\in A\}$是定义在可列集E上的一致有界函数族(A的势是无限的)．那末必可从族$\{f_\alpha|\alpha\in A\}$中选出一个指标

不相同的序列$\{f_{\alpha_n}\}(n=1, 2, \cdots)$使得$\{f_{\alpha_n}\}$在 E 上处处收敛.

证明　根据假设 $E=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$，并存在常数 M，使得$|f_\alpha(x)|\leqslant M$, $\alpha\in A$, $x\in E$. 由 Weierstrass 定理，可以从数集$\{f_\alpha(x_1)|\alpha\in A\}$中找出一个收敛序列$\{f_{\alpha_n}(x_1)\}$, $n=1, 2, \cdots$. 因为 A 是无限集，所以可以做到指标$\{\alpha_n\}$彼此是不相同的，不妨记这个序列为

$$f_{11}(x_1),\ f_{12}(x_1),\ \cdots,\ f_{1n}(x_1),\cdots$$

再考察$\{f_{1n}(x_2)\}$，又一次利用 Weierstrass 定理，从中又可找出在 x_2 收敛的$\{f_{1n}\}$的子序列，不妨设为

$$f_{21}(x_2),\ f_{22}(x_2),\ \cdots,\ f_{2n}(x_2),\ \cdots$$

这个手续可以一直做下去．这样，我们得到一列子序列

$$\begin{array}{l} f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ \cdots,\ f_{1n}(x),\ \cdots \\ f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \cdots,\ f_{2n}(x),\ \cdots \\ \cdots\cdots \\ f_{n1}(x),\ f_{n2}(x),\ \cdots,\ f_{nn}(x),\ \cdots \\ \cdots\cdots \end{array} \tag{5.35}$$

第 n 个序列是第 $n-1$ 个序列的子序列，并且第 n 个序列在x_1、$\cdots$、x_n 上收敛．这时，再取上面的对角线序列

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ \cdots,\ f_{nn}(x),\ \cdots \tag{5.36}$$

由于(5.35)中第一个序列的指标彼此互不相同，所以子序列指标也不相同．由于(5.36)的序列可以视为(5.35)中第 n 个序列的子序列(除有限项可能不属于第 n 个序列，这不影响收敛性)，因而在x_1、$\cdots$、x_n 上收敛．这一点对一切 n 都对，因此(5.36)在 E 上收敛．证毕．

上述抽取对角线序列的方法常称为**对角线方法**．

显然，如果 E 不是可列无限集，引理 2 的结论是不成立的．例子如下：

例 4　$E=[0, 1]$, $f_n=\sin nx$, $n=1, 2, \cdots$. 显然，$\{f_n\}$是$[0, 1]$上一致有界的一列函数，但决不能找到子序列$\{f_{n_k}\}$在$[0, 1]$上处处收敛.

如果$\{f_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$不是一致有界的，显然，引理2找出的序列一般就不可能收敛于有限函数.

定理 6(**Helly 选取原理**) 设$\{f_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是$[a, b]$上一族(无限个)有界变差函数，$\left\{\bigvee_a^b(f_\alpha)\,|\,\alpha\in\Lambda\right\}$是有界集，并且至少存在一点$x_0\in[a, b]$，使得$\{f_\alpha(x_0)|\alpha\in\Lambda\}$是有界集. 那末从$\{f_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$必可抽出指标互不相同的一个序列$\{f_{\alpha_n}\}$，它处处收敛于一个有界变差函数.

证明 首先从$|f_\alpha(x)-f_\alpha(x_0)|\leqslant\bigvee_a^b(f_\alpha)$以及$\left\{\bigvee_a^b(f_\alpha)|\alpha\in\Lambda\right\}$、$\{f_\alpha(x_0)|\alpha\in\Lambda\}$是有界集的假设立即得到$\{f_\alpha(x)|\alpha\in\Lambda\}$是$[a, b]$上一致有界的函数族. 下面分两步证明定理.

(I) 先假设每个$f_\alpha(\alpha\in\Lambda)$都是单调增加函数的情况. 取$E$是$[a, b]$上有理点全体，记$E=\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, \cdots\}$，利用引理2，从$\{f_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$中可以选出指标互不相同的序列$\{f_{\alpha_n}\}$在$E$上处处收敛于$f$，显然，$f$是$E$上单调增加函数. 为方便起见，记$f_{\alpha_n}$为$f_n$.

按下面方式将f延拓成$[a, b]$上的函数：对任何$x\in[a, b]-E$，规定

$$f(x)=\sup_{\substack{\xi\in E\\ \xi<x}}f(\xi). \tag{5.37}$$

由于f在E上单调增加，易知$f(x)$在$[a, b]$上也必为单调增加，从而f最多只有可列个不连续点，记不连续点全体为F.

现在证明$\{f_n\}$在$[a, b]-F$上也必收敛于f. 事实上，对任何$x\in[a, b]-F$，由于x是f的连续点，所以对任何$\varepsilon>0$，必存在有理数p、q，使得$p<x<q$，且

$$\begin{aligned}&0\leqslant f(x)-f(p)<\frac{\varepsilon}{2},\\&0\leqslant f(q)-f(x)<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{5.38}$$

由于$\{f_n\}$在p、q点收敛，所以存在N，当$n\geqslant N$时

$$|f_n(p)-f(p)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f_n(q)-f(q)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.39}$$

从(5.38)、(5.39)立即得到，当 $n\geqslant N$ 时

$$|f(x)-f_n(p)|<\varepsilon,\quad |f(x)-f_n(q)|<\varepsilon. \tag{5.40}$$

因为 f_n 是单调增加函数，所以

$$f(x)-f_n(q)\leqslant f(x)-f_n(x)\leqslant f(x)-f_n(p) \tag{5.41}$$

从(5.41)立即得到，当 $n\geqslant N$ 时，

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

即$\{f_n\}$在$[a,\ b]-F$ 上收敛于 f.

由于$\{f_n\}$在 f 的连续点及有理点上全收敛，因而$\{f_n\}$不收敛或虽收敛但不是收敛于 f 的点最多只有可列个，记为 S. 对于 S 和$\{f_n\}$，再次用引理 2，立即又可从$\{f_n\}$中抽出指标互不相同的子序列在 S 上收敛. 显然，这个子序列就在$[a,\ b]$上处处收敛于有界的单调增加函数.

(II) 由 Jordan 分解，

$$f_\alpha(x)=p_\alpha(x)-n_\alpha(x)+f_\alpha(a),$$

$$p_\alpha(x)+n_\alpha(x)=\bigvee_a^x(f_\alpha).$$

根据$\left\{\bigvee_a^b(f_\alpha)\,|\,\alpha\in A\right\}$有界的假设，得$\left\{\bigvee_a^x(f_\alpha)\,|\,\alpha\in A\right\}$是一致有界的函数族，从而$\{p_\alpha(x),\ n_\alpha(x)\,|\,\alpha\in A\}$是一致有界函数族，因而$\{p_\alpha(x)\,|\,\alpha\in A\}$、$\{n_\alpha(x)-f_\alpha(a)\,|\,\alpha\in A\}$是两个一致有界的单调增加函数族.

对于$\{p_\alpha\,|\,\alpha\in A\}$，利用(I)的结果，可以从中抽出指标互不相同的序列$\{p_k\}$在$[a,\ b]$上处处收敛于一个单调增加的函数 $p(x)$. 然后再对相应被抽出的指标，考虑序列$\{n_k(x)-f_k(a)\}$. 对于$\{n_k(x)-f_k(a)\}$再利用(I)的结果，又可抽出一个子序列$\{n_{k_\nu}(x)-f_{k_\nu}(a)\}$在$[a,\ b]$上处处收敛于 $n(x)$. 显然，$\{f_\alpha\,|\,\alpha\in A\}$中抽出的指标互不相同的序列$\{f_{k_\nu}\}$，其中 $f_{k_\nu}(x)=p_{k_\nu}(x)-n_{k_\nu}(x)+f_{k_\nu}(a)$，$\nu=1,\ 2,\ \cdots$，就在$[a,\ b]$上处处收敛于一个有限函数 $f(x)$，易知 $f(x)$还是有界变差函数. 证毕.

显然，关于$\left\{\bigvee_a^b(f_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\right\}$、$\{f_\alpha(x_0)\mid\alpha\in\Lambda\}$有界性的条件是一个也不能少的.

例5 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & 当\ x\in(0,\ 1]时,\\ 0, & 当\ x=0\ 时.\end{cases}$$

取
$$f_n(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & 当\ x\in\left[\dfrac{1}{n},\ 1\right]时,\\ \dfrac{1}{n}\sin n, & 当\ x\in\left[0,\ \dfrac{1}{n}\right]时.\end{cases}\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

显然，$\{f_n\}$是$[0,\ 1]$上一列一致有界的函数列，并且$\{f_n\}$在$[0,\ 1]$上处处收敛于f(其实还是均匀收敛于f). 但f不是有界变差函数.

例6 设$[a,\ b]$上一列函数$f_n=n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，显然有$\bigvee_a^b(f_n)=0(n=1,2,\cdots)$，但不存在收敛于有界变差函数的子序列.

显然，有界变差函数概念还可以推广到复值函数和无限区间的情况. 关于有界变差函数的微分性质将放在第三章讨论.

4. 可求长曲线

可求长曲线概念在数学物理和分析数学中是常见的. 现在用有界变差函数概念给以明确的定义.

为方便起见，我们只叙述二维空间(即平面)上曲线，并且只谈连续曲线.

设$\varphi(t)$、$\psi(t)$是$[a,\ b]$上实函数，称区间$[a,\ b]$到平面的映射

$$t\mapsto(\varphi(t),\ \psi(t))$$

为(平面)曲线(有时就直接将这个映射的值域称为曲线)，记为Γ. 当φ、ψ都是$[a,\ b]$上连续函数时，称Γ为连续曲线.

曲线Γ的复数形式表示：$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$，$t\in[a,\ b]$.

定义 设Γ：$z(t)=(\varphi(t),\ \psi(t))$，$t\in[a,\ b]$是一条连续曲线. 任取$[a,\ b]$上分点组

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b.$$

作和式
$$\bigvee(\Gamma;t_0,\cdots,t_n)=\sum_{i=1}^{n}|z(t_i)-z(t_{i-1})|,$$
其中
$$|z(t_i)-z(t_{i-1})|^2=(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2,$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$
如果存在常数 M，使得对一切分点组 $\{t_0,\ \cdots,\ t_n\}$ 都有
$$\bigvee(\Gamma;t_0,\cdots,t_n)\leqslant M<\infty,$$
就称曲线 Γ 是有长的（或可求长的），并称
$$|\Gamma|=\sup_{t_0,\cdots,t_n}\bigvee(\Gamma;t_0,\cdots,t_n)$$
为曲线 Γ 的长度。

显然，$\bigvee(\Gamma;t_0,\cdots,t_n)$ 是曲线 $z(t)=(\varphi(t),\psi(t))\ (t\in[a,b])$ 在分点组 $\{t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_n\}$ 之下顺次连接 $z(t_0)$，…，$z(t_n)$ 的（平面）折线的长度.

定理 7 设 Γ 是（平面）连续曲线：$z(t)=(\varphi(t),\psi(t))$，$t\in[a,b]$，$\Gamma$ 是有长的充要条件是 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 都是 $[a,\ b]$ 上有界变差函数.

证明 在 $[a,\ b]$ 上任取一分点组 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. 由于成立着不等式

$$\begin{aligned}&\max\{|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|,\ |\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|\}\\ &\leqslant((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant(|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|).\end{aligned}$$

由此容易看出，曲线 Γ 可求长的充要条件是 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 都是 $[a,b]$ 上有界变差函数. 证毕.

对于曲线 Γ：$z(t)=(\varphi(t),\ \psi(t))$，$t\in[a,\ b]$，还可以引入曲线的弧的概念，即对任何 $[\alpha,\ \beta]\subset[a,\ b]$，点集 $\{(\varphi(t),\ \psi(t))\,|\,t\in[\alpha,\ \beta]\}$ 称为 Γ 的弧. 显然，弧本身也是一条曲线. 如果 Γ 是连续曲线，它的任何一个弧也是一条连续曲线；如果 Γ 是可求长的连续曲线，它的任一个弧也是可求长的连续曲线. 特别，当 Γ 是

可求长的连续曲线时，对任何 $\tau\in(a, b]$，记 Γ 的弧 $\Gamma_\tau=\{(\varphi(t), \psi(t))\mid t\in[a, \tau]\}$的长度为 $s(\tau)$，$s(\tau)$是 τ 的单调增加函数．如果不存在$[\alpha, \beta]\subset[a, b]$，使得 $\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上均为常数时，容易证明 $s(\tau)$是 τ 的严格单调增加函数，利用定理 4，还可以证明可求长的连续曲线的弧长函数 $s(\tau)$是 τ 的连续函数．当$s(\tau)$是严格单调增加，并且连续时，反函数存在，记为 $\tau=\tau(s)$，$s\in[0, |\Gamma|]$．从而曲线 Γ 为 $z(t)=z(t(s))$，这就是通常所谓用弧长作为参数的可求长曲线表示法．

5．黎曼-斯蒂阶(Riemann-Stieltjes)积分

这是黎曼积分的推广，很多场合要用这种积分，它与本书中第二章所介绍的积分从观念上讲关系也很密切．对它有所了解将对后面介绍的积分是有益的．但后面的积分比它更为有效，更被普遍采用，所以我们在此只是简略地介绍有关的定义和结果，以备查考，但不给证明．由于这个积分方式完全相似于黎曼积分，相信对黎曼积分熟悉的读者是完全可以接受的．

定义 设 f、g 是$[a, b]$上两个有限函数，在$[a, b]$上任取一个分点组

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

作和式

$$S(f, g; x_0, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})), \quad (5.42)$$

其中 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$．记 $\lambda=\max_i(x_i-x_{i-1})$．如果存在 S，使得

$$\lim_{\lambda\to 0} S(f, g; x_0, \cdots, x_n)=S, \quad (5.43)$$

称 f 关于 g 在$[a, b]$上黎曼-斯蒂阶可积分，并记

$$S=\int_a^b f(x)dg(x) \quad \left(\text{或 } S=\int_a^b fdg\right)$$

称 $\int_a^b fdg$ 为 f 关于 g 在$[a, b]$上的黎曼-斯蒂阶积分．

显然，如果 $g(x)=x$ 时，黎曼-斯蒂阶积分就是黎曼积分．

为了叙述上简便，“黎曼积分”常说成“R 积分”，“黎曼-斯蒂阶

积分”常说成“$(R-S)$积分”.

当然，$(R-S)$积分也可以推广到复值函数或无限区间的情况.

定理 8 黎曼-斯蒂阶积分有如下性质(这里只列出区间$[a, b]$上的情况)：

(1) 假定x_0既是f又是g的不连续点，那末f、g的$(R-S)$积分不存在.

(2) 如果f_1、f_2关于g都是$(R-S)$可积的，那末f_1、f_2的线性组合关于g也可积，并且

$$\int_a^b (\alpha f_1+\beta f_2)dg=\alpha\int_a^b f_1dg+\beta\int_a^b f_2dg,$$

其中α、β是常数.

(3) 当f关于g在$[a, b]$上$(R-S)$可积时，对任何$c\in(a, b)$，f关于g在$[a, c]$、$[c, b]$上都$(R-S)$可积，并且下式成立：

$$\int_a^b fdg=\int_a^c fdg+\int_c^b fdg.$$

(4) (分部积分公式)如果f关于g $(R-S)$可积，那末g关于f必然$(R-S)$可积，并且

$$\int_a^b fdg=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b gdf.$$

(5) 如果f关于g_1、g_2在$[a, b]$上都是$(R-S)$可积的，那末f关于g_1、g_2的线性组合也是$(R-S)$可积的，并且

$$\int_a^b fd(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha\int_a^b fdg_1+\beta\int_a^b fdg_2,$$

其中α、β是常数.

(6) (积分存在的一个充分性条件)如果f在$[a, b]$上连续，g在$[a, b]$上单调增加(或单调减少)，那末f关于g的$(R-S)$积分存在，并且

$$\left|\int_a^b fdg\right|\leqslant\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\,|g(b)-g(a)|.$$

如果f在$[a, b]$上连续，g是$[a, b]$上有界变差函数，那末f关于g的$(R-S)$积分存在，并且

$$\left|\int_a^b fdg\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \bigvee_a^b(g).$$

(7)（积分存在的充要条件）设 f 是$[a, b]$上有界函数，g 是$[a, b]$上有界变差函数，ω_k 表示 f 在区间$[x_{k-1}, x_k]$上的振幅，即

$$\omega_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) - \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),$$

那末 f 关于 g 可积的充要条件是对任何一个正数 η，

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{\omega_k>\eta} |g(x_k)-g(x_{k-1})| = 0.$$

下面是极限性质：

(8) 设$\{f_n\}$是$[a, b]$上一列关于 g 可积的函数，并且在$[a, b]$上均匀收敛于 f，又设 g 是$[a, b]$上有界变差函数，那末

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dg = \int_a^b fdg.$$

(9) 设 f 是$[a, b]$上连续函数，$\{g_n\}$是$[a, b]$上处处收敛的有界变差函数序列，并且存在常数 $K>0$，使得 $\bigvee_a^b(g_n) \leqslant K < \infty$ $(n=1, 2, \cdots)$，那末 g 必是有界变差函数，而且

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b fdg_n = \int_a^b fdg.$$

对于定理8，读者可按定义及通常的办法容易地证明除性质(7)以外的各点．此外应注意，有例子可以说明(3)的逆命题不成立．

6．曲线积分

设 Γ：$z(t)=(\varphi(t), \psi(t))$，$t\in[a, b]$是一条连续曲线，$s(t)$是 Γ 的弧长函数，f 是定义在 Γ 上的函数，如果 $f(z(t))$关于 $s(t)$的$(R-S)$积分存在，那末称积分

$$\int_a^b f(z(t))ds(t) \tag{5.44}$$

为 f 在 Γ 上的第一类型曲线积分．而如果 f 关于 $x(t)=\varphi(t)$ 的$(R-S)$积分存在，那末称

$$\int_a^b f(z(t))dx(t) \tag{5.45}$$

为 f 在 Γ 上的第二类型曲线积分.

习 题

1. 求出$[a, b]$上单调函数全体的势.

2. 证明$[a, b]$上任何一个实有限函数的第一类不连续点全体是可列集.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

问 α 取哪些值时，f 是$[0, 1]$上有界变差函数.

4. 设 f 在$[a, b]$上除去有限个点外，$f'(x)$都存在，而且存在常数 M，使得

$$|f'(x)|\leqslant M.$$

证明 $f\in V[a, b]$.

5. 设 f 是$[a, b]$上有限函数，如果存在正常数 K、α，使得

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant K|x''-x'|^{\alpha}$$

成立，称 f 在$[a, b]$上满足 α 次 Hölder 条件. 证明：$\alpha>1$ 时，满足 α 次 Hölder 条件的函数必为常数. 作一个不满足任何 α 次 Hölder 条件的有界变差函数，又作一个满足 $\alpha(<1)$次 Hölder 条件但不是有界变差的函数.

6. 证明 $f\in V[a, b]$的充要条件是存在单调增加的函数 φ，使当 $x'<x''$ 时

$$f(x'')-f(x')\leqslant\varphi(x'')-\varphi(x').$$

7. 证明定理 3′.

8. 设 x_1、…、x_n 是$[a, b]$中有限个点，λ_1、…、λ_n；μ_1、…、μ_n 是两组有限实数. 作函数

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\theta(x-x_k)+\mu_k\theta_1(x-x_k)).$$

证明 $\bigvee_a^b(f_n)=\sum_{k=1}^{n}{}'(|\lambda_k|+|\mu_k|)$. 这里“$\sum'$”表示如果发生端点 a、b 是$\{x_i\}$中之一时，例如 $x_n=a$ 时，就把 μ_n 视为零(即 μ_n 不参与求和)，又如 $x_n=b$ 时，就把 λ_n 视为零(即 λ_n 不参与求和).

9. 设 $f\in V[a, b]$，$\{x_n\}$是 f 的不连续点全体. 证明

$$\sum_n(|f(x_n+0)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_n-0)|)\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

10．证明定理5.

11．设 f 是$[a, b]$上有限函数，$x_0\in[a, b]$，又设 x_0 是 f 的连续点．直接证明：$f(x)$关于 $\theta(x-x_0)$、$\theta_1(x-x_0)$的黎曼-斯蒂阶积分存在，并计算它的值．

12．设 f_n 为习题8中的函数，$g(x)$在 x_1、…、x_n 连续．

(1) 证明 g 关于 f_n 的黎曼-斯蒂阶积分存在，并计算出 $\int_a^b g df_n$.

(2) 利用分部积分公式计算 $\int_a^b f_n dg$.

13．设 f 是$[a, b]$上黎曼可积函数，g 是$[a, b]$上处处可微的函数，并且导函数 g' 是$[a, b]$上黎曼可积函数．证明

$$\int_a^b f dg=\int_a^b fg'dx.$$

14．设 f 是$[a, b]$上连续函数，g 是$[a, b]$上跳跃函数

$$g(x)=\sum_n(\lambda_n\theta(x-x_n)+\mu_n\theta_1(x-x_n)),$$

其中$\{x_n\}\subset[a, b]$，$\sum_n(|\lambda_n|+|\mu_n|)<\infty$．证明

$$\int_a^b f dg=\sum_n{}' f(x_n)(\lambda_n+\mu_n).$$

(这里"$\sum'$"表示当发生端点 a、b 是某个不连续点 x_n 时，相应的 μ_n、λ_n 不参加和式计算．)

15．设 f 是$(-\infty, \infty)$上有限函数，如果对任何自然数 n，$f\in\bigvee[-n, n]$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\bigvee\limits_{-n}^{n}(f)<\infty$，称 f 是$(-\infty, \infty)$上的**有界变差函数**．$(-\infty, \infty)$上有界变差函数全体记为 $\bigvee(-\infty, \infty)$．

对于$(-\infty, \infty)$上有界变差函数，给出定理1～6的推广．

第二章　勒贝格–斯蒂阶积分

§1　直线上 g–长度和 g–零集

1. 建立新积分的想法

黎曼积分以及黎曼–斯蒂阶积分具有明显的直观优点，许多场合也是非常有效的．可是，当人们对客观对象的认识深化了以后，反映在数学上，所碰到的函数也复杂了．例如，由各种各样性质良好的函数组成的函数项级数（如三角级数等）所收敛的极限函数是否可积？即使可积，能否逐项积分（即积分与极限能否交换顺序）？如含有参变量积分，积分后对参数仍否可积？如果可积能否交换顺序？对参变量微分能否与积分号交换顺序等等．这一系列问题的本质是极限与积分交换顺序的问题．用黎曼积分或黎曼–斯蒂阶积分，往往要加一致收敛或多元连续这类条件．这类条件要求太强了．是否能有一种具有更广泛意义的积分，既能基本保持原先两种积分的直观优点（积分的直观含义和几何图形的面积相当），又能在逐项积分问题上大大地减弱关于一致收敛或多元连续等要求．建立这种新积分正是本章的任务．

下面我们用一个典型的例子来说明建立积分的基本想法．

设 $[0, 1]$ 中有理点全体为 $\{r_n\}$，$(n=1, 2, \cdots)$，作 $[0, 1]$ 上的函数列

$$\varphi_{r_n}(x)=\begin{cases}1, & 当\ x=r_n,\\ 0, & 当\ x\neq r_n,\end{cases}\quad (n=1, 2, \cdots).$$

显然，下面的级数在 $[0, 1]$ 上处处收敛：

$$D(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{r_n}(x), \tag{1.1}$$

这里 $D(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数．就级数中每一项 $\varphi_{r_n}(x)$ 来讲，它是性质很好的函数，并且它们的黎曼积分

$$\int_0^1 \varphi_{r_n}(x)dx=0, \quad n=1, 2, \cdots \tag{1.2}$$

而级数(1.1)处处收敛(当然不一致收敛)，但极限函数 $D(x)$不是黎曼可积分. 所以更谈不上对(1.1)在黎曼积分意义下逐项积分.

既然希望新建立的积分既保持直观的优点又能减轻逐项积分的条件，一种较为自然的想法就是：(一)所有黎曼可积函数都按新积分可积，并且积分值一致(这有利于保持直观性)；(二)对原来黎曼不可积函数 f，用以下方式定义：对 f，如果存在一列函数$\{\varphi_n\}$，满足：

(I) $\{\varphi_n\}$ 在$[a, b]$上处处收敛于 f；

(II) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n dx$ 存在；

这时就认为 f 是"可积"的，并且规定

$$\int_a^b f\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n dx. \tag{1.3}$$

如果上面这种方法是成功的，那末逐项积分条件就减弱成只要可积函数列 $\{\varphi_n\}$ 处处收敛，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n dx$ 存在就可以了. 而因为

$$D(x)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\varphi_{r_n}(x), \quad \int_0^1 \sum_{n=1}^{k}\varphi_{r_n}(x)dx=0,$$

所以 $D(x)$"可积"，并且

$$\int_0^1 D(x)dx=0.$$

Dirichlet 函数 $D(x)$的"积分"为 0，这并不是不可想象的. 事实上，$D(x)\neq 0$ 的点是 $E=\{r_n\}$，而$[0, 1]$中有理点全体虽然是无限的，但是具有下面的性质：对任意给的 $\varepsilon>0$，总存在一个开集 $G\supset E$，而 G 的构成区间 $\{(a_\nu, b_\nu)\}$ 的长度总和不超过 ε. 事实上，对每个 r_n，取

$$O_n=\left(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right),$$

O_n 长度 $<\frac{\varepsilon}{2^n}$，因而 $\{O_n\}$ 的长度总和$<\varepsilon$，取

$$G=\bigcup_{\nu}O_n=\bigcup_{\nu}(a_\nu,\ b_\nu),$$

因为每个$(a_\nu,\ b_\nu)$总是$\{O_n\}$中某些区间合并而来，容易证明G就达到我们的要求．换言之，E被包含在一个“总长度”小于ε的开区间的和集中，ε是任意的，因而E只是一个“零长度”的集．自然地，底边“长度”是“零”，高为1的“矩形”面积(即$D(x)$的“积分”)为“零”是可以设想的．而恰是这一想法将在新积分的建立中起着重要作用．

其实，用(I)、(II)定义新积分想法的实质是规定极限函数的积分就是积分的极限．这样规定的本身就是可逐项积分：

$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}\varphi_n\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n dx,$$

这是我们建立新积分的另一个基本想法．

然而，一般说来，用上面(I)、(II)条件的办法是有困难的．

例如，$[-1,\ 1]$上两列函数：

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}n\cdot\operatorname{sign}x, & \text{当 } 0\leqslant|x|<\dfrac{1}{n}\text{ 时},\\ \dfrac{1}{x}, & \text{当 } \dfrac{1}{n}\leqslant|x|\leqslant1\text{ 时},\end{cases}$$

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\varphi_n(x), & \text{当 } x\in[0,1]\cup\left[-1,\ -\dfrac{1}{n}\right]\text{时},\\ \dfrac{1}{2}n, & \text{当 } -\dfrac{1}{n}<x<0\text{ 时}\end{cases}$$

$(n=1,\ 2,\ \cdots)$．显然，$\{\varphi_n\}$，$\{\psi_n\}$都是黎曼可积函数列，这两列函数都处处收敛，并且有相同的极限函数

$$f_0(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x),$$

其中

$$f_0(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0\text{ 时},\\ \dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq0\text{ 时}.\end{cases}$$

然而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1\varphi_n dx=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1\psi_n dx=\frac{1}{2}.$$

如按(I)、(II)方式定义，对于函数f_0，其“积分”究竟规定为0,

还是规定为 $\frac{1}{2}$? 这就发生问题了.

因为研究逐项积分问题, 首先得有函数列积分的极限存在. 这样, 条件(II)既无法修改, 唯一可以考虑的是将(I)的限制适当地加强(但如强到一致收敛, 那就没有改进了), 以免出现上例的情况. 加强的方法不只一种, 我们这里是用下面的(I)′代替(I).

(I)′ 假设

$$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots,\ \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

但是, 考察下面的函数, 仍然有些问题.

例如, 在[0, 1]上任取一列稠密的无理数 $\{i_m\}$, 作[0, 1]上函数:

$$D_0(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=r_n(\text{有理数})\text{时},\ n=1,\ 2,\ \cdots,\\ -1, & \text{当 } x=i_n\text{ 时},\ n=1,\ 2,\ \cdots,\\ 0, & \text{当 } x=\text{其它时}.\end{cases}\tag{1.4}$$

显然

$$D_0(x)=\sum_n\varphi_{r_n,i_n}(x),\tag{1.5}$$

其中

$$\varphi_{r_n,i_n}(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=r_n\text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x=i_n\text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=\text{其它时}.\end{cases}$$

读者不难看出, 如果对 $D_0(x)$ 找到一个满足(I)′的黎曼可积函数列 $\{\varphi_n(x)\}$, 这个函数列的黎曼积分必然满足 $\int_0^1\varphi_n(x)dx\leqslant-1$ (因为每个 φ_n 的小和数 $\leqslant-1$). 然而 $\int_0^1\varphi_{r_n,i_n}dx=0$, 这样(1.5)就又不能逐项积分. 但正如前面所说, $D_0(x)\neq0$ 的点全体是一个"零长度"集, 完全可以设想 $D_0(x)$ 的积分是零, 或者说如果两个函数不相等的点全体是一个"零长度"集, 可以设想, 这两个函数本质上是一样的, 一个可以"积分"时, 另一个就也可以"积分", 并且"积分"是相等的. 这样我们就把原来(I)、(II)两个条件修改成下面的形式: 如果

(i) $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots,$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\doteq f(x); \quad (1.6)$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n dx$ 存在;

那末就说 f 可积,并且规定

$$\int f dx=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dx.$$

这里"$\doteq$"的意思就是极限函数可以与 f 在一个"零长度"集上不相等. 修改后的(i)、(ii)将能带来人们满意的结果. 当然,要按现在的(i)、(ii)完成新积分的理论,有很多事情要做. 首先要搞清楚什么是"零长度"的集?然后才能谈上述定义是否恰当,最后才能讨论积分有什么性质, 以致在逐项积分上有什么方便. 而本节的主要任务是给"零长度"集以明确的定义,并给出它的性质,作为今后讨论的准备. 为此,先引入"g-长度"概念.

2. g-长度

不仅为了改进黎曼积分,而且还为改进黎曼-斯蒂阶积分,我们将给出"g-长度"的严格定义.

分布　设想在直线上分布着某种物质或电荷, 它们的总质量或总电荷量可以是有限的也可以是无限的(但假定在任何有限区间上的总量是有限的). 这时可以用一个$(-\infty,\infty)$上的函数 g 来描述该分布. 为此,我们不妨取直线上原点为参考点,并且不妨取 0 作为 $g(x)$在 $x=0$ 点的参考值, 即 $g(0)=0$. 当 $x>0$ 时, 规定 $g(x)$是$(0, x]$上总质量或总电荷量, 当 $x<0$ 时, 规定 $g(x)$是 0 减去$(x, 0]$上的总质量或总电荷量, 即 $0-g(x)=\{(x, 0]$上总质量或总电荷量$\}$. 这样, $g(x)$便是$(-\infty, \infty)$上单调增加函数, 并且对任何 $x'>x$,

$$g(x')-g(x)=\{(x,x']\text{上总质量或总电荷量}\}. \quad (1.7)$$

不仅如此, 对任何 $x'>x$, 并且 $x'\to x$(即$(x, x']\to\emptyset$)时, 由于考虑到$(x, x']$上的总质量或总电荷量随$(x, x']\to\emptyset$而趋于零, 故有 $g(x')\to g(x)$, 即 $g(x)$是右连续的.

这样,对于直线上某个物质质量或电荷分布(暂不考虑有正、

负电荷的情况)，必然存在点的函数 $g(x)$，它是单调增加右连续的，使得(1.7)成立. 显然，如果又有单调增加右连续函数 $g_1(x)$ 使得(1.7)成立,那末 g_1 与 g 只相差一个常数,即存在一个常数 c_0，使得对一切 $x\in(-\infty, \infty)$，

$$g(x)=g_1(x)+c_0. \tag{1.8}$$

基于上述背景,现在引入数学上的定义:

定义 设 g 是 $(-\infty, \infty)$ 上单调增加右连续函数，称 g 是 $(-\infty, \infty)$ 上的分布. 如果 $g(x)=cx+c_0$，其中 c 和 c_0 是常数，$c>0$，就称 g 为 $(-\infty, \infty)$上的均匀分布.

今后总把相差一个常数的两个单调增加右连续函数，视为同一个分布而不加区分. 在 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$存在的情况下，通常总取满足

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$$

的 g 表示相应的分布,并记

$$g(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=0,$$

在 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$存在时,常记

$$g(\infty)=\lim_{x\to\infty} g(x).$$

满足$g(-\infty)=0$, $g(\infty)=1$ 的 g 就是概率论中的概率分布.

如果均匀分布 $g(x)=cx$ 中的 $c=1$, 显然, $g(x')-g(x)$就是区间$(x, x']$的普通长度(自然这个数值也是一切区间 $\langle x, x'\rangle$ 的普通长度).

***g*-长度** 现在将区间普通长度的概念加以推广. 注意，一切区间本质上是由开区间和单点区间这两种区间的和所构成的.

定义 设 g 是$(-\infty, \infty)$上单调增加右连续函数，对任何有限区间(a, b)和$[a, a]$(即单点集 $\{a\}$)，记

$$\begin{aligned} &g((a, b))=g(b-0)-g(a), \\ &g([a, a])(=g(\{a\}))=g(a)-g(a-0). \end{aligned} \tag{1.9}$$

分别称 $g((a, b))$, $g([a, a])$为(a, b)和$[a, a]$的 g-长度. 规定 $g(\phi)=0$.

定义　设 A 是 $(-\infty, \infty)$ 上点集，如果存在有限个互不相交的有限开区间或单点集 $\langle a_i, b_i\rangle (i=1, 2, \cdots, n)$，使得

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle,$$

称　$A=\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle$ 或 $\{\langle a_i, b_i\rangle | i=1, 2, \cdots, n\}$

为 A 的初等分解.

显然，A 的初等分解并不唯一．例如 $A=(a, b]$ 时，$A=(a, b)\cup\{b\}$ 是 A 的一个初等分解，而对任何 $c\in(a, b]$，$A=(a, c)\cup\{c\}\cup(c, b)\cup\{b\}$ 也是一个初等分解.

定理 1　设 $A=\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle$ 是一个初等分解，记

$$g(A)=\sum_{i=1}^{n}g(\langle a_i, b_i\rangle), \tag{1.10}$$

那末，数值 $g(A)$ 不依赖于初等分解.

证明　假设 $A=\bigcup_{j=1}^{k}\langle a'_j, b'_j\rangle$ 是 A 的另一个初等分解，记

$$\langle a_{ij}, b_{ij}\rangle=\langle a_i, b_i\rangle\cap\langle a'_j, b'_j\rangle (i=1, \cdots, n; j=1, \cdots, k).$$

因为 $\{\langle a_i, b_i\rangle\}\{\langle a'_j, b'_j\rangle\}$ 不是开区间便是单点集，并且分别互不相交，易知对任何 i, j，$\langle a_{ij}, b_{ij}\rangle$ 或是空集或是开区间，或是单点集，当 $(i, j)\neq(i', j')$ 时，$\langle a_{ij}, b_{ij}\rangle\cap\langle a_{i'j'}, b_{i'j'}\rangle=\emptyset$，并且

$$A=\bigcup_{i,j}\langle a_{ij}, b_{ij}\rangle.$$

换言之，$\{\langle a_{ij}, b_{ij}\rangle\}$ 也是 A 的一个初等分解，并且是原来两个初等分解的加细.

对每个 $i(i=1, 2, \cdots, n)$，读者容易按(1.9)直接验证(分 $\langle a_i, b_i\rangle$ 为开区间和单点两种情况)

$$\begin{aligned} g(\langle a_i, b_i\rangle)&=\sum_{j=1}^{k}g(\langle a_{ij}, b_{ij}\rangle),\\ g(\langle a'_j, b'_j\rangle)&=\sum_{i=1}^{n}g(\langle a_{ij}, b_{ij}\rangle). \end{aligned} \tag{1.11}$$

从而由(1.10)得到

$$\sum_{i=1}^{n} g(\langle a_i, b_i\rangle)=\sum_{i}\sum_{j} g(\langle a_{ij}, b_{ij}\rangle)$$
$$=\sum_{j}\sum_{i} g(\langle a_{ij}, b_{ij}\rangle)$$
$$=\sum_{j=1}^{k} g(\langle a'_j, b'_j\rangle).$$

证毕.

系

$$g((a, b])=g(b)-g(a),$$
$$g([a, b])=g(b)-g(a-0),$$
$$g([a, b))=g(b-0)-g(a-0).$$

定义 设 $A=\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle$ 是一个初等分解,称

$$g(A)=\sum_{i=1}^{n} g(\langle a_i, b_i\rangle)$$

为 A 的 g-长度, 当 $g(x)=x$(或 $g(x)=x+c$)时我们特别记 $x(A)$ 为 $m(A)$, 并称为 m-长度[注](它就是普通长度).

这样, 我们就把有限个互不相交的区间的普通长度概念推广成g-长度,并且今后所说的初等分解 $A=\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle$ 中的 $\langle a_i, b_i\rangle$ 可以是互不相交的一般的区间, 而不限于只是开区间或单点集这两种情况了.

g-长度具有类似于普通长度的下列性质:

定理 2 (1) (有限可加性)设 A_1、…、A_n 是有限个互不相交的具有 g-长度的集,那末 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 具有 g-长度,并且

$$g\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} g(A_i).$$

(2) (可减性)设 A、B 是两个具有 g-长度的集, $A\supset B$, 那末 $A-B$ 也具有 g-长度,并且 $g(A-B)=g(A)-g(B)$.

(3) (单调性)设 A、B 是两个具有 g-长度的集,当 $A\supset B$ 时, $g(A)\geqslant g(B)$.

[注] 专用 $m(A)$ 表示 $x(A)$ 是为了避免与自变量 x 记号混淆,这已成为常用记号了.

(4) (次有限可加性)设 A_1、…、A_n 是有限个具有 g-长度的集，那末 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 具有 g-长度，并且 $g\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(A_i)$.

(5) 如果 $g=g_1+g_2$，那末 $g(A)=g_1(A)+g_2(A)$.

证明 (1) 令 $A_i=\bigcup_j \langle a_j^{(i)}, b_j^{(i)}\rangle$ $(i=1, \cdots, n)$ 是 A_i 的初等分解，显然，$\bigcup_i \bigcup_j \langle a_j^{(i)}, b_j^{(i)}\rangle$ 便是 $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 的初等分解，并且

$$g(A)=\sum_{i,j} g(\langle a_j^{(i)}, b_j^{(i)}\rangle)=\sum_i g(A_i).$$

(2) 因为 A、B 都是有限个互不相交的有限区间之和，易知 $A-B$ 也可以分解成有限个互不相交的有限区间之和，所以 $A-B$ 具有 g-长度. 由于 $A=(A-B)\cup B$，而 $(A-B)\cap B=\emptyset$，由(1)得到 $g(A)=g(A-B)+g(B)$. 因为 $g(B)$ 是有限数，所以

$$g(A-B)=g(A)-g(B).$$

(3) 由于对任何具有 g-长度的集 D，$g(D)\geqslant 0$，特别取 $D=A-B$，由(2)立即知道，当 $A\supset B$ 时，$g(A)\geqslant g(B)$.

(4) 因为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i-\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$，而且 $B_i=A_i-\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ 彼此互不相交，易知 B_i 具有 g-长度. 再由(1)，(3)，便有

$$g\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} g(B_i)\leqslant \sum_{i=1}^{n} g(A_i).$$

(5) 从 g-长度定义知道(5)显然成立. 证毕.

3. g 零集

现在介绍重要的 g-零集概念.

定义 设 A 是 $(-\infty, \infty)$ 上点集，如果对任何 $\varepsilon>0$，总存在有限或可列个有限区间 $\{I_n\}$，$I_n=\langle a_n, b_n\rangle$，使得

(1) $A\subset \bigcup_n I_n$;

(2) $\sum_n g(I_n)<\varepsilon$;

那末称集 A 是 g-零集. 特别，当 $g(x)=x$ 时，x-零集称为勒贝格(Lebesgue)零集或 m-零集.

其实，g-零集定义中区间 I_n 可以换成只是开的，即有

引理 1 A 是 $(-\infty, \infty)$ 上 g-零集的充要条件是：对任何 $\varepsilon>0$，总存在有限个或可列个有限开区间 $\{I_n\}$，$I_n=(a_n, b_n)$，使得

(1) $A\subset\bigcup_n I_n$，

(2) $\sum_n g(I_n)<\varepsilon$.

证明 充分性是显然的，今证明必要性如下：

任给 $\varepsilon>0$，因为 A 是 g-零集，按定义存在一列区间 $\{I'_n\}$，$I'_n=\langle a'_n, b'_n\rangle$，满足

$$A\subset\bigcup_n I'_n;\ \sum_n g(I'_n)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对每个 $\langle a'_n, b'_n\rangle$，当点 a'_n(或 b'_n)$\overline{\in}\langle a'_n, b'_n\rangle$ 时，取 $a_n=a'_n$(或 $b_n=b'_n$)，当点 a'_n(或 b'_n)$\in\langle a'_n, b'_n\rangle$ 时，取 $a_n<a'_n$，并且使得

$$g(a'_n-0)-g(a_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$

$\left(\text{或取 } b_n>b'_n,\ \text{并且使得 } g(b_n)-g(b'_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$. 作 $I_n=(a_n, b_n)$，显然，$\langle a'_n, b'_n\rangle\subset(a_n, b_n)$，从而 $A\subset\bigcup_n I_n$. 又由定理 1 的系易知

$$g(I_n)<g(I'_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},$$

$$\sum_n g(I_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon,$$

即 $\{I_n\}$ 满足(1)，(2)．证毕.

定理 3 (1) g-零集的子集必是 g-零集.

(2) 有限个或可列个 g-零集的和集是 g-零集.

(3) 如果 $g=g_1+g_2$，那末 g-零集必同时是 g_1-零集和 g_2-零集[注].

证明 (1) 从 g-零集的定义立即可得.

(2) 不妨设是可列的情况．设 $\{A_n\}$ 是一列 g-零集，给定任何 $\varepsilon>0$，对每个 n，根据 g-零集的定义，存在有限个或可列个开区间 $\{I_j^{(n)}\}$，使得 $A_n\subset\bigcup_j I_j^{(n)}$，并且

[注] 相反的命题也成立，见本节的习题 11.

$$\sum_j g(I_j^{(n)})<\frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{1.12}$$

显然，对一切 n, j, $\{I_j^{(n)}\}$ 仍是可列个开区间的集合，并且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n,j} I_j^{(n)}.$$

由(1.12)易知
$$\sum_n \sum_j g(I_j^{(n)})<\sum_n \frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon,$$

因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是 g-零集.

(3) 从 g-零集定义和定理2的(5)知道(3)显然成立. 证毕.

系　如果 $\{x_n\}$ 是 g 的一列连续点，那末集 $\{x_n\}$[注1] 是 g-零集. 特别，直线上任何可列集是 m-零集.

证明　因为当 x 是 g 的连续点时，

$$g(\{x\})=g(x)-g(x-0)=0.$$

由定理3的(2)，立即得到 $g(\{x_n\})=0$, 特别，当 $g(x)=x$ 时，直线上任何点都是 g 的连续点，所以任何可列集是 m-零集. 证毕.

从定理3的(1)立即得到 $[a, \infty)$ 不是 m-零集，因为如果它是 m-零集，那末 $[a, a+1]$ 也应是 m-零集. 显然，

$$m([a, a+1])=1,$$

它不可能是 m-零集[注2].

显然，定理3的(2)中，不能把可列条件改为不可列的. 例如单点集是 m-零集，可是 $[0, 1]$ 就不是 m-零集.

[注1]　这里"集 $\{x_n\}$"意指由列 $\{x_n\}$ 中点所组成的集. 为简单起见，我们把集和点列都采用同一记号 $\{x_n\}$，今后也常如此.

[注2]　这个事实可用覆盖定理严格证明：如果 $m([a, a+1])=0$, 那末对

$$\varepsilon=\frac{1}{2},$$

必存在一列开区间 $\{(a_\nu, b_\nu)\}$, 使 $[a, a+1]\subset\bigcup_\nu (a_\nu, b_\nu)$, 而且 $\sum_\nu m((a_\nu, b_\nu))<\varepsilon$, 即

$$\sum_\nu (b_\nu-a_\nu)<\varepsilon.$$

由 Borel 覆盖定理，必存在有限个，不妨设为 (a_ν, b_ν), $\nu=1, \cdots, k$, 覆盖 $[a, a+1]$. 由次可加性就有 $1=m([a, a+1])\leq\sum_{1}^{k}(b_\nu-a_\nu)<\varepsilon=\frac{1}{2}$ 的矛盾.

例 1 取 $g(x)=\theta_1(x)$ (Heaviside 函数), 其中

$$\theta_1(x)=\begin{cases}1, & 当 x\geqslant 0 时,\\ 0, & 当 x<0 时.\end{cases}$$

易知单点集 $\{0\}$ 的 g 长度是 $g(\{0\})=\theta_1(0)-\theta_1(0-0)=1$, 集

$$A=(0,\ \infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(0,\ n),$$

而 $g((0,\ n))=\theta_1(n-0)-\theta_1(0)=0$, 所以 $g(A)=0$. 同样, $B=(-\infty,\ 0)$ 时, $g(B)=0$.

例 2 Cantor 集 K 是 m-零集. 事实上, 如第一章 §4 定理 12(1) 所述, K 在 $(0,\ 1)$ 中的余区间全体 $\{I_k^{(n)}\}$ $(k=1,\ \cdots,\ 2^{n-1},\ n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的总长度 $\sum\limits_{n,k}m(I_k^{(n)})=1$, 因而对 $\varepsilon>0$, 必存在 $\{I_k^{(n)}\}$ 中有限个区间, 例如 $I_1,\ \cdots,\ I_k$, 使得

$$\sum_{i=1}^{k}m(I_k)>1-\varepsilon. \tag{1.13}$$

显然, $K\subset[0,\ 1]-\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i$. 根据定理 3 的(2)、(1)和(1.13)式,

$$\begin{aligned}m\left([0,\ 1]-\bigcup_{i=1}^{k}I_i\right)&=m([0,\ 1])-m\left(\bigcup_{i=1}^{k}I_i\right)\\&=1-\sum_{i=1}^{k}m(I_i)<\varepsilon,\end{aligned} \tag{1.14}$$

从而 K 是 m-零集.

4. 几乎处处

在这一小节, 我们要介绍"几乎处处"这个术语.

设 A 是直线上一个点集, P 是与 A 中每个点有关的一个命题. 如果使得命题 P 不成立的 A 中点的全体是一个 g-零集, 我们就说命题 P 在 A 上关于 g 几乎处处成立, 或 g-几乎处处成立.

例如, 设 f_1、f_2 是两个定义在 A 上的有限函数. "f_1、f_2 在 x 点处相等"这个命题在 A 上关于 g 几乎处处成立的意思就是 f_1、f_2 在 A 上不相等的点全体是一个 g-零集, 这也可以说成"f_1、f_2 在 A 上关于 g 几乎处处相等", 记为

$$f_1=f_2(g\text{-}a.e.),\quad 或\quad f_1\underset{g}{=}f_2.$$

"在 x 点处 $f_1(x)>f_2(x)$"这个命题在 A 上关于 g 几乎处处成立的意思就是 f_1 不大于 f_2 的点的全体是一个 g-零集，这又可以说成"在 A 上 g-几乎处处 f_1 大于 f_2"，记为

$$f_1>f_2(g\text{-}a.e.) \quad \text{或} \quad f_1 \underset{g}{>} f_2.$$

类似还有"g-几乎处处大于等于""g-几乎处处小于"……，并有相应的记号.

又如，一列函数 $\{f_n\}$ 在 A 上关于 g 几乎处处收敛于 f，即 $\{f_n\}$ 不收敛，或虽然收敛但极限值不是 f 的值的那种点全体是一个 g-零集，记为

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f(g\text{-}a.e.) \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} f_n \underset{g}{\doteq} f.$$

例 3　$[0, 1]$上 Dirichlet 函数 $D(x)$ 就是关于 m 几乎处处等于 0.

例 4　f_1, f_2 是$[0, 1]$上两个有限函数，$g(x)=\theta_1(x)$ (Heaviside 函数)．显然，只要当 f_1, f_2 在 $x=0$ 点相等，即满足

$$f_1(0)=f_2(0)$$

时，就有 $f_1 \underset{\theta}{\doteq} f_2$；反过来也对，即如果 $f_1 \underset{\theta_1}{\doteq} f_2$，那末必有

$$f_1(0)=f_2(0).$$

例如 $f_1(x)=\operatorname{sign} x$, $f_2(x)=0$，这两个函数关于 θ_1 几乎处处相等，但 f_1, f_2 关于 m 并不几乎处处相等.

例 5　$E(x)$ 表示不超过 x 的最大整数，显然 $E(x)$ 不可微分的点是 $x=0$, ±1, ±2, $\cdots$，这些点全体是 m-零集，但不是 θ_1-零集，所以 $E(x)$ 关于 m 几乎处处可微，而关于 θ_1 不是几乎处处可微的(关于 θ_1 却是几乎处处不可微).

例 6　$(-\pi, \pi)$ 上一列函数

$$f_n=\sum_1^n \frac{1}{k}\cos kx \quad (n=1, 2, \cdots),$$

由微积分学可知，除去 $x=0$ 点处，其它点都收敛，所以 $\{f_n\}$ 关于 m 几乎处处收敛，但关于 θ_1 不几乎处处收敛(却关于 θ_1 几乎处处发散).

习 题

1. 证明直线上任何一个闭集 F, 如果它是 m-零集, 则必是疏朗集.

2. 作一个[0, 1]上的疏朗完全集, 但不是 m-零集.

3. $g(x)=E(x)$($E(x)$是不超过 x 的最大整数), 求出关于 $E(x)$的最大零集(即一切关于 $E(x)$的零集都是它的子集).

4. 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是有限个点, $g(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\theta_1(x-x_\nu)$, 其中$\alpha_\nu>0$, $\nu=1, 2, \cdots, n$, 求出关于 g 的最大零集.

5. 直线上有没有关于 m 的最大零集?

6. 设 g 是$(-\infty, \infty)$上满足 Lipschitz 条件(即存在常数 $M>0$, 使得对任何 x、x', $|g(x)-g(x')|\leqslant M|x-x'|$成立)的单调增加函数, 证明任何一个 m-零集必是 g-零集.

7. 设 $\alpha\geqslant1$,

$$g(x)=\begin{cases}x^\alpha, & \text{当 } x\geqslant0 \text{ 时},\\ -(-x)^\alpha, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

证明任何一个 m-零集必是 g-零集.

8. 证明习题 7 中的 α 满足 $0<\alpha<1$ 时, 结论也成立.

9. 设 g 是$(-\infty, \infty)$上单调增加函数, 处处可微, 并且存在常数 $\alpha>0$, 使得 $g'(x)\geqslant\alpha$($-\infty<x<\infty$), 证明任何一个 g-零集必是 m-零集.

10. 当 $g(x)$为习题 7、8 中函数时, 证明任何一个 g-零集必是 m-零集.

11. 设 g_1、g_2 是$(-\infty, \infty)$上两个单调增加右连续函数, 令 $g=g_1+g_2$. 证明一个集是 g-零集的充要条件是它同时是 g_1-零集和 g_2-零集.

12. 设 E 是$(-\infty, \infty)$上 m-零集. 证明 E 的右移 x_0 的集 $E+x_0=\{x+x_0|x\in E\}$ 和 E 的反射集 $-E=\{-x|x\in E\}$ 都是 m-零集.

§2 $C_1(g)$类函数的勒贝格-斯蒂阶积分

本章从这一节开始, 作为一般性的讨论, 我们将对$(-\infty, \infty)$上事先给定的某个单调增加右连续函数 g 建立勒贝格-斯蒂阶积分, 如无特别申明, 所谓积分, 总是指这个积分. 而对于它的重要特例, 即 $g(x)=x$ 所建立的积分(称为勒贝格积分), 如果有什么区别于一般情况的特别性质, 将个别指出. 因此, 所谓几乎处处都是对给定 g 而言的, 为简单起见, 一般不再标出"关于 g", 除非容易

混淆时，方加注明.

1. C_0 类函数的积分

定义　设 φ 是 $\langle a, b\rangle$ 上的有限实函数，如果 φ 在 $\langle a, b\rangle$ 中有限个互不相交的有限区间 $\langle a_i, b_i\rangle(\subset\langle a, b\rangle)$ 上分别取非零值 $c_i(i=1, 2, \cdots, n)$，其余点上取值是 0，即

$$\varphi(x)=\begin{cases}c_i, & \text{当 } x\in\langle a_i, b_i\rangle \text{ 时}, \ i=1, 2, \cdots, n, \\ 0, & \text{当 } x\in\langle a, b\rangle-\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle \text{ 时}.\end{cases} \tag{2.1}$$

称 φ 为 $\langle a, b\rangle$ 上简单函数，称 $\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle$ 为 φ 的非零定义域.

规定恒为零的函数也是简单函数. 对定义在 $\langle a, b\rangle$ 上的简单函数 φ，常在 $\langle a, b\rangle$ 的余集(关于直线)上补充定义为 0，并视 φ 为 $(-\infty, \infty)$ 上的函数. 简单函数全体记为 C_0，称做 C_0 类.

下面的引理是显然的.

引理 1　设 $\varphi_1, \varphi_2\in C_0$，那末

(1) 对任何实数 α、β，$\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2\in C_0$;

(2) $\varphi_1\varphi_2\in C_0$;

(3) $\max(\varphi_1, \varphi_2)$，$\min(\varphi_1, \varphi_2)\in C_0$;

(4) $|\varphi_1|\in C_0$.

定义　设 $\varphi\in C_0$，当 φ 形为(2.1)时，称下面的值

$$\sum_{i=1}^{n}c_i g(\langle a_i, b_i\rangle) \tag{2.2}$$

为 φ 关于 g 的勒贝格-斯蒂阶积分，记为 $\int_{\langle a, b\rangle}\varphi dg$ (当 φ 是 $\langle a, b\rangle$ 上简单函数时)以及 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi dg$ 或 $\int\varphi dg$(当 φ 是 $(-\infty, \infty)$ 上简单函数).

有时为了和黎曼-斯蒂阶积分区别起见，常在积分号前加上符号"$(L\text{-}S)$"，例如 $(L\text{-}S)\int\varphi dg$.

规定函数 $\varphi=0$ 的积分为 0，特别，如果 $g(x)=x$，值(2.2)称为 φ 的勒贝格积分，记为 $\int_{\langle a, b\rangle}\varphi dx$ 或 $\int_a^b\varphi dx$(当 φ 是 $\langle a, b\rangle$ 上简单

函数)以及$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi dx$或$\int\varphi dx$(当$\varphi$是$(-\infty, \infty)$上简单函数).

有时为了和黎曼积分区别起见,常在积分号前加上"(L)",例如$(L)\int\varphi dx$.

下面是C_0类函数积分的性质.

引理 2 (1) 当$g(x)=x$时,$\int\varphi dg$是φ的黎曼积分;

(2) $\int\varphi dg$不依赖于φ的非零定义域$\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle$的分解形式,即用(2.2)定义积分是一意的;

(3) (非负性)当$\varphi\geqslant 0$时,$\int\varphi dg\geqslant 0$;

(4) (有限可加性)当$\langle a, b\rangle$分解成有限个互不相交的区间$\langle\alpha_i, \beta_i\rangle$ $(i=1, \cdots, m)$的和时,

$$\int_{\langle a, b\rangle}\varphi dg=\sum_{i=1}^{m}\int_{\langle\alpha_i, \beta_i\rangle}\varphi dg;$$

(5) (线性)对任何实数α、β,

$$\int(\alpha\varphi+\beta\psi)dg=\alpha\int\varphi dg+\beta\int\psi dg;$$

(6) (M-L不等式)$\left|\int\varphi dg\right|\leqslant\int|\varphi|dg$;

(7) (唯一性)当$\varphi\geqslant 0$,$\int\varphi dg=0$时,$\varphi\doteq 0$[注];

(8) (次有限可加性)设$\langle a, b\rangle\subset\bigcup_{i=1}^{n}\langle\alpha_i, \beta_i\rangle$,$\varphi\geqslant 0$,那末

$$\int_{\langle a, b\rangle}\varphi dg\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{\langle\alpha_i, \beta_i\rangle}\varphi dg.$$

证明 (1) 是显然的.

(2) 记φ的非零函数值全体为C_1'、$\cdots$、C_k',令

$$A_i=\{x|\varphi(x)=C_i'\},$$

它是有限个互不相交的区间的和,合并(2.2)中相同C_i的项,利用

[注] 正如本节一开始所指出,这里的几乎处处等于零是关于给定的g而言的,不过g被省掉了,今后如无特别申明均如此省略.

g-长度的有限可加性，得到

$$\int \varphi\, dg = \sum_{i=1}^{k} C'_i g(A_i). \tag{2.3}$$

由于 C'_i、$A_i(i=1, \cdots, k)$ 均由函数 φ 自身所唯一确定，而 $g(A_i)$ 的值不依赖于 A_i 的初等分解的形式，所以由(2.3)立即知道 $\int \varphi\, dg$ 不依赖于 φ 的表达式(2.1)的形式。

(3) 是显然的。

(4) 由(2.3)以及 g-长度的有限可加性，

$$\begin{aligned}\int_{\langle a, b\rangle} \varphi\, dg &= \sum_{i=1}^{k} C'_i g(A_i) = \sum_{i=1}^{k} C'_i \left(\sum_{j=1}^{m} g(A_i \cap \langle \alpha_i, \beta_i\rangle)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} C'_i g(A_i \cap \langle \alpha_i, \beta_i\rangle) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\langle \alpha_i, \beta_i\rangle} \varphi\, dg.\end{aligned}$$

最后一个等式是视 φ 为 $\langle \alpha_i, \beta_i\rangle$ 上简单函数，并对 $\langle \alpha_i, \beta_i\rangle$ 用(2.3)得到的。

(5) 取有限开区间 $(-l, l)$，使得 φ、ψ 的非零定义域的闭包都包含在 $(-l, l)$ 中，视 φ, ψ 为 $(-l, l)$ 上两个简单函数，记 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 为 $(-l, l)$ 中或为 φ 或为 ψ 的不连续点全体，记 $x_0 = -l$, $x_{n+1} = l$, 作初等分解

$$(-l, l) = \left(\bigcup_{i=0}^{n} (x_i, x_{i+1})\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}\right),$$

因而 φ、ψ 在每个 $\langle a_i, b_i\rangle$ ($\langle a_i, b_i\rangle$ 或为 (x_i, x_{i+1}) 或为单点集 $\{x_i\}$) 上分别是常数 C_i、$d_i(i=1, 2, \cdots, 2n+1)$. 因此，利用(4)，

$$\begin{aligned}\int (\alpha\varphi + \beta\psi)\, dg &= \sum_i \int_{\langle a_i, b_i\rangle} (\alpha\varphi + \beta\psi)\, dg \\ &= \sum_i \int (\alpha C_i + \beta d_i)\, dg \\ &= \sum_i (\alpha C_i + \beta d_i)\, g(\langle a_i, b_i\rangle) \\ &= \sum_i \left(\alpha \int_{\langle a_i, b_i\rangle} \varphi\, dg + \beta \int_{\langle a_i, b_i\rangle} \psi\, dg\right) \\ &= \alpha \int \varphi\, dg + \beta \int \psi\, dg.\end{aligned}$$

(6) 因为$|\varphi|-\varphi\geqslant 0$, $|\varphi|+\varphi\geqslant 0$, 利用(3)和(5)得到

$$\int|\varphi|dg-\int\varphi dg\geqslant 0,\quad \int|\varphi|dg+\int\varphi dg\geqslant 0,$$

即
$$-\int|\varphi|dg\leqslant\int\varphi dg\leqslant\int|\varphi|dg,$$

从而得到
$$\left|\int\varphi\,dg\right|\leqslant\int|\varphi|dg.$$

(7) 记C_1'、…、C_k'为φ的非零函数值全体, 因为$\int\varphi\,dg=0$, 从(2.3)得到

$$0=\int\varphi\,dg=\sum_{i=1}^{k}C_i'g(A_i).$$

但$C_i'\geqslant 0(i=1, 2, \cdots, k)$, 从而$g\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=0$, 即$\varphi\neq 0$的点全体是$g$-零集, 所以$\varphi\doteq 0$.

(8) 从非负性,有限可加性立即推出次有限可加性. 证毕.

引理3 设$g=g_1+g_2$, g_1、g_2是单调增加右连续函数,那末对任何$\varphi\in C_0$,

$$\int\varphi\,dg=\int\varphi dg_1+\int\varphi dg_2.$$

证明 从(2.3)得到

$$\int\varphi\,dg=\sum_{i=1}^{k}C_i'g(A_i)=\sum_{i=1}^{k}C_i'(g_1(A_i)+g_2(A_i))$$
$$=\int\varphi dg_1+\int\varphi dg_2, \tag{2.4}$$

证毕.

由引理3立即推出, 当$g=\sum_{i=1}^{k}g_i$时, $\int\varphi\,dg=\sum_{i=1}^{k}\int\varphi\,dg_i$.

任何一个$(-\infty, \infty)$上单调增加右连续函数g可以分解成

$$g=g_c+g_d,$$

g_c是单调增加连续函数, 而g_d是右连续的单调增加跳跃函数. 引理3在本书中主要用于$g_1=g_c$, $g_2=g_d$的情况.

例1 设
$$g_d=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\theta_1(x-x_j),$$

其中 $\alpha_j>0(j=1,2,\cdots,k)$，当 $\varphi\in C_0$ 时，

$$\int\varphi dg_d=\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_i)\alpha_i.$$

证明　记 $g_i=d_i\theta_1(x-x_i)$．由引理 3，

$$\int\varphi dg_d=\sum_{i=1}^{k}\int\varphi dg_i=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\varphi(x_i).$$

证毕.

例 2　设 g_d 为 $(-\infty,\infty)$ 上单调增加右连续跳跃函数，$\{x_n\}$ 是 g_d 的不连续点全体，当 $\varphi\in C_0$ 时，

$$\int\varphi dg_d=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(x_i)\alpha_i,\tag{2.5}$$

其中

$$\alpha_i=g(x_i)-g(x_i-0).$$

证明　φ 的表达式为(2.1)，因而

$$\int\varphi dg_d=\sum_{i=1}^{n}C_ig_d(\langle a_i,b_i\rangle)=\sum_{i=1}^{n}C_i\sum_{x_k\in\langle a_i,b_i\rangle}\alpha_k.\tag{2.6}$$

注意对任何有限区间 $\langle a_i,b_i\rangle$，$\sum\limits_{x_k\in\langle a_i,b_i\rangle}\alpha_k<\infty$，并且

$$C_i=\varphi(x_k)\ (x_k\in\langle a_i,b_i\rangle),$$

所以由(2.6)得到

$$\int\varphi dg_d=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x_k\in\langle a_i,b_i\rangle}\varphi(x_k)\alpha_k=\sum_{x_k\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}\langle a_i,b_i\rangle}\varphi(x_k)\alpha_k.\tag{2.7}$$

但当

$$x_k\bar{\in}\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i,b_i\rangle$$

时，$\varphi(x_k)=0$，所以(2.7)式就是(2.5)．证毕.

例 3　g_c 是 $(-\infty,\infty)$ 上单调增加连续函数，当 $\varphi\in C_0$ 并且用(2.1)表达时，

$$\begin{aligned}\int\varphi dg_c&=\sum_{i=1}^{n}C_ig_c((a_i,b_i))=\sum_{i=1}^{n}C_ig_c((a_i,b_i])\\&=\sum_{i=1}^{n}C_ig_c([a_i,b_i))=\sum_{i=1}^{n}C_ig_c([a_i,b_i]),\end{aligned}$$

这是因为当 g_c 连续时，任何单点集 $\{a\}$，$\{b\}$ 的 g_c-长度是零.

例 1～3 是简单的，但是重要的，读者务必掌握好，这对学习后面内容是有益的.

2. $C_1(g)$类函数的积分

为了将 C_0 类函数积分按(i)、(ii)方式推广到更广的函数类上，先证下面的引理：

引理 4 设 $\{\varphi_n\}\subset C_0$，并且满足：

(1) $\varphi_1\geqslant\varphi_2\geqslant\cdots\geqslant\varphi_n\geqslant\cdots$, $\varphi_n\geqslant 0(n=1, 2, \cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\doteq 0$;

那末 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n dg=0$.

证明 因 $g=g_c+g_d$. 根据§1定理3的(3)，由(2)可推出

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\underset{g_c}{\doteq}0,\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n\underset{g_d}{\doteq}0$$

同时成立. 又根据引理3，要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n dg=0$ 只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg_c=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg_d=0$$

就可以了，即只要分别在 g 为连续、跳跃的情况下证明引理4即可.

记 $M=\max\varphi_1(x)$. 又设 $(-l, l)$ 包含 φ_1 的非零定义域的闭包，从而对一切 $n\geqslant 1$, $\varphi_n(x)\leqslant M$，并且 φ_n 的非零定义域的闭包包含在 $(-l, l)$ 中.

(1) g 为跳跃的情况：设 $\{x_n\}$ 是 g 在 $[-l, l]$ 中不连续点全体，按跳跃函数的定义，

$$\sum_n(g(x_n)-g(x_n-0))<\infty \tag{2.8}$$

因此，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，使得

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty}(g(x_n)-g(x_n-0))<\frac{\varepsilon}{2(M+1)}. \tag{2.9}$$

由假设(2)，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_i)=0(i=1, 2, \cdots, N_0)$，从而存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\sum_{i=1}^{N_0}\varphi_n(x_i)(g(x_i)-g(x_i-0))<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

从(2.9)，(2.10)就得到：当 $n\geqslant N$ 时，

$$\int \varphi_n dg = \sum_i \varphi_n(x_i)(g(x_i)-g(x_i-0))$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{N_\nu}+\sum_{N_\nu+1}^{\infty}\right)\varphi_n(x_i)(g(x_i)-g(x_i-0))<\varepsilon,$$

即引理 4 在 g 为跳跃的情况已被证得.

(II) g 为连续的情况：因为每个 $\varphi_n(n=1, 2, \cdots)$ 的不连续点是有限集，因而一切 $\{\varphi_n\}$ 的不连续点全体再加上 $-l$, l 两点最多是可列集，记为 $\{y_n\}$. 根据 §1 定理 2 的系，$\{y_n\}$ 是 g-零集，再记 E 是

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\neq 0$$

的点全体. 由假设(2)，E 是 g-零集，所以 $E\cup\{y_n\}$ 也是 g-零集，从而存在可列个开区间 $\{(\alpha_\nu, \beta_\nu)\}$，使得

$$\bigcup_\nu(\alpha_\nu, \beta_\nu)\supset(\{y_n\}\cup E),$$

并且

$$\sum_\nu(g(\beta_\nu)-g(\alpha_\nu))<\frac{\varepsilon}{2(M+1)}. \tag{2.11}$$

对于每个 $x\in[-l, l]-(\{y_n\}\cup E)$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$，所以存在 $N(x)$，当 $n>N(x)$ 时，

$$\frac{1}{1+g(l)-g(-l)}\,\frac{\varepsilon}{2}>\varphi_N(x)\geqslant\varphi_{N+1}(x)\geqslant\cdots. \tag{2.12}$$

这时，x 不是 φ_N 的不连续点，因此，存在包含 x 的一个开区间 (λ_N, μ_N)，使得 φ_N 在 (λ_N, μ_N) 上为常数. 由(2.12)，一切 $\varphi_n(x)$ $(n\geqslant N)$ 在 (λ_N, μ_N) 上的值均小于 $\dfrac{1}{1+g(l)-g(-l)}\,\dfrac{\varepsilon}{2}$. 这样，区间集 $\{(\lambda_N, \mu_N)\}\cup\{(\alpha_\nu, \beta_\nu)\}$ 覆盖 $[-l, l]$，由 Borel 覆盖定理，存在有限个开区间

$$(\lambda_{N_1}, \mu_{N_1}), \cdots, (\lambda_{N_k}, \mu_{N_k})$$
$$(\text{不妨设 } N_1<N_2<\cdots<N_k);$$
$$(\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_m, \beta_m)$$

覆盖 $[-l, l]$. 因此当 $n\geqslant N_k$ 时，由于(2.11)、(2.12)，

$$
\begin{aligned}
\int \varphi_n dg = \int_{(-l,l)} \varphi_n dg \leqslant & \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k}(\lambda_{N_i},\mu_{N_i})} \varphi_n dg + \int_{\bigcup\limits_{j=1}^{n}(\alpha_j,\beta_j)} \varphi_n dg \\
& \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{g(-l)-g(l)+1}(g(l)-g(-l)) \\
& \quad + \frac{\varepsilon}{2(M+1)} M \\
& < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

即在 g 为连续的情况下，引理 4 也成立．证毕．

设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上的有限实函数，作

$$
f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x) \geqslant 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } f(x) < 0 \text{ 时}, \end{cases}
$$

即 $$f^+(x) = \max(f(x), 0) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)),$$

$$
f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \geqslant 0 \text{ 时}, \\ -f(x), & \text{当 } f(x) < 0 \text{ 时}, \end{cases}
$$

即 $$f^-(x) = \max(-f(x), 0) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

分别称 f^+、f^- 为 f 的正部、负部(函数)．

显然，当 $\{f_n\}$ 是单调序列时，$\{f_n^+\}$ 也是单调的序列，当序列 $\{f_n\}$几乎处处收敛于 f 时，$\{f_n^+\}$ 也几乎处处收敛于 f^+．

引理 5 设 $\{\varphi_n\}$、$\{\psi_n\}$ 是两个简单函数的单调增加序列，并且

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \psi_n$$

(此地也可允许收敛的极限值为无限大[注])，那末

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n dg \leqslant \lim_{n\to\infty} \int \psi_n dg \tag{2.13}$$

(此地也可允许收敛的极限值为无限大[注])．

证明 从 $\{\varphi_n\}$ 中取定一个 φ_m，考察序列 $\{(\varphi_m - \psi_n)^+\}$，它是 U_0 中序列，并且随 n 的增加而单调减少，当 $n\to\infty$ 时，

[注] 本书中如无特别申明，"收敛"一般是指收敛于有限值，个别场合为了叙述方便，也用"收敛于 $+\infty$"或"收敛于 $-\infty$"．

$$(\varphi_m(x)-\psi_n(x))^+ \longrightarrow (\varphi_m(x)-\lim_{n\to\infty}\psi_n(x))^+ \quad (n\to\infty).$$

由于 $\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_m\leqslant\cdots$，所以

$$\varphi_m(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\psi_n(x).$$

因而对每个 m，

$$(\varphi_m-\lim_{n\to\infty}\psi_n)^+ \doteq 0.$$

由引理 4，

$$\lim_{n\to\infty}\int(\varphi_m-\psi_n)\,dg\leqslant\lim_{n\to\infty}\int(\varphi_m-\psi_n)^+\,dg=0,$$

因此，对每个 m，

$$\int\varphi_m dg\leqslant\lim_{n\to\infty}\int\psi_n dg.$$

再令 $m\to\infty$，就得到(2.13)．证毕．

定理 1　设 $\{\varphi_n\}$、$\{\psi_n\}$ 是两个简单函数的单调增加序列，如果

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\doteq\lim_{n\to\infty}\psi_n,$$

那末

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg=\lim_{n\to\infty}\int\psi_n dg. \qquad (2.14)$$

证明　在定理的假设下，有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\psi_n,\quad \lim_{n\to\infty}\psi_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\varphi_n,$$

由引理 5 得到

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg\leqslant\lim_{n\to\infty}\int\psi_n dg,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int\psi_n dg\leqslant\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg.$$

有了上面的准备，我们就可引入下面的定义：

定义　设 f 是 $\langle a,\ b\rangle$ 上有限实函数，如果存在 C_0 中序列 $\{\varphi_n\}$，满足

（i）$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots$，且 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n\doteq f$；

（ii）$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg\leqslant A<\infty$；

就称 f 是(关于 g 的)C_1 类函数，(关于 g 的)C_1 类函数全体记为 $C_1(g)$. 当 $f\in C_1(g)$时，称 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n dg$ 为 f(关于 g)的勒贝格–斯蒂阶积分，简称为$(L\text{-}S)$积分，记为 $\int_{\langle a,b\rangle} fdg$. 特别，当 $g(x)=x$ 时，称 $\int_{\langle a,b\rangle} fdg$ 为 f 的勒贝格积分，简称为(L)积分，记为$\int_{\langle a,b\rangle} fdx$ 或 $(L)\int_{\langle a,b\rangle} fdx$.

引理 5 能保证上面定义是恰当的，即 $\langle a, b\rangle$ 上 $C_1(g)$中函数 f 的积分不依赖于(关于 g)几乎处处收敛于它的 C_0 类中单调序列 $\{\varphi_n\}$ 的选取.

例 4 对任何 g，总有 $C_0\subset C_1(g)$，并且 C_0 中任何函数 φ 按 C_0 意义(关于 g)的积分就是按 $C_1(g)$ 意义(关于 g)的积分. 这是因为恒取 $\varphi_n=\varphi$ 就可以了. 由定义及引理 5 便知道上述结论是显然的.

例 5 记$[a, b]$上连续函数全体为 $C[a, b]$，那末 $C[a, b]$ 包含在$[a, b]$上的 $C_1(g)$类中，并且对任何 $f\in C[a, b]$，f 在$[a, b]$上(关于 g) 的勒贝格–斯蒂阶积分就是 f 关于 g 的黎曼–斯蒂阶积分.

证明 任取$[a, b]$上分点组 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，作 C_0 类函数

$$\varphi(x)=\begin{cases} m_1, & \text{当 } x\in[x_0,\ x_1]\text{时},\\ m_{i+1}, & \text{当 } x\in(x_i,\ x_{i+1}]\text{时}, \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),\end{cases}$$

$$m_{i+1}=\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x), \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

显然，任取一列分点组 $\{D_m\}$，如果 $D_m\subset D_{m+1}(m=1,\ 2,\ \cdots)$，那末相应作出的 $\{\varphi_m\}$ 是 C_0 类中单调序列，由于 f 在$[a, b]$上连续，所以存在常数 M，使得$|\varphi_n(x)|\leqslant M(x\in[a, b])$，从而

$$\int\varphi_n dg\leqslant M(g(b)-g(a-0))<\infty.$$

另一方面，由于 f 在$[a, b]$上均匀连续，所以当 D_n 的相邻分点最大距离 $\delta_n\to 0$ 时，$\{\varphi_n\}$ 一致收敛于 f(自然，更有(关于 g)几乎处处

收敛于 f)，因而从 $C_1(g)$ 的定义知道，$f\in C_1(g)$. 显然，$\int\varphi_n dg$ 正是在分点组 D_n 下，f 关于 g 的(见第一章§5)小和数. 由黎曼-斯蒂阶积分存在性定理(见第一章§5)，就得到

$$\int fdg=\lim\int\varphi_n dg$$

是 f 关于 g 的黎曼-斯蒂阶积分. 证毕.

例 6　设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上 $C_1(g)$ 类函数. 当

$$\langle a, b\rangle\neq(-\infty, \infty)$$

时，如果将 f 在 $(-\infty, \infty)-\langle a, b\rangle$ 上补充规定为零，这时得到 $(-\infty, \infty)$ 上函数 $\hat{f}$ (是 f 的一种特殊的延拓)，那末 $\hat{f}$ 必属于 $(-\infty, \infty)$ 上 $C_1(g)$ 类，并且

$$\int_{(-\infty,\infty)}\hat{f}dg=\int_{\langle a, b\rangle}fdg.$$

这是显然的. 因为从 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上 $C_1(g)$ 类函数的假设可知，存在 $\langle a, b\rangle$ 上一列简单函数 $\{\varphi_n\}\subset C_0$，满足定义中(i)、(ii)条件，但 $\{\varphi_n\}$ 本身就是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的函数，显然，在 $(-\infty, \infty)$ 上，$\{\varphi_n\}$ 对 $\hat{f}$ 来说满足定义中的(i)、(ii)，因而

$$\int_{(-\infty,\infty)}\hat{f}dg=\lim_{n\to\infty}\int_{(-\infty,\infty)}\varphi_n dg$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\langle a, b\rangle}\varphi_n dg=\int_{\langle a, b\rangle}fdg.$$

今后为了叙述方便，对于区间 $\langle a, b\rangle$ 上 $C_1(g)$ 类函数 f，当 $\langle a, b\rangle\neq(-\infty, \infty)$ 时，我们总是按上述方式把 f 视为 $(-\infty, \infty)$ 上的函数(即不区分 $\hat{f}$ 与 f). 因此，今后除必要外，一般情况下不强调"$\langle a, b\rangle$ 上" $C_1(g)$ 类，而统说成 $C_1(g)$ 类.

另一个重要的 $C_1(g)$ 类函数的例子如下：

例 7　设 $\{I_i\}$ 是一列互不相交的有限区间，并且

$$\sum_{i=1}^{\infty}g(I_i)<\infty. \text{ 记 } B=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i,$$

那末 B 的特征函数 $\chi_B(x)\in C_1(g)$，并且

$$\int \chi_B dg = \sum_{i=1}^{\infty} g(I_i).$$

事实上，因为 $B=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，所以

$$\chi_B = \sum_1^{\infty} \chi_{I_i} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \chi_{I_i}.$$

而 $\varphi_k = \sum_{i=1}^{k} \chi_{I_i}$ 是 C_0 类函数，并且

$$\int \sum_1^k \chi_{I_i} dg = \sum_1^k g(I_i) \leqslant \sum_1^{\infty} g(I_i) < \infty,$$

所以 $\chi_B \in C_1(g)$，并且

$$\int \chi_B dg = \lim_{k\to\infty} \int \sum_1^k \chi_{I_i} dg = \lim_{k\to\infty} \sum_1^k g(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(I_i).$$

设集 B 能表示成可列个互不相交的区间 $\{I_i\}$ 的和，

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

利用 $C_1(g)$ 类的积分定义的一意性和例 7，对于这种集 B，我们也规定它的 g-长度为

$$g(B) = \int \chi_B dg = \sum_{i=1}^{\infty} g(I_i).$$

这样，我们就把 g-长度的概念推广到这类集上．如果 $\{I_i\}$ 是一列区间，并且 $\sum_i g(I_i) < \infty$，那末 $B = \bigcup I_i$ 便也有 g-长度，并且有下面的（次可列可加）性质：

$$g(B) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} g(I_i).$$

事实上，因为
$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(I_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} I_j \right),$$

而 $\left\{ I_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} I_j \right\}$ 是互不相交的，并且对每个 i，$I_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} I_j$ 是有限个互不相交的区间 $\{I'_j, j=1, 2, \cdots, j_i\}$ 的和，

$$I_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} I_j = \bigcup_{j=1}^{j_i} I'_j,$$

从而
$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{j_i} I'_j.$$

因此
$$g(B)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_i}g(I'_j)=\sum_{i=1}^{\infty}g\left(I_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}I_j\right)$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}g(I_i).$$

我们将在第三章进一步把 g-长度推广到更复杂的点集上，并将研究那种集上"g-长度"的性质，这里不拟多加讨论。下面给出 $C_1(g)$ 类函数积分的初等性质。

定理 2　设 $f,\ h\in C_1(g)$.

(1) 如果 $f\doteq k$，那末 $k\in C_1(g)$，并且 $\int fdg=\int kdg$.

(2) (单调性)如果 $f\leqslant h$，那末 $\int fdg\leqslant\int hdg$.

(3) (可加性) $f+h\in C_1(g)$，并且
$$\int(f+h)dg=\int fdg+\int hdg.$$

(4) (非负齐性)对任何非负实数 α，必有 $\alpha f\in C_1(g)$，并且
$$\int(cf)dg=c\int fdg.$$

(5) (区间可加性)设 $\langle a,\ b\rangle=\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i,\ b_i\rangle$ 是 $\langle a,\ b\rangle$ 的初等分解，那末 f 是 $\langle a,\ b\rangle$ 上 $C_1(g)$ 类函数的充要条件是 f 是 $\langle a_i,\ b_i\rangle$ 上 $C_1(g)$ 类函数，而当 f 在 $\langle a,\ b\rangle$ 上可积时
$$\int_{\langle a,b\rangle}fdg=\sum_{i=1}^{n}\int_{\langle a_i,b_i\rangle}fdg.$$

(6) 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\varphi\in C_0$，使得 $\varphi\leqslant f$，并且
$$\int fdg<\int\varphi dg+\varepsilon.$$

证明　设 $\{\varphi_n\}$、$\{\psi_n\}$ 是分别对 f、h 满足定义中条件(i)、(ii)的两个 C_0 类单调序列，即
$$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots,\quad\psi_1\leqslant\psi_2\leqslant\cdots\leqslant\psi_n\leqslant\cdots,$$
$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\doteq f,\quad\lim_{n\to\infty}\psi_n\doteq h,$$
$$\int\varphi_n dg\leqslant A<\infty,\quad\int\psi_n dg\leqslant B<\infty,\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

(1) 由$C_1(g)$类函数积分的定义即得.

(2) 由引理5立即得到(1).

(3) 显然$\{\varphi_n+\psi_n\}$是C_0中单调序列，并且

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi_n+\psi_n)\doteq f+h,$$

$$\int(\varphi_n+\psi_n)dg\leqslant A+B<\infty \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

因而$f+h\in C_1(g)$. 注意到

$$\int(\varphi_n+\psi_n)dg=\int\varphi_n dg+\int\psi_n dg,$$

从而

$$\int(f+h)dg=\lim_{n\to\infty}\int(\varphi_n+\psi_n)dg$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg+\lim_{n\to\infty}\int\psi_n dg$$

$$=\int fdg+\int hdg.$$

(3)证得.

(4) 因为$\alpha\geqslant0$，所以$\{\alpha\varphi_n\}$仍是C_0类中单调序列，并且

$$\lim_{n\to\infty}\alpha\varphi_n=\alpha\lim_{n\to\infty}\varphi_n\doteq\alpha f,$$

$$\int(\alpha\varphi_n)dg\leqslant\alpha A<\infty \quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

因而$\alpha f\in C_1(g)$，并且

$$\int(\alpha f)dg=\lim_{n\to\infty}\int(\alpha\varphi_n)dg=\alpha\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg=\alpha\int fdg,$$

即(4)成立.

(5) 因为对任何$\varphi\in C_0$，显然$-\varphi\in C_0$，因而当$f\in C_1(g)$时，$f-\varphi_1=f+(-\varphi_1)\in C_1(g)$. 反之，如果$f-\varphi_1\in C_1(g)$，那末

$$f=(f-\varphi_1)+\varphi_1\in C_1(g).$$

因此，证明(5)时，不妨假设$\{\varphi_n\}$是非负的单调增加序列，即不妨设f是(关于g几乎处处)非负的$C_1(g)$类函数(否则用$\{\varphi_n-\varphi_1\}$，$f-\varphi_1$分别代替$\{\varphi_n\}$，f即可).

如果f是$\langle a,\ b\rangle$上$C_1(g)$类函数，那末$\{\varphi_n\}$在每个$\langle a_i,\ b_i\rangle$($i=1,\ \cdots,\ k$)上仍几乎处处收敛于f. 又由于$\varphi_n\geqslant0$，所以

$$\int_{\langle a_i,b_i\rangle}\varphi_n dg\leqslant\int_{\langle a,b\rangle}\varphi_n dg=\int\varphi_n dg\leqslant A<\infty,\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

因而 f 是 $\langle a_i,\ b_i\rangle(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 上 $C_1(g)$ 类函数.

反之，如果 f 是 $\langle a_i,\ b_i\rangle(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 上 $C_1(g)$ 类函数，那末存在 $\{\varphi_n^{(i)}\}\subset C_0$，固定 $i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，$\{\varphi_n^{(i)}\}$ 是单调增加序列，$\varphi_n^{(i)}(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 的非零定义域包含在 $\langle a_i,\ b_i\rangle$ 中，并且在 $\langle a_i,\ b_i\rangle$ 上，

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(i)}\doteq f,$$

$$\int_{\langle a_i,b_i\rangle}\varphi_n^{(i)}dg\leqslant A_i<\infty\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k).$$

由此，作非零定义域在 $\langle a,\ b\rangle$ 中的 C_0 类函数列

$$\varphi_n(x)=\varphi_n^{(i)}(x),\quad x\in\langle a_i,\ b_i\rangle,$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k;\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

显然，$\{\varphi_n(x)\}$ 是 C_0 类单调序列，并且在 $\langle a,\ b\rangle$ 上，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\doteq f$，又

$$\int\varphi_n dg=\sum_{i=1}^{k}\int\varphi_n^{(i)}dg\leqslant\sum_{i=1}^{k}A_i<\infty,$$

由此可知 f 是 $\langle a,\ b\rangle$ 上 $C_1(g)$ 类.

利用 $\int\varphi_n dg=\sum\limits_{i=1}^{k}\int\varphi_n^{(i)}dg$ 立即得到(5)中积分等式也成立.

(6) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n dg=\int f dg$，所以对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\int f dg\leqslant\int\varphi_n dg+\varepsilon$. 特别取 $\varphi=\varphi_N$ 就可以了. 证毕.

例 8　设 f 是 $[a,\ b]\ (b\neq a)$ 上 $C_1(g)$ 类函数，如果 a、b 是 g 的连续点，那末对任何 $\langle a,\ b\rangle$，

$$\int_{\langle a,b\rangle}f dg=\int_{[a,b]}f dg.$$

证明　因为非零定义域包含在 $[a,\ a]$（即单点集 $\{a\}$）上的 C_0 类函数的一般形式就是

$$\varphi(x)=\begin{cases}C, & \text{当 } x=a \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\neq a \text{ 时}.\end{cases}$$

因为 $g(\{a\})=0$，显然这种 φ 的积分

$$\int_{[a,a]}\varphi dg=Og(\{a\})=0,$$

因而由定理2的(5)知道

$$\int_{[a,a]}fdg=0\quad\left(类似可得到\int_{[b,b]}fdg=0\right),$$

从而再利用定理2的(5)立即得到

$$\int_{(a,b)}fdg=\int_{[a,b]}fdg.$$

因此，今后如果a, b是g的连续点时，积分$\int_{(a,b)}fdg$常记为$\int_a^b fdg$, 特别当$g(x)=x$时，$(L)\int_{(a,b)}fdx$也可表示成$\int_a^b fdx$.

定理3 设$\{f_n\}$是$C_1(g)$中序列，满足

(i) $f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$;

(ii) $\int f_n dg\leqslant A<\infty$, $n=1, 2, \cdots$;

那末，必存在$C_1(g)$类中函数f, 使得$f\doteq\lim\limits_{n\to\infty}f_n$, 而且

$$\int fdg=\lim_{n\to\infty}\int f_n dg,$$

即

$$\int\lim_{n\to\infty}f_n dg=\lim_{n\to\infty}\int f_n dg.$$

证明 分两步证明.

(I) 设$\{f_n\}$是C_0中序列. 记$\varphi_n=f_n(n=1, 2, \cdots)$, 不失一般性，设$\varphi_1\geqslant 0$(否则，考察$\{\varphi_n-\varphi_1\}$即可). 因为$\{\varphi_n\}$是单调增加序列，所以在每点$x\in(-\infty, \infty)$上，极限存在(极限值可暂时允许无限大), 记极限函数为$f_0(x)$. 如果证明了集

$$E=\{x\mid\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\infty\}$$

是g-零集，那末函数$f(x)$,

$$f(x)=\begin{cases}f_0(x), & 当x\overline{\in}E时,\\ 0, & 当x\in E时,\end{cases}$$

就满足定理的结论了.

今证E是g-零集，对任何$\varepsilon>0$, 取自然数$N>\frac{A}{\varepsilon}$, 记

$$E_{n_N}=\{x\mid\varphi_n(x)>N\}.$$

对任何 $x\in E$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\infty$, 因此必有 n, 使得 $x\in E_{n_N}$, 所以

$$E\subset\sum_{n=1}^{\infty}E_{n_N}.$$

记

$$F_{1_N}=E_{1_N},\quad F_{k_N}=E_{k_N}-\bigcup_{j=1}^{k-1}E_{j_N},$$

$\{F_{k_N}\}$ 彼此是不相交的, 而且, 记 $F_{k_N}=\bigcup\limits_{i=1}^{i_k}\Delta_i^{(k)}$ 是它的初等分解, 于是

$$E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{k_N}=\bigcup_{k,i}\Delta_i^{(k)}. \tag{2.15}$$

只要证明 $\sum\limits_{k,i}g(\Delta_i^{(k)})<\varepsilon$, 那末 E 便是 g-零集了. 事实上, 对任何 $m\geqslant n$, 由积分单调性,

$$g(\Delta_i^{(n)})\leqslant\frac{1}{N}\int_{\Delta_i^{(n)}}\varphi_n(x)dg\leqslant\frac{1}{N}\int_{\Delta_i^{(n)}}\varphi_m(x)dg. \tag{2.16}$$

注意到 $\{\Delta_i^{(n)}\}$ 彼此互不相交, 由(2.16)得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\sum_{i=1}^{i_n}g(\Delta_i^{(n)})&\leqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{N}\int_{F_{n_N}}\varphi_n dg\\&\leqslant\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{m}\int_{F_{n_N}}\varphi_m dg\leqslant\frac{1}{N}\int_{(a,b)}\varphi_m dg\\&\leqslant\frac{A}{N}<\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$, 便得到 $\sum\limits_{n,i}g(\Delta_i^{(n)})<\varepsilon$, 所以 E 是 g-零集.

(II) 设 $\{f_n\}$ 是 $C_1(g)$ 中序列, 对每个 n, 必有 C_0 中单调增加序列 $\{\varphi_{nk}\}$ 几乎处处收敛于 f_n, 并且

$$\int f_n dg=\lim_{k\to\infty}\int\varphi_{nk}dg.$$

由于可列个 g-零集的和仍是 g-零集, 从而存在 g-零集 E, 当 $x\in E$ 时,

$$\begin{aligned}&\varphi_{11}(x)\leqslant\varphi_{12}(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_{1n}(x)\leqslant\cdots\longrightarrow f_1(x),\\&\varphi_{21}(x)\leqslant\varphi_{22}(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_{2n}(x)\leqslant\cdots\longrightarrow f_2(x),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\varphi_{n1}(x)\leqslant\varphi_{n2}(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_{nn}(x)\leqslant\cdots\longrightarrow f_n(x),$$

....

作 C_0 中函数

$$\varphi_n(x)=\max(\varphi_{1n}(x),\ \cdots,\ \varphi_{nn}(x)),$$

$n=1,\ 2,\ \cdots$. 显然,

$$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots \tag{2.18}$$

当 $x\in E$ 时, $\varphi_{nk}(x)\leqslant f_k(x)$, 所以

$$\varphi_n(x)\leqslant\max(f_1(x),\ \cdots,\ f_n(x))=f_n(x). \tag{2.19}$$

由 $C_1(g)$ 类积分单调性,

$$\int\varphi_n dg\leqslant\int f_n dg\leqslant A. \tag{2.20}$$

由(2.18)、(2.20)以及(I)证明的结果知道, 存在 $f\in C_1(g)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\doteq f,$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg=\int fdg. \tag{2.21}$$

下面只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n\doteq f$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n dg=\int fdg$ 即可.

由(2.19), 当 $x\in E$, $k\leqslant n$ 时,

$$\varphi_{kn}(x)\leqslant\varphi_n(x)\leqslant f_n(x).$$

令 $n\to\infty$ 便得到

$$f_k(x)\leqslant f(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}f_n(x). \tag{2.22}$$

再令 $k\to\infty$, 就得到当 $x\in E$ 时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. 即

$$f\doteq\lim_{n\to\infty}f_n$$

成立.

利用 $C_1(g)$ 类中积分的单调性于(2.22)的第一个不等式, 便得到

$$\int f_k dg\leqslant\int fdg. \tag{2.23}$$

在(2.20)中令 $n\to\infty$, 就得到 $\lim\limits_{k\to\infty}\int f_k dg\geqslant\int fdg$; 又在(2.23)中令

$k\to\infty$，立即得到

$$\int f dg \geqslant \lim_{k\to\infty}\int f_k dg,$$

从而

$$\int f dg = \lim_{n\to\infty}\int f_n dg.$$

证毕.

定理 3 说明 $C_1(g)$ 类对单调序列极限具有某种封闭性.

下面是定理 3 的级数形式，以后常用这个形式.

系　设 $\{h_k\}\subset C_1(g)$，$h_k\geqslant 0$. 如果 $\sum_{k=1}^{\infty}\int h_k dg<\infty$，则必存在 $f\in C_1(g)$，使得

$$f \doteq \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x),\quad 且\quad \int f dg = \sum_{k=1}^{\infty}\int h_k dg. \tag{2.24}$$

证明　只要令 $f_n=\sum_{k=1}^{n} h_k$，由定理 3 立即得到系.

注意，定理 3 中条件(i)换成下面的条件，

$$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots,$$

结论仍成立.

当然，对于 $C_1(g)$ 类，我们还可以给出一些性质，例如有限可加性等，但由于 $C_1(g)$ 还不是扩大的最终的函数类，所以不在这里多讨论.

3. 黎曼可积函数

现在考察 $[a, b]$ 区间上黎曼可积函数和特殊的 $C_1(g)$，即

$$g(x)=x$$

的函数类的关系. 为此，我们先证明引理 4 的逆命题（对一般的 g）.

引理 6　设 $\{\varphi_n\}\subset C_0$，并且满足：

(i) $\varphi_1\geqslant\varphi_2\geqslant\cdots\geqslant\varphi_n\geqslant\cdots$，$\varphi_n\geqslant 0$　$(n=1, 2, \cdots)$；

(ii) $\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg=0$；

那末 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n \doteq 0$.

证明 由假设(i)知道,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$ 存在,记为 φ,今证在

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg=0$$

的条件下 $\varphi\doteq 0$. 作集

$$F_m=\left\{x\,\middle|\,\varphi(x)\geqslant\frac{1}{m}\right\},\quad m=1,\ 2,\ \cdots.$$

显然,
$$\left\{x\,\middle|\,\varphi(x)\neq 0\right\}=\sum_{m=1}^{\infty}F_m,$$

于是只要证明每个 F_m 是 g-零集就可以了.

对任何 $\varepsilon>0$, 必有 n, 使得 $\int\varphi_n dg<\frac{\varepsilon}{m}$, 当 $x\in F_m$ 时,

$$\varphi_n(x)\geqslant\varphi(x)\geqslant\frac{1}{m}. \tag{2.25}$$

因此,
$$\left\{x\,\middle|\,\varphi_n(x)\geqslant\frac{1}{m}\right\}\supset F_m.$$

但集 $\left\{x\,\middle|\,\varphi_n(x)\geqslant\frac{1}{m}\right\}$ 必为有限个互不相交的区间 I_1、$\cdots$、I_k 的和, φ_j 在每个 I_j 上都满足 $\varphi_n\geqslant\frac{1}{m}$, 因而

$$\frac{\varepsilon}{m}>\int\varphi_n dg\geqslant\sum_{j=1}^{k}\int_{I_j}\varphi_n dg\geqslant\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{k}g(I_j), \tag{2.26}$$

所以 $\sum\limits_{j=1}^{k}g(I_j)<\varepsilon$. 因此, F_m 是 g-零集. 证毕.

定理4 f 是 $[a,\ b]$ 上黎曼可积函数的充要条件是 f 满足下面两个条件:

(1) f 是有界的;

(2) f 的不连续点全体是一个 m-零集.

证明 首先注意,如果 f 黎曼可积,那末对任何 $\varepsilon>0$, 必存在 λ_0, 当分点组

$$D:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

满足 $\lambda=\max\limits_i(x_i-x_{i-1})<\lambda_0$ 时

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-(R)\int_a^b f dx\right|<\varepsilon,$$

其中 $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$，从而对任何k

$$|f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|\leqslant\varepsilon+\left|(R)\int_a^b fdx\right|+\sum_i{}'|f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})|, \qquad (2.27)$$

其中 $\sum'$ 表示缺掉第 k 项．特别，取 $\varepsilon=1$，取定适合上述条件的一个分点组 D，并取 $\xi_i=x_i(i\neq k)$，而让 ξ_k 在$[x_{k-1}, x_k]$中任意变化，由(2.27)立即得到

$$|f(\xi_k)|\leqslant\frac{1}{x_k-x_{k-1}}\times\left[1+\left|(R)\int_a^b fdx\right|+\sum_i{}'|f(x_i)(x_i-x_{i-1})|\right]. \qquad (2.28)$$

这说明 f 在$[x_{k-1}, x_k]$上有界．因为 k 是任意取的，从而 f 在$[a, b]$有界．

因此，定理 4 等价于对$[a, b]$上有界函数 f，它是黎曼可积的充要条件是 f 的不连续点全体是 m-零集．

对$[a, b]$上有界函数，任取分点组 D：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，作大、小和式

$$\overline{\sigma}(D, f)=\sum_i M_i(x_i-x_{i-1}),$$
$$\underline{\sigma}(D, f)=\sum_i m_i(x_i-x_{i-1}),$$

其中 M_i、m_i 分别是 f 在$[x_{i-1}, x_i]$中上、下确界．根据达布 (Darboux)定理，f 是黎曼可积的充要条件是

$$\sup_D\underline{\sigma}(D, f)=\inf_D\overline{\sigma}(D, f), \qquad (2.29)$$

而(2.29)成立的充要条件是存在$[a, b]$上一列分点组 $\{D_n\}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}(\overline{\sigma}(D_n, f)-\underline{\sigma}(D_n, f))=0, \qquad (2.30)$$

这也等价于存在一列分点组 $\{D_n\}$，

$$D_n: a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{k_n}^{(n)}=b,\quad n=1, 2, \cdots,$$

满足 $D_n\subset D_{n+1}$ (即后一分点组是在前一个分点组中再加入一些分点)，并且在 $\lambda^{(n)}=\max\limits_i(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})\to0$ 的条件下，(2.30)成立．因

此，下面只要证明在这种特殊的分点组序列下，条件(2.30)等价于 f 在 $[a, b]$ 上不连续点全体是 m 零集就可以了.

对每个分点组 D_n，作函数

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} m_i^{(n)}, & \text{当 } x\in(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}] \text{ 时}, \\ f(a), & \text{当 } x=a \text{ 时}, \end{cases} \quad i=1, \cdots, k_n,$$

$$\psi_n(x)=\begin{cases} M_i^{(n)}, & \text{当 } x\in(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}] \text{ 时}, \\ f(a), & \text{当 } x=a \text{ 时}, \end{cases} \quad i=1, \cdots, k_n,$$

其中 $M_i^{(n)}$, $m_i^{(n)}$ 分别是 f 在 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 中的上、下确界. 由于 $D_n \subset D_{n+1}$，所以

$$\begin{aligned} &\psi_1(x)\geqslant\psi_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\psi_n(x)\geqslant\cdots\geqslant f(x), \\ &\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots\leqslant f(x), \end{aligned} \tag{2.31}$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$、$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ 处处存在，分别记为 $\overline{f}(x)$、$\underline{f}(x)$. 易知

$$\underline{f}(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{f}(x). \tag{2.32}$$

从 C_0 类勒贝格积分定义，立即有

$$\begin{aligned} (L)\int\psi_n dx &= \sum_i M_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})=\overline{\sigma}(D_n, f), \\ (L)\int\varphi_n dx &= \sum_i m_i^{(n)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})=\underline{\sigma}(D_n, f). \end{aligned} \tag{2.33}$$

由此可知，(2.30)等价于

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int(\psi_n-\varphi_n)dx=0.$$

因为 $\{\psi_n-\varphi_n\}$ 是单调下降序列，并且 $\psi_n-\varphi_n\geqslant 0\ (n=1, 2, \cdots)$. 根据引理6，上式成立的充要条件是

$$\overline{f}(x)\underset{m}{\doteq}\underline{f}(x).$$

由于(2.32)，上式成立的充要条件是

$$\overline{f}(x)\underset{m}{\doteq}f(x)\underset{m}{\doteq}\underline{f}(x). \tag{2.34}$$

所以只要证明使(2.34)成立的充要条件是 f 的不连续点全体是 m-零集即可. 下面证明这一点.

必要性　记 $E=\{x\mid \underline{f}(x)\neq\overline{f}(x)\}$，由(2.34)，$E$ 是 m-零集.

又令 F 是 $\{D_n\}$ 中一切分点全体，它是可列集，因而 F 是 m-零集，从而 $E\cup F$ 也是 m-零集．今证任何 $x_0\bar{\in} E\cup D$，x_0 必是 f 的连续点即可．事实上，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，使得

$$\begin{aligned}\psi_N(x_0)&<\bar{f}(x_0)+\varepsilon=f(x_0)+\varepsilon,\\ \varphi_N(x_0)&>\underline{f}(x_0)-\varepsilon=f(x_0)-\varepsilon.\end{aligned}\tag{2.35}$$

但 x_0 不是 D_N 的分点，所以存在一个区间 $(x_{i-1}^{(N)}, x_i^{(N)})$ 包含 x_0，由 (2.35) 立即得到

$$\begin{aligned}M_i^{(N)}&=\psi_N(x_0)<f(x_0)+\varepsilon,\\ m_i^{(N)}&=\varphi_N(x_0)>f(x_0)-\varepsilon.\end{aligned}\tag{2.36}$$

从而当 $x'\in(x_{i-1}^{(N)}, x_i^{(N)})$ 时，

$$|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 x_0 是 $f(x)$ 的连续点．

充分性　令 E_1 是 f 的不连续点全体．由假设，E_1 是 m-零集，从而 $E_1\cup F$ 也是 m-零集．今证对任何 $y_0\bar{\in} E_1\cup F$，必有

$$\underline{f}(y_0)=\bar{f}(y_0)$$

即可．由于 y_0 是 f 的连续点，所以对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x'\in(y_0-\delta, y_0+\delta)$ 时

$$|f(x')-f(y_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{2.37}$$

对于 $\delta>0$，必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\lambda^{(n)}<\delta$．由于 $y_0\bar{\in} F$，所以对任何 $n(\geqslant N)$，必有区间 $(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})$ 包含 y_0，由于

$$x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\leqslant\lambda^{(n)}<\delta,$$

所以 $(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})\subset(y_0-\delta, y_0+\delta)$．由 (2.37) 立即得到

$$M_i^{(n)}-m_i^{(n)}<\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon,\quad(n\geqslant N).$$

从而 $\bar{f}(y_0)-\underline{f}(y_0)\leqslant M_i^{(n)}-m_i^{(n)}<\varepsilon$，即 $\bar{f}(y_0)=\underline{f}(y_0)$．证毕．

从定理 4 的证明过程中容易看出，当 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积时，f 就有界．令 M 是 f 的一个上界，因为

$$(L)\int\varphi_n dx\leqslant M(b-a),$$

所以 $\underline{f}(x)\in O_1(g)$（这里 $g(x)=x$）．然而

$$\underline{f}(x) \underset{m}{\doteq} f(x),$$

所以成立着

定理 5 如果 f 是$[a, b]$上黎曼可积函数，那末 $f \in C_1(g)$（这里$g(x)=x$），并且 f 的黎曼积分就是勒贝格积分，即

$$(R)\int_a^b f dx = (L)\int_a^b f dx.$$

换句话说，当 $g(x)=x$ 时，$C_1(g)$类确实包含了黎曼可积函数类，并且勒贝格积分与黎曼积分一致．$[0, 1]$上 Dirichlet 函数属于 $C_1(g)$（这里 $g(x)=x$），但它不是黎曼可积的．

其实，从定理 4 的证明中还可以进一步看出，如果 f 黎曼可积，那末 f、$-f$ 都属于 $C_1(g)$（这里 $g(x)=x$），反之并不正确，例如 $D(x)$，$-D(x)$都属于 $C_1(g)$（这里 $g(x)=x$）类，但是 $D(x)$不是黎曼可积的．可以证明下面的定理成立．

定理 6 设 f 是$[a, b]$上有限实函数，如果 f 和 $-f$ 都属于 $C_1(g)$（这里 $g(x)=x$），那末必有$[a, b]$上黎曼可积函数 h，使得

$$f \underset{m}{\doteq} h.$$

此外，对于黎曼-斯蒂阶积分，当 $g(x)$是单调增加右连续函数时，f 关于 g 的黎曼-斯蒂阶的可积性以及它的积分和 $C_1(g)$类之间也存在类似的性质，这里略去，读者可以逐一仿证．应该向读者指出如下一点：在黎曼-斯蒂阶积分的性质中的第一条（见第一章§5 定理 8），我们就指出，当 f、g 有同一个不连续点时，f 关于g 不是黎曼-斯蒂阶可积的，而 $C_1(g)$中却有很多函数与 g 有公共不连续点，所以对于一般的 g，新的积分比黎曼-斯蒂阶积分更为灵活．

习　题

1．证明简单函数就是只有有限个不连续点的跳跃函数．

2．证明任何 g-零集 E 的特征函数 $\chi_E(x)$必属于 $C_1(g)$类，并且

$$\int \chi_E dg = 0.$$

3．证明直线上有界开集 G 的特征函数 $\chi_G(x)$属于 $C_1(g)$类，并求出它的

积分 $\int \chi_G dg$.

4. 证明：对 $[a, b]$ 上任何一个疏朗闭集 F 的特征函数 χ_F，如果 F 不是 m-零集，那末 $\chi_F \bar{\in} C_1(g)$（这里 $g(x)=x$）类，而 $\chi_{[a,b]}(x)-\chi_F(x)\in C_1(g)$.

5. 设 $\{\varphi_n\}\subset C_0$，且满足：

（i）$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots$;

（ii）$\int\varphi_n dg\leqslant A<\infty$;

证明必存在 $f\in C_1(g)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \doteq f$，且

$$\int fdg=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg.$$

又证明习题 5 对于 $\{\varphi_n\}\subset C_1(g)$ 也是成立的.

6. 设 $0\leqslant\alpha<1$，证明函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^\alpha}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

是 $[0, 1]$ 上 $C_1(g)$ 类函数，这里 $g(x)=x$（当然可以在 $[0, 1]$ 外补充规定为零，从而为 $(-\infty, \infty)$ 上 $C_1(g)$ 类函数）. 但如果取

$$g(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\vartheta_1\left(x-\frac{1}{n}\right)$$

时，问 f 是否属于 $C_1(g)$？

7. 设 $0<\alpha<1$，证明函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

不属于 $[0, 1]$ 上 $C_1(g)$（这里 $g(x)=x$），问使得 $f\in C_1(g)$ 的 g 应该具备什么条件？

8. 如果存在 $[a, b]$ 上连续函数的单调增加序列 $\{h_n\}$，适合

$$(R)\int_a^b h_n dx\leqslant A<\infty,$$

使得 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)\underset{m}{\doteq}f(x)$，证明 f 是 $[a, b]$ 上 $C_1(g)$（这里 $g(x)=x$）类函数.

（注　此题也可推广到一般的 $C_1(g)$ 的情况，当然要用连续函数的 $(R-S)$ 积分 $\int_a^b h_n dg$ 代替原题中 $(R)\int_a^b h_n dx$.）

又问：习题 8 中的条件是否为必要的？

9. 证明$[a, b]$上一列黎曼可积函数$\{f_n\}$，如果一致收敛，那末极限函数必也黎曼可积，并且可以逐项积分。

10. 设h是$(-\infty, \infty)$上连续函数，f是$[a, b]$上黎曼可积函数，证明$h\circ f$必是$[a, b]$上黎曼可积函数，并举例说明f连续，h在$[-M, M]$上黎曼可积($M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$)时，$h\circ f$可以不是黎曼可积的。

11. 证明Cantor集K在$[0, 1]$上的余区间全体G的特征函数$\chi_G(x)$是$[0, 1]$上的黎曼可积函数，并求出它的积分。如果在m-长度为$\frac{1}{3^n}$的余区间上，$f(x)$的值为n，而在K上$f(x)$的值为0，证明$f\in C_1(g)$(这里$g(x)=x$)，并且$(L)\int_0^1 fdx=3$。如果在m-长度为$\frac{1}{3^n}$的余区间上规定一个g-长度，它的g-长度为$\frac{1}{4^n}$，而且$K\cup(-\infty, 0)\cup(1, \infty)$的$g$-长度为0，证明上面定义的$f$仍属于$C_1(g)$，并且$\int fdg=0$。

12. 设f是$[a, b]$上连续函数，证明，对任何一个$(-\infty, \infty)$上单调增加右连续函数g，$f\in C_1(g)$。

13. 试举一例说明$[a, b]$上$C_1(g)$(这里$g(x)=x$)类中函数并不必几乎处处等于一个黎曼可积函数。

14. 证明定理6。

§3 区间上勒贝格-斯蒂阶积分

从§2的讨论可以看出：(一)$C_1(g)$类对单调增加序列$\{f_n\}$，只要积分序列$\left\{\int f_n dg\right\}$收敛，就能保证$\{f_n\}$的极限函数(当然是几乎处处收敛)$f$存在，不仅$f$仍属于$C_1(g)$，而且可以逐项积分；(二)象Dirichlet函数$D(x)$这类黎曼积分不存在的函数能包含在$C_1(g)$(此地$g(x)=x$)中。但也正如§2中所见到的，$C_1(g)$类有一个很大的缺陷，就是当$f\in C_1(g)$时，$-f$未必能属于$C_1(g)$，也就是说$C_1(g)$类对减法运算不封闭。所以还要把$C_1(g)$类再扩大成对减法运算也封闭的$(L\text{-}S)$类(如果$g(x)=x$，就是要扩大成L类)。

定义 设f为$\langle a, b\rangle$上有限实函数，如果存在f_1、$f_2\in C_1(g)$，使得

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x), \tag{3.1}$$

称 f 为(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数，或(关于 g)$(L\text{-}S)$可积函数，也可简称为(关于 g)可积函数．(关于 g)可积函数全体记为 $(L\text{-}S)(g)$，称 $\int f_1dg-\int f_2dg$ 为 f 的(关于 g)的勒贝格-斯蒂阶积分，记为

$$\int_{\langle a,b\rangle} fdg.$$

特别，当 $g(x)=x$ 时，称 f 是勒贝格可积函数或(L)可积函数．(L)可积函数全体记为 L，而称 $\int f_1dx-\int f_2dx$ 为 f 的勒贝格积分．记为

$$(L)\int_a^b fdx\ \left(\text{或简记为}\int_a^b fdx\right).$$

当然，要上述定义是恰当的，还必须说明如果又存在 $h_1, h_2\in O_1(g)$，使得

$$f(x)=h_1(x)-h_2(x) \tag{3.2}$$

时，必有

$$\int h_1dg-\int h_2dg=\int f_1dg-\int f_2dg.$$

事实上，这是没有问题的．因为从(3.1)、(3.2)立即得到

$$f_1+h_2=f_2+h_1. \tag{3.3}$$

但 $O_1(g)$ 类对加法运算是封闭的，并且函数和的积分等于积分的和(见§2定理2)．因而从(3.3)得到

$$\int f_1dg+\int h_2dg=\int f_2dg+\int h_1dg, \tag{3.4}$$

从而

$$\int h_1dg-\int h_2dg=\int f_1dg-\int f_2dg\text{[注]}.$$

对于 $\langle a, b\rangle\neq(-\infty, \infty)$上$(L\text{-}S)(g)$类函数 f，我们也常在 $\langle a, b\rangle$ 外的点上补充定义 f 的值是零，从而成为$(-\infty, \infty)$上$(L\text{-}S)(g)$类．今后在一般情况下，并不特别强调 $\langle a, b\rangle$ 和$(-\infty,$

[注]　其实由(3.4)得到此式时，只要 $\left(\int f_2dg, \int h_2dg\right)$ 或者 $\left(\int f_1dg, \int h_1dg\right)$ 中有一对是有限值就可以了，另一对可以是无限大的(参见附录中第7小节)．

$\infty)$的差别.

下面给出$(L\text{-}S)(g)$类的初等性质

1. $(L\text{-}S)(g)$类初等性质

定理1 设 $f, h\in(L\text{-}S)(g)$,

(1) (单调性)当$f\geqslant h$时, $\int fdg\geqslant\int hdg$;

(2) (线性)α、β 为任意两个常数, 则 $\alpha f+\beta h\in(L\text{-}S)(g)$, 且

$$\int(\alpha f+\beta h)dg=\alpha\int fdg+\beta\int hdg; \tag{3.5}$$

(3) 设另有一个函数 $k(x)$, $k(x)\doteq f(x)$, 那末

$$k\in(L\text{-}S)(g),$$

并且 $\int kdg=\int fdg$;

(4) (区间可加性)[注] 设 $\langle a_i, b_i\rangle (i=1, \cdots, n)$是有限个互不相交的区间, 并且

$$\langle a, b\rangle=\bigcup_{i=1}^{n}\langle a_i, b_i\rangle,$$

那末 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上$(L\text{-}S)(g)$类函数的充要条件是 f 是每个 $\langle a_i, b_i\rangle$ 上的$(L\text{-}S)(g)$类函数, 并且

$$\int_{\langle a, b\rangle}fdg=\sum_{i=1}^{n}\int_{\langle a_i, b_i\rangle}fdg; \tag{3.6}$$

(5) (绝对可积性)$|f|\in(L\text{-}S)(g)$, 并且

$$\left|\int fdg\right|\leqslant\int|f|dg; \tag{3.7}$$

(6) $\max(f, h)$, $\min(f, h)\in(L\text{-}S)(g)$, 而且

$$\begin{aligned}&\int\max(f, h)dg\geqslant\max\left(\int fdg, \int hdg\right),\\&\int\min(f, h)dg\leqslant\min\left(\int fdg, \int hdg\right);\end{aligned} \tag{3.8}$$

(7) (勒贝格积分的平移、反射不变性)设 f 是$(-\infty, \infty)$上

[注] 利用积分的极限定理(定理3.5), 可以将这个性质推广到一列互不相交的区间$\{\langle a_i, b_i\rangle\}$的情况(见习题18).

勒贝格可积函数，那末对任何 x_0, $f(x+x_0)$, $f(-x)$ 都是勒贝格可积的，而且

$$\int f(x+x_0)dx=\int f(x)dx, \tag{3.9}$$

$$\int f(-x)\,dx=\int f(x)dx. \tag{3.10}$$

证明　设

$$f=f_1-f_2,\ h=h_1-h_2,\ f_1,\ f_2,\ h_1,\ h_2\in C_1(g)$$

(1) 当 $f\geqslant h$ 时，必有 $f_1+h_2\geqslant h_1+f_2$，由 $C_1(g)$ 类的积分单调性，可加性，

$$\int f_1dg+\int h_2dg\geqslant\int h_1dg+\int f_2dg,$$

从而 $\int fdg=\int f_1dg-\int f_2dg\geqslant\int h_1dg-\int h_2dg=\int hdg.$

(2) 以 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\leqslant 0$ 为例来证明；因为

$$\alpha f+\beta h=(\alpha f_1+(-\beta)h_2)-(\alpha f_2+(-\beta)h_1),$$

所以 $\alpha f+\beta h\in(L\text{-}S)(g)$，并且

$$\begin{aligned}\int(\alpha f+\beta h)\,dg&=\int(\alpha f_1+(-\beta)h_2)dg\\&\quad-\int(\alpha f_2+(-\beta)h_1)dg\\&=\alpha\int f_1dg+(-\beta)\int h_2dg\\&\quad-\alpha\int f_2dg-(-\beta)\int h_1dg.\end{aligned}$$

整理后就得到(3.5)．α、β 的其它情况类似可以证明．

(3) 由于 $f-k\doteq 0$，而 $0\in C_1(g)$，所以 $f-k\in C_1(g)$，并且

$$\int(f-k)dg=0.$$

由于 $k=f-(f-k)$，由(2)知道 $k\in(L\text{-}S)(g)$，并且

$$\int kdg=\int fdg-\int(f-k)dg=\int fdg.$$

(4) 当 f 是 $\langle a,\ b\rangle$ 上 $(L\text{-}S)(g)$ 类时，f_1、f_2 都是 $\langle a,\ b\rangle$ 上

$C_1(g)$类，由§2定理2的(4)，f_1、f_2分别是每个$\langle a_i, b_i\rangle(i=1, 2, \cdots, n)$上的$C_1(g)$类，并且在$\langle a_i, b_i\rangle$上，$f=f_1-f_2$，因而$f$是每一个$\langle a_i, b_i\rangle$上的$(L\text{-}S)(g)$类．反之，如果$f$是每个$\langle a_i, b_i\rangle$上的$(L\text{-}S)(g)$类，那末必有$\langle a_i, b_i\rangle$上$C_1(g)$类函数$f_1^{(i)}$、$f_2^{(i)}$，使得$f=f_1^{(i)}-f_2^{(i)}$在$\langle a_i, b_i\rangle$上成立．如取$\langle a, b\rangle$上的$f_1$、$f_2$分别为

$$f_1=f_1^{(i)},\ f_2=f_2^{(i)},\ x\in\langle a_i, b_i\rangle,\ i=1, \cdots, n.$$

由§2定理2的(4)知道，f_1、f_2都是$\langle a, b\rangle$上$C_1(g)$类，因而$f=f_1-f_2$是$\langle a, b\rangle$上$(L\text{-}S)(g)$类函数．

再利用§2定理2中$C_1(g)$类函数的区间可加性的积分等式，立即知道(3.6)式成立．

(5) 设$f=f_1-f_2$，因为$f_1, f_2\in C_1(g)$，即存在C_0类中单调序列$\{\varphi_n\}$、$\{\psi_n\}$，使得

$$\int\varphi_n dg\leqslant A,\ \int\psi_n dg\leqslant A,\ A<\infty,$$

并且
$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\doteq f_1,\ \lim_{n\to\infty}\psi_n\doteq f_2.$$

不妨设$\varphi_n\geqslant0$，$\psi_n\geqslant0$（否则用$\{\varphi_n-\varphi_0\}$、$\{\psi_n-\varphi_0\}$分别代替$\{\varphi_n\}$、$\{\psi_n\}$，其中$\varphi_0=\min(\varphi_1, \psi_1\in C_0)$．于是，两列函数

$$\left.\begin{aligned}\max(\varphi_n, \psi_n)&=\frac{1}{2}[(\varphi_n+\psi_n)+|\varphi_n-\psi_n|]\leqslant\varphi_n+\psi_n,\\ \min(\varphi_n, \psi_n)&=\frac{1}{2}[(\varphi_n+\psi_n)-|\varphi_n-\psi_n|]\leqslant\varphi_n+\psi_n,\end{aligned}\right\}\tag{3.11}$$

$$n=1, 2, \cdots$$

都是(非负)简单函数的单调增加序列，并且分别有

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\max(\varphi_n, \psi_n)\doteq\max(f_1, f_2)\\ &\left(=\frac{1}{2}(f_1+f_2+|f_1-f_2|)\right)\\ &\lim_{n\to\infty}\min(\varphi_n, \psi_n)\doteq\min(f_1, f_2)\\ &\left(=\frac{1}{2}(f_1+f_2-|f_1-f_2|)\right)\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

由(3.11)，显然有

$$\int \max(\varphi_n, \psi_n)dg \leqslant 2A, \int \min(\varphi_n, \psi_n)dg \leqslant 2A,$$

由此可知 $\max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2) \in C_1(g)$. 所以当 $f=f_1-f_2$ 时

$$\begin{aligned} |f| &= \max(f_1, f_2) - \min(f_1, f_2), \\ f^+ &= \max(f_1, f_2) - f_2 = f_1 - \min(f_1, f_2), \\ f^- &= \max(f_1, f_2) - f_1 = f_2 - \min(f_1, f_2) \end{aligned} \tag{3.13}$$

都是$(L\text{-}S)(g)$类函数.

因为 $$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

再利用积分单调性,立即可以得到(3.7).

(6) 根据(6)的假设,由(5)可知

$$\max(f, h) = \frac{1}{2}[(f+h)+|f-h|],$$

$$\min(f, h) = \frac{1}{2}[(f+h)-|f-h|] \in (L\text{-}S)(g).$$

又因为 $$\max(f, h) \geqslant f, \quad \max(f, h) \geqslant h,$$
$$\min(f, h) \leqslant f, \quad \min(f, h) \leqslant h,$$

利用积分单调性,立即可以得(3.8).

(7) 因为对任何 x_0, $\langle a, b\rangle$ 和 $\langle a+x_0, b+x_0\rangle$ 的 m-长度相同,同样,$\langle a, b\rangle$ 和 $\langle -b, -a\rangle$ 的 m-长度也相同,容易从 C_0 类积分定义(或用黎曼积分知识)推知:对任何 $\varphi \in C_0$,

$$\begin{aligned} \int \varphi(x+x_0)dx &= \int \varphi(x)dx, \\ \int \varphi(-x)dx &= \int \varphi(x)dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

而对任何 $f \in C_1(g)$ $(g(x)=x)$时,存在 $\{\varphi_n\} \subset C_0$, $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \underset{m}{\doteq} f$, 并且

$$\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n(x)dx. \tag{3.15}$$

由于 m-零集经移动和反射变换后仍为 m-零集(见§1习题12),所以

$$\varphi_1(x+x_0)\leqslant\varphi_2(x+x_0)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x+x_0)\leqslant\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x+x_0)\underset{m}{\doteq}f(x+x_0).$$

再对每个 φ_n 利用(3.14)，立即得到

$$\begin{aligned}\int f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(x+x_0)dx,\\ \int f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(-x)dx,\end{aligned}\tag{3.16}$$

因而 $f(x+x_0)$、$f(-x)\in\mathcal{O}_1(g)\,(g(x)=x)$，并且由(3.16)还得到

$$\int f(x+x_0)dx=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(x+x_0)dx=\int f(x)dx,$$

$$\int f(-x)dx=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(-x)dx=\int f(x)dx.$$

定理证毕.

比定理1中的(7)更一般的就是 $(L\text{-}S)(g)$ 类中变数变换的问题，这将在第三章中介绍.

2. 积分逼近和全连续性

这一小节要介绍一些经常被用到的积分逼近的结果.

定理2 设 $f\in(L\text{-}S)(g)$，那末对任何 $\varepsilon>0$，

(1) 必存在简单函数 φ，使得

$$\int|f-\varphi|dg<\varepsilon;\tag{3.17}$$

(2) 必存在全直线上连续函数 φ，使得(3.17)成立；

(3) 当 f 是 $[a, b]$ 上 $(L\text{-}S)(g)$ 类函数时，必存在 $[a, b]$ 上多项式 $P(x)$，使得

$$\int_{[a,b]}|f-P|dg<\varepsilon.\tag{3.18}$$

证明 (1) 因为 $f=f_1-f_2$，f_1、$f_2\in\mathcal{O}_1(g)$. 由§2定理2的(5)，存在 $\varphi_1, \varphi_2\in\mathcal{O}_0$，$\varphi_i\leqslant f_i\,(i=1, 2)$，且

$$\int f_i dg<\int\varphi_i dg+\frac{\varepsilon}{2},\ i=1, 2.$$

取 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$，从而

$$\int|f-\varphi|dg\leqslant\int|f_1-\varphi_1|dg+\int|f_2-\varphi_2|dg$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2) 对任何 $\varepsilon>0$, 由(1), 存在 $\varphi\in C_0$, 使得

$$\int|f-\varphi|dg<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3.19}$$

因此, 如果能找到 $(-\infty,\ \infty)$ 上连续函数 ψ, 使得

$$\int|\varphi-\psi|dg<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3.20}$$

那末从(3.20)和(3.19)立即可得

$$\int|\psi-f|dg\leqslant\int|\psi-\varphi|dg+\int|\varphi-f|dg<\varepsilon,$$

换言之, 证明(2)的关键是对每个 $\varphi\in C_0$, 证明能把 φ 修改成连续函数 ψ, 使得(3.20)成立.

显然, 只要考虑三种情况.

(I) $\varphi(a)=c(c\neq 0)$, 当 $x\neq a$ 时, $\varphi(x)=0$.

对任何 $\eta>0$, 必存在 $(\alpha,\ \beta)\supset\{a\}$, 使得(不妨取 α、β 为 g 的连续点)

$$g(\beta)-g(\alpha)-(g(a)-g(a-0))<\frac{\eta}{2c}.$$

作直线上连续函数 ψ: $\psi(a)=c$, 当 $x\overline{\in}(\alpha,\ \beta)$ 时, $\psi(x)=0$, 而 $\psi(x)$ 在 $(\alpha,\ \beta)$ 上满足 $|\psi(x)|\leqslant|c|$. 显然, 这种连续函数是存在的(例如, 在 $[\alpha,\beta]$ 上取连续折线函数即可). 因此

$$\begin{aligned}\int|\varphi-\psi|dg&=\int_{(\alpha,\beta)}|\varphi-\psi|dg\\&=\left(\int_{(\alpha,a)}+\int_{(a)}+\int_{(a,\beta)}\right)|\varphi-\psi|dg\\&\leqslant 2c(g((\alpha,\ a))+g((a,\ \beta)))\\&=2c(g(a-0)-g(\alpha)+g(\beta)-g(a))<\eta.\end{aligned}\tag{3.21}$$

(II) φ 在 $(a,\ b)$ 上取值为 $c(c\neq 0)$, 而 $x\overline{\in}(a,\ b)$ 时 $\varphi(x)=0$. 对任何 $\eta>0$, 取 $[\alpha,\ \beta]\subset(a,\ b)$ (不妨设 α、β 是 g 的连续点), 并且

$$g((a, b))-g([\alpha, \beta])$$
$$=(g(b-0)-g(\beta))+(g(\alpha)-g(a))<\frac{\eta}{2c}.$$

作$(-\infty, \infty)$上连续函数ψ，当$x\in[\alpha, \beta]$时，$\psi(x)=c$，当$x\notin(a, b)$时，$\psi(x)=0$，当$x\in(a, \alpha)\cup(\beta, b)$时，$|\psi(x)|\leqslant|c|$（这类函数可作很多）. 因此

$$\int|\varphi-\psi|dg=\int_{(a,b)}|\varphi-\psi|dg$$
$$=\left(\int_{(a,\alpha)}+\int_{[\alpha,\beta]}+\int_{(\beta,b)}\right)|\varphi-\psi|dg$$
$$\leqslant 2c(g(\alpha)-g(a)+g(b-0)-g(\beta))<\eta. \qquad (3.22)$$

(III) 对一般的$\varphi\in C_0$，必存在有限个互不相交的有限开区间或单点集形的区间$\langle a_i, b_i\rangle$, $i=1, \cdots, n$, 使得φ在$\langle a_i, b_i\rangle$上为非零常数C_i. 因此，φ可以视为n个不是(I)，就是(II)形式的函数φ_i的和，即$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i$. 取$\eta=\frac{\varepsilon}{n+1}$，对每个$\varphi_i$，得到连续函数$\psi_i$，使得(3.21)、(3.22)成立. 由此可知

$$\int|\varphi-\psi|dg\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int|\varphi_i-\psi_i|dg<\varepsilon,$$

即(3.20)成立.

(3) 对于$[a, b]$，由(2)存在全直线上连续函数ψ，使得

$$\int_{[a,b]}|f-\psi|dg<\frac{\varepsilon}{2}.$$

将ψ视为$[a, b]$上连续函数，由 Weierstrass 定理，存在多项式$P(x)$，使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\psi(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2(g([a, b])+1)},$$

因而

$$\int_{[a,b]}|\varphi-P|dx\leqslant\int_{[a,b]}|\varphi-\psi|dg+\int_{[a,b]}|\psi-P|dg$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

证毕.

注意 ① 定理 2 的(3)对于无限区间的情况，一般是不成立的. 例如 $g(x)=x$, f 是$[a, b]$上L类, 在$[a, b]$外补充规定 f 的值为零, 仍记补充定义后的函数为 f, 易知 f 是$(-\infty, \infty)$上的 L 类函数. 这时, 对于例如 $\varepsilon=1$, 就不存在$(-\infty, \infty)$上的多项式 P, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f-P|dx<1. \tag{3.23}$$

事实上, 如果有 P 使上式成立, 因为 P 是多项式, 因而在充分大的$[-n, n]$(不妨设$[-n, n]\supset[a, b]$)外的值$|P(x)|>1$. 显然在$[-n, n]$外, $|f-P|\geqslant 1$. 因而

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f-P|dx\geqslant\int_{[n,n+2]}|f-P|dx\geqslant 2. \tag{3.24}$$

(3.24)与(3.23)是矛盾的.

② 定理 2(3) 中 $P(x)$ 可以换为只取有理系数的多项式, 结论仍成立. 这是因为对任何 $\eta>0$, 对任给的多项式 $P(x)$, 必存在有理系数多项式 $P_\gamma(x)$, 使得在$[a, b]$上, $|P_\gamma(x)-P(x)|<\eta$ 成立. 利用这个性质容易知道 $P(x)$ 换为 $P_\gamma(x)$ 也是对的.

③ 如果定理 2 中给定的 f 是有界的, 即

$$M=\sup_x|f(x)|<\infty,$$

那末定理 2(1)、(2)、(3) 中的 φ, P 还可做到满足

$$|\varphi(x)|\leqslant M, \quad |P(x)|\leqslant M.$$

如果定理 2 中 f 是有限区间$[a, b]$中$(L\text{-}S)(g)$类函数, 那末定理 2(1), (2) 中的 φ 还可以做到在某个有限区间$(\alpha, \beta)\supset[a, b]$外等于零.

利用积分逼近定理可以得到积分的全连续性(它的最一般的形式可见第三章 § 2 定理 1).

系 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上的$(L\text{-}S)(g)$类函数, 那末对任何 $\varepsilon>0$, 必存在 $\delta>0$, 使得对任何区间 $I\subset\langle a, b\rangle$, 只要 $g(I)<\delta$ 就有

$$\left|\int_I f dg\right|<\varepsilon.$$

证明 对任何 $\varepsilon>0$，由定理 2 的(1)，存在 $\varphi\in C_0$，使得

$$\int|f-\varphi|dg<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取定 φ 后，记 $M=\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle}|\varphi(x)|$，这时取

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2(M+1)}$$

即可. 事实上，任取 $I\subset\langle a,b\rangle$，如果 $g(I)<\delta$，那末

$$\left|\int_I fdg\right|\leqslant\int_I|f-\varphi|dg+\int_I|\varphi|dg$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+M\frac{\varepsilon}{2(M+1)}<\varepsilon.$$

证毕.

关于全连续性可参看本节习题 1～3.

积分逼近的另一个重要应用是用它可以证明黎曼-勒贝格引理，这可见习题 4.

3. $(L\text{-}S)$积分的极限定理

这一小节将介绍$(L\text{-}S)$的积分与极限交换顺序的定理. 从它可以明显地看出$(L\text{-}S)$积分在积分与极限交换顺序问题上比(R)积分或$(R\text{-}S)$积分有优越性. 为此，我们先证明一个引理.

引理 1 设 $f\in(L\text{-}S)(g)$，那末对任何 $\varepsilon>0$，必有

$$f_1,\ f_2\in C_1(g),$$

使得

$$f=f_1-f_2,$$

而且

$$f_2\geqslant0,\quad\int f_2dg<\varepsilon.$$

证明 因为 $f\in(L\text{-}S)(g)$，所以存在 $h_1,\ h_2\in C_1(g)$，使得

$$f=h_1-h_2.$$

对于 h_2，由§2 定理 2 的(5)，存在 $\varphi\in C_0$，$\varphi\leqslant h_2$，并且

$$\int h_2dg\leqslant\int\varphi dg+\varepsilon.$$

今作 f_1、f_2 如下：

$$f_1=\begin{cases}h_1-\varphi, & \text{当 } h_2\geqslant\varphi \text{ 时},\\ f, & \text{当 } h_2<\varphi \text{ 时},\end{cases}$$

$$f_2=\begin{cases} h_2-\varphi, & \text{当 } h_2\geqslant\varphi \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } h_2<\varphi \text{ 时}. \end{cases}$$

显然，$f_1\doteq h_1-\varphi$，$f_2\doteq h_2-\varphi$，$f=f_1-f_2$，而且

$$f_2\geqslant 0,\quad \int f_2 dg=\int h_2 dg-\int \varphi dg<\varepsilon.$$

因为 $-\varphi\in C_0\subset C_1(g)$，所以 f_1，$f_2\in C_1(g)$．证毕．

定理 3（**勒维**(Levi)**引理**）　设 $\{f_n\}$ 是一列（关于 g）的勒贝格-斯蒂阶可积函数列，如果满足：

（i）$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$；

（ii）$\int f_n dg\leqslant A<\infty$；

那末必存在（关于 g）勒贝格-斯蒂阶可积函数 f，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\doteq f$，并且

$$\int f dg=\lim_{n\to\infty}\int f_n dg. \tag{3.25}$$

与定理 3 等价的级数形式的 Levi 引理如下：

定理 3′　设 $\{u_n\}$ 是（关于 g）勒贝格-斯蒂阶可积函数序列，如果满足

（i）$u_n\geqslant 0$；

（ii）$\int\left(\sum\limits_1^k u_n\right)dg\leqslant A<\infty$，　$k=1, 2, \cdots$；

那末必存在（关于 g）勒贝格-斯蒂阶可积函数 f，使得

$$\sum_1^\infty u_n(x)\doteq f(x),$$

而且

$$\int f dg=\sum_1^\infty\int u_n dg. \tag{3.26}$$

定理 3′ 的证明　由引理 1，对每个 $u_\nu(x)$，存在

$$h_\nu,\ k_\nu\in C_1(g),\quad u_\nu=h_\nu-k_\nu,$$

而且

$$k_\nu\geqslant 0,$$

$$\int k_\nu dg<\frac{1}{2^\nu},\quad \nu=1, 2, \cdots. \tag{3.27}$$

从(3.27)我们有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\int k_\nu dg\leqslant 1.$$

由于 $u_\nu\geqslant 0$, 所以 $h_\nu=u_\nu+k_\nu\geqslant 0$. 于是

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\int h_\nu dg=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int u_\nu dg+\int k_\nu dg\right)$$
$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\int u_\nu dg+1<\infty. \tag{3.28}$$

由于 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\int h_\nu dg<\infty$(即(3.28)), 利用 $C_1(g)$类的勒维引理, 便得到级数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}h_\nu(x)\quad 和\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}k_\nu(x)$$

必分别几乎处处收敛于 $C_1(g)$上函数 $h(x)$和 $k(x)$, 并且

$$\int hdg=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int h_\nu dg,$$
$$\int kdg=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int k_\nu dg,$$

因而
$$f=h-k\in(L\text{-}S)(g),$$
$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(h_\nu(x)-k_\nu(x))=\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu(x),$$

而且
$$\int fdg=\int hdg-\int kdg$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int h_\nu dg-\sum_{\nu=1}^{\infty}\int k_\nu dg=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int u_\nu dg,$$

即(3.25)成立. 证毕.

由定理 3′, 立即得到下面一个有用的系.

系 1 设 f(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积, 而且 $f\geqslant 0$, 如果

$$\int fdg=0,$$

那末必有 $f\doteq 0$.

证明 在定理 3′ 中取 $u_\nu(x)=f(x)$, $\nu=1, 2, \cdots$. 因为

$$\int u_\nu dg=\int fdg=0,$$

所以
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\int u_\nu dg=0.$$
由定理 3′ 可知，$\sum u_\nu(x)=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)+\cdots$ 应该几乎处处收敛，因而在收敛点 x 上，必然 $f(x)=0$. 所以 $f\doteq 0$. 证毕.

对于单调下降的情况，也有类似于定理 3 和 3′ 的结果.

系 2　(1) 设 $\{f_n\}$ 是一列(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数，如果 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant\cdots$，并且
$$\int f_n dg\geqslant A>-\infty,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$
那末必存在(关于g)的勒贝格-斯蒂阶可积函数 f，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\doteq f$，并且
$$\int fdg=\lim_{n\to\infty}\int f_n dg.$$

(2) 设 $\{u_\nu\}$ 是一列(关于 g)的勒贝格-斯蒂阶可积函数，如果 $u_\nu\leqslant 0$，并且
$$\int\sum_1^k u_\nu dg\geqslant A>-\infty,\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$
那末必存在(关于 g)的勒贝格-斯蒂阶可积函数 f，使得 $f\doteq\sum\limits_\nu u_\nu$，并且
$$\int fdg=\sum_1^{\infty}\int u_\nu dg.$$

下面证明另一个极限定理. 为此，先回忆一下上、下限概念：设 $\{a_n\}$ 是一个数列，它的一切收敛子序列(允许"收敛"于正无限大或负无限大)中极限最大的、最小的分别称为上限、下限，分别记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$、$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$.

例

(1) 对于 $\{(-1)^n\}$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-1)^n=1$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-1)^n=-1$.

(2) $\{r_n\}$ 是[0, 1]上有理点全体，
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,r_n=1,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,r_n=0.$$

(3) $\{n\}$ 是自然数序列，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, n=\infty.$$

(4) 对于 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{n}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{n}=0$.

下面是已知的事实.

(1) 设 a 是常数, 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\pm a)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\pm a,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n\pm a)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\pm a.$$

(2) $\{x_n\}$ 存在极限(允许极限值为无限大)的充要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\left(=\lim_{n\to\infty}x_n\right).$$

(3) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)=-\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

(4) $$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\min(x_n,\ x_{n+1},\ \cdots,\ x_{n+m}),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\max(x_n,\ x_{n+1},\ \cdots,\ x_{n+m}).$$

上面(1)～(4)是我们下面要用的上、下限性质. 有关(4)的证明见本书附录中第十小节.

对于定义在某个集 E 上的函数列 $\{f_n\}$, 可以定义这列函数的上限函数、下限函数如下: 对给定的自然数 n、m, 作 E 上函数

$$G_{nm}(x)=\min(f_n(x),\ \cdots,\ f_{n+m}(x)). \tag{3.29}$$

显然, 固定 n, $\{G_{nm}\}$ 是 m 的单调下降序列, 记 $G_n(x)=\lim\limits_{m\to\infty}G_{nm}(x)$ (允许 $G_n(x)$ 取无限大值), 那末 $\{G_n\}$ 便是 E 上单调增加序列. 记 $G(x)=\lim\limits_{n\to\infty}G_n(x)$, 称 $G(x)$ 为 $\{f_n\}$ 的下限函数, 记为

$$G(x)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x).$$

同样引入 E 上函数

$$F_{nm}(x)=\max(f_n(x),\ \cdots,\ f_{n+m}(x)), \tag{3.30}$$

称 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}F_{nm}(x)$ 是 $\{f_n\}$ 的上限函数, 记为

$$F(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x).$$

定理 4(法都(Fatou)引理)　设 $\{f_n\}$ 是(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数序列. 如果又有一个(关于g)勒贝格-斯蒂阶可积函数 f_0, 使得

$$f_n\geqslant f_0(n=1,\ 2,\ \cdots)\quad 且\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\int f_n dg<\infty, \tag{3.31}$$

那末 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$ 必是(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数, 而且

$$\int\underline{\lim_{n\to\infty}}f_n dg\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\int f_n dg. \tag{3.32}$$

证明　对 $\{f_n\}$ 作(3.29)的函数 G_{nm}. 显然, G_{nm} 是勒贝格-斯蒂阶可积的, 又由于 $G_{nm}\geqslant f_0(n,\ m=1,\ 2,\ \cdots)$, 因此

$$\int G_{nm}dg\geqslant\int f_0 dg>-\infty. \tag{3.33}$$

固定 n, $\{G_{nm}\}$ 是单调下降序列, 利用 3′ 的系 2 的(1), 立即可知

$$G_n=\lim_{m\to\infty}G_{nm}$$

勒贝格-斯蒂阶可积, 并且

$$\int G_n dg=\lim_{m\to\infty}\int G_{nm}dg\quad(n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.34}$$

但 $\{G_n\}$ 是可积函数的单调增加序列, 又由于

$$G_{nm}\leqslant f_{n+i}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

所以　$$\int G_{nm}dg\leqslant\min\left(\int f_n dg,\ \int f_{n+1}dg,\ \cdots,\ \int f_{n+m}dg\right),$$

从而　$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int G_n dg&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int G_{nm}dg\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\min\left(\int f_n dg,\ \cdots,\ \int f_{n+m}dg\right)\\&<\infty,\end{aligned}$$

因而对 $\{G_n\}$ 可以用定理 3, 立即得到

$$\lim_{n\to\infty}G_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}f_n$$

是$(L\text{-}S)(g)$类函数.

$$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n dg = \int \lim_{n\to\infty} G_n dg = \lim_{n\to\infty} \int G_n dg$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \min\left(\int f_n dg, \cdots, \int f_{n+m} dg\right)$$

$$= \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n dg$$

证毕.

类似地可以证明下面的上限形式的 Fatou 引理.

定理 4′(Fatou) 设$\{f_n\}$是(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数列，并且存在另一个(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数 f_0，使得

$$f_n \leqslant f_0 (n=1, 2, \cdots) \quad 且 \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n dg > -\infty, \qquad (3.35)$$

那末$\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$必是(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数，而且

$$\int \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n dg \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n dg.$$

定理 4′ 的另一个证明方法是直接验证序列$\{-f_n\}$适合定理 4的条件，从而用定理 4 的结论以及上、下限的性质(3)得到本定理的结论.

注意：定理 4 中条件 $f_0 \leqslant f_n (n=1, 2, \cdots)$是不能去掉的.

例 1 取

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 当\ x \in [0, n] 时, \\ -1, & 当\ x \in [-n, 0] 时, \\ 0, & 当\ x \in (-\infty, -n) \cup (n, \infty) 时, \end{cases}$$
$$n = 1, 2, \cdots$$

又取 $g(x)=x$ 时，显然 $\lim_{n\to\infty} f_n$ 处处存在，并且极限函数是

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 当\ x \in [0, \infty) 时, \\ -1, & 当\ x \in (-\infty, 0) 时. \end{cases}$$

显然，$\int f_n dx = 0,\ n=1, 2, \cdots$. 但 f 不是勒贝格可积函数，因为对一切 $x \in (-\infty, \infty)$，$|f(x)|=1$，所以$|f|$不是勒贝格可积函数，因而 f 也不可能是勒贝格可积的.

同样，定理 4 中 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int f_n dg<\infty$ 这个条件也不能去掉.

例 2　仍取 $g(x)=x$,

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in[-n,\ n] \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\in(-\infty,\ -n)\cup(n,\ \infty) \text{ 时},\end{cases}$$

这时可以取 $f_0=0$, 而 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1$. 显然，$f$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 上不是勒贝格可积的.

利用定理 4 和 4′, 我们又可得到勒贝格的控制收敛定理.

定理 5（**控制收敛定理**）　设 $\{f_n\}$ 是(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数，并且几乎处处收敛于 f. 如果又存在(关于 g)勒贝格-斯蒂阶非负可积函数 F, 使得

$$|f_n(x)|\leqslant F(x). \tag{3.36}$$

那末 f 必是(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积的，并且

$$\int f dg=\lim_{n\to\infty}\int f_n dg. \tag{3.37}$$

证明　由条件(3.36)得到

$$-F\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f_n\doteq\lim_{n\to\infty}f_n\doteq\varlimsup_{n\to\infty}f_n\leqslant F. \tag{3.38}$$

因为 F(从而 $-F$)是勒贝格-斯蒂阶可积的，因此对序列 $\{f_n\}$, 定理 4、4′ 同时都可以用，由此得到

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\int f_n dg&\leqslant\int\varlimsup_{n\to\infty}f_n dg=\int f dg\\&=\int\varliminf_{n\to\infty}f_n dg\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int f_n dg.\end{aligned}$$

但对任何数列 $\{a_n\}$, 总有

$$\varliminf_{n\to\infty}a_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}a_n.$$

因此从上式立即得到(3.37). 证毕.

对于一个序列 $\{f_n\}$, F 满足条件 (3.36) 时，称 F 是 $\{f_n\}$ 的控制函数. 控制收敛的逐项积分定理最初是由勒贝格在勒贝格积分(即 $g(x)=x$)情况下获得的. 这里是对一般的单调增加右连续函数建立的.

显然，定理 5 中要求存在一个控制函数 F，并且 F 是可积的这个条件不能去掉．希望读者给出反例．控制收敛定理的重要特殊情况是有界收敛定理．

系 1 设 $\{f_n\}$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上均匀有界的函数列，并且几乎处处收敛于 f，如果 $g(\langle a, b\rangle)<\infty$，那末

$$\int_{\langle a,b\rangle} fdg=\lim_{n\to\infty}\int_{\langle a,b\rangle} f_n dg.$$

证明 由 $\{f_n\}$ 的均匀有界性，所以存在常数 M，使得

$$|f_n|\leqslant M.$$

另一方面，$g(\langle a, b\rangle)$是有限的，因而 $F(x)\equiv M$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格-斯蒂阶可积的，而且可作为 $\{f_n\}$ 的控制函数，由定理 5 可知系 1 成立．

系 1 的两个重要特例是：

(1) 当 g 是$(-\infty, \infty)$上概率分布，即 $g((-\infty, \infty))=1$；

(2) 当 $g(x)=x$，而区间 $\langle a, b\rangle$ 是有限区间，即 $g(\langle a, b\rangle)=b-a<\infty$．

在上述两种情况下，只要 $\{f_n\}$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上均匀有界且几乎处处收敛就可以了．

下面再给出控制收敛定理的另一种常用形式：

系 2 设 $\{f_n\}$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上一列（关于 g）勒贝格-斯蒂阶可积函数，如果 $\{f_n\}$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上几乎处处收敛于 f，并且存在 $\langle a, b\rangle$ 上（关于 g）的可积函数 F，使得在 $\langle a, b\rangle$ 上

$$|f(x)|\leqslant F(x),$$

那末 f（关于 g）是勒贝格-斯蒂阶可积的．

证明 作 $\langle a, b\rangle$ 上函数列

$$\varphi_n(x)=\max\{\min(f_n(x), +F(x)), -F(x)\}.$$

显然，

$$-F(x)\leqslant\varphi_n(x)\leqslant F(x),\ x\in\langle a, b\rangle,\ n=1, 2, \cdots$$

并且每个 φ_n 都是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格-斯蒂阶可积的，因为除去一个 g-零集 E 外

$$|f(x)| \leqslant F(x), \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

由此可知，当 $x \overline{\in} E$ 时

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

这样，$\{\varphi_n\}$ 便是几乎处处收敛于 f 的可积函数列，并且以 F 为可积控制函数。由定理 5 立即知道 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格-斯蒂阶可积函数，而且还有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\langle a,b\rangle} \varphi_n dg = \int_{\langle a,b\rangle} f dg. \tag{3.39}$$

现在引入如下概念。

定义 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上有限实函数，如果存在 $\{\varphi_n\} \subset C_0$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n \underset{g}{\doteq} f$，那末称 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可测函数。

系 2 表明：对于 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可测函数 f，如果存在 $\langle a, b\rangle$ 上可积函数 F，使得 $|f| \leqslant F$，那末 f 必是 $\langle a, b\rangle$ 上可积函数。

应该注意，$\int_{\langle a,b\rangle} f dg$ 的值应是(3.39)，一般说来

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\langle a,b\rangle} f_n dg \neq \int_{\langle a,b\rangle} f dg.$$

例如[0, 1]上函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \text{时}, \\ n, & \text{当 } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \text{时}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \doteq 0$. 如果取 $g(x) = x$，易见

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq \int_0^1 0\, dx.$$

有关逐项积分的一种充要条件将在第三章 § 4 中给出。

可测函数是一个重要的概念，我们将在第三章中专门讨论，这里引入此概念无非是为了叙述的方便。

4. 复值函数的积分

现在将积分推广到复值函数的情况。

定义 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上的复值函数，如果 f 的实部 f_1 和虚部 f_2，$f_1=\frac{1}{2}(f+\bar{f})$，$f_2=\frac{1}{2i}(f-\bar{f})$[注1]分别是(关于 g) 勒贝格-斯蒂阶可积的实函数，那末称 f(关于 g)是勒贝格-斯蒂阶可积，并且规定 f 的积分

$$\int f dg=\int f_1 dg+i\int f_2 dg. \tag{3.40}$$

对于复值函数 f，本节前面所有定理的结论都是成立的. 这里只证明定理 1 的(5)中的(3.7)式. 其余的证明建议读者自己完成.

现在证明(3.7)式在复值函数情况下成立. 因为

$$\int f dg=\int f_1 dg+i\int f_2 dg.$$

记复数 $\int f dg$ 的极坐标表示为 $re^{i\theta}$，那末有

$$\left|\int f dg\right|=e^{-i\theta}\int f dg=\int f_1\cos\theta dg+\int f_2\sin\theta dg$$

$$=\int(f_1\cos\theta+f_2\sin\theta)dg\leqslant\int|f|dg,$$

证毕.

5. 逐项积分定理的应用

这一小节中将给出前面积分和极限交换顺序的定理在参变量积分和 Fourier 变换中的应用.

定理 6 设 $f(x, t)$ 是定义在矩形 $\langle a, b\rangle\times\langle\alpha, \beta\rangle(\alpha\neq\beta)$ 上的有限函数，如果对任何固定的 $t\in\langle\alpha, \beta\rangle$，$f(x, t)$ 是(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积的，并且当 $t'\to t$ 时，$f(x, t')$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上几乎处处收敛于 $f(x, t)$[注2]，另外还存在 $\langle a, b\rangle$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数 F，使得对每个 $t\in\langle\alpha, \beta\rangle$，

$$|f(x, t)|\leqslant F(x). \tag{3.41}$$

那末积分

[注1] $\bar{f}$ 表示 f 的复数共轭.

[注2] 这意思是指当 t' 任取一列 t'_n 趋向于 t 时，$\{f(x, t'_n)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x, t)$.

$$\varphi(t)=\int f(x,\ t)dg(x) \tag{3.42}$$

是 $\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 上 t 的连续函数.

证明　任取 $t_0\in\langle\alpha,\ \beta\rangle$. 设 $\{t_n\}$ 是 $\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 中任一收敛于 t_0 的序列. 由(3.41)知道对序列 $\{f(x,\ t_n)\}$ 存在可积的控制函数 F, 因此, 由定理 5 得到

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n)=\lim_{n\to\infty}\int f(x,\ t_n)dg(x)$$

$$=\int f(x,\ t_0)dg(x)=\varphi(t_0),$$

这就是说 t_0 是 φ 的连续点. 因为 t_0 是任取的, 所以 φ 在 $\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 上点点连续(即 φ 是连续函数). 证毕.

定理 7　设 $f(x,\ t)$ 是定义在 $\langle a,\ b\rangle\times\langle\alpha,\ \beta\rangle(\alpha\neq\beta)$ 上的有限函数. 对某个 $t_0\in\langle\alpha,\ \beta\rangle$, 如果 (1) 存在 t_0 的环境 $(\lambda,\ \mu)$, 使得当 $t\in(\lambda,\ \mu)\cap\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 时, $f(x,\ t)$ 是(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积的; (2) 对几乎所有的 $x\in\langle a,\ b\rangle$, $f(x,\ t)$ 在 t_0 点可微; (3) 存在 $\langle a,\ b\rangle$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数 F, 使得

$$\left|\frac{f(x,\ t_0+h)-f(x,\ t_0)}{h}\right|\leqslant F(x),\quad t_0+h\in(\lambda,\ \mu)\cap(\alpha,\ \beta). \tag{3.43}$$

那末, 积分(3.42)在 t_0 点可微, 并且

$$\frac{d}{dt}\int f(x,\ t)dg(x)\,\Big|_{t=t_0}=\int\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ t)\,\Big|_{t=t_0}dg(x). \tag{3.44}$$

证明　任取 $\{h_n\}(h_n\neq0)$, $h_n\to0$. 不妨设

$$t_0+h_n\in(\lambda,\ \mu)\cap\langle\alpha,\ \beta\rangle.$$

由假设, 当 $n\to\infty$ 时, 对几乎所有的 $x\in\langle a,\ b\rangle$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,\ t_0+h_n)-f(x,\ t_0)}{h_n}=\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ t)\,\Big|_{t=t_0}.$$

由于假设(3.43),

$$\left|\frac{f(x,\ t_0+h_n)-f(x,\ t_0)}{h_n}\right|\leqslant F(x).$$

对于序列 $\left\{\frac{f(x, t_0+h_n)-f(x, t_0)}{h_n}\right\}$ 用控制收敛定理立即得到定理 7. 证毕.

当然还有关于积分与积分交换顺序的问题. 因为这个问题实质上是二次积分交换顺序问题, 它还涉及到重积分, 所以我们将放在 §4 中讨论.

Fourier 变换

定义 设 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上复值有限函数, 如果对任何有限个复数 z_1、…、z_n 和实数 t_1、…、t_n, 满足

$$\sum_{i,j} f(t_i-t_j)z_i\bar{z}_j \geqslant 0, \tag{3.45}$$

称 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上的*正定函数*.

显然, f 是正定函数的充要条件是对任何有限个实数 t_1、…、t_n, 用 $f(t_i-t_j)$ 作为 $n\times n$ 方阵的第 i 行第 j 列的矩阵元时, 方阵 $(f(t_i-t_j))$ 是正定阵. 例如函数 $f\equiv 0$ 是正定函数. 再如对任何 $x\in(-\infty, \infty)$, e^{itx} 是 $(-\infty, \infty)$ 上的正定函数. 这是因为对任何 z_1、…、z_n,

$$\sum_{k,l} e^{i(t_k-t_l)x}z_k\bar{z}_l = \left|\sum e^{it_kx}z_k\right|^2 \geqslant 0.$$

例 4 设 g 满足 $g((-\infty, \infty))<\infty$, 那末 e^{itx} 对任何

$$t\in(-\infty, \infty)$$

是 x 的(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数, 并且

$$\varphi(t)=\int e^{itx}dg(x) \tag{3.46}$$

是 $(-\infty, \infty)$ 上 t 的正定且连续的函数.

通常称 $\varphi(t)$ 为 $g(x)$ 的 Fourier 变换. 如果 $g(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上概率分布, 在概率论中通常称 $\varphi(t)$ 为概率分布的*特征函数*. 它在分析概率论中具有非常重要的地位.

证明 固定 t, e^{ixt} 是 x 的连续函数. 对每个自然数 n, 作

$$f_n(x)=\begin{cases} e^{itx}, & \text{当 } x\in[-n, n] \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x\bar{\in}[-n, n] \text{ 时}. \end{cases}$$

由于 f_n 是 $[-n, n]$ 上连续函数, 因而 f_n 是 $[-n, n]$ 上 $(L\text{-}S)(g)$ 类

函数，自然也是$(-\infty, \infty)$上$(L\text{-}S)(g)$类函数．另一方面，由于$|f_n|\leqslant 1$，常数1是关于g可积的(因为$g((-\infty, \infty))<\infty$)，并且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=e^{itx},$$

所以对固定的t，e^{itx}是$(-\infty, \infty)$上$(L\text{-}S)(g)$类函数．对于任何有限个z_1、…、z_n；t_1、…、t_n，由于

$$\sum_{k,l=1}^{n}\varphi(t_k-t_l)z_k\bar{z}_l=\int\left|\sum_{k=1}^{n}e^{it_kx}z_k\right|^2dg\geqslant 0,$$

所以$\varphi(t)$是正定函数．最后再验证$\varphi(t)$的连续性：设$t_0\in(-\infty, \infty)$，因为对任何t，$x\in(-\infty, \infty)$，

$$|e^{itx}-e^{it_0x}|\leqslant 2;$$

而对每个$x\in(-\infty, \infty)$，$\lim\limits_{t\to t_0}e^{itx}=e^{it_0x}$．因此由定理6，立即知道$t_0$是$\varphi(t)$的连续点，从而$\varphi(t)$是$(-\infty, \infty)$上连续函数．证毕．

注 S. Bochner 曾经证明了相反的事实，即对任何一个$(-\infty, \infty)$上正定连续函数$\varphi(t)$，必存在$(-\infty, \infty)$上单调增加右连续函数$g(x)$，使得(3.46)成立(自然此时g还自动满足

$$g((-\infty, \infty))=\varphi(0)<\infty),$$

并且g除去一个常数差别之外是唯一的(如果不要求g是在所有点上右连续或左连续，那末g还可以在跳跃点上有取不同值的差别)．这是经典调和分析中很基本的结果．

例5 设f是$(-\infty, \infty)$上勒贝格可积函数，那末

$$\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}f(x)dx \tag{3.47}$$

是$(-\infty, \infty)$上α的连续函数，而且

$$\tilde{f}(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha x}-1}{-ix}f(x)dx, \tag{3.48}$$

通常称$\tilde{f}(\alpha)$为$f(x)$的 Fourier 变换．

证明 由于对每个α，$|f(x)e^{-i\alpha x}|\leqslant|f(x)|$，由定理6知$\tilde{f}(\alpha)$是$\alpha$的连续函数．

另一方面，由于

$$\left|\frac{e^{-i(\alpha+\Delta\alpha)x}-1}{ix}-\frac{e^{-i\alpha x}-1}{ix}\right|$$

$$=\left|\frac{e^{-i\Delta\alpha x}-1}{ix}\right|=\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}x}{x}\right|\leqslant|\Delta\alpha|, \tag{3.49}$$

不妨设$|\Delta\alpha|<1$，取$F(x)=|f(x)|$，由定理7知道关于α的微分可以和(关于x的)积分交换顺序，因而得到

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha x}-1}{-ix}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-i\alpha x}-1}{-ix}\right)f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}f(x)dx=\tilde{f}(\alpha).$$

例6 设f是$(-\infty, \infty)$上勒贝格可积函数，并且存在n，使得$(1+|x|)^n|f(x)|$也是勒贝格可积函数，那末$\tilde{f}(\alpha)$必具有n阶连续导函数．如记$P(y)$是y的不高于n阶的多项式，还成立

$$P\left(i\frac{d}{d\alpha}\right)\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}P(x)f(x)dx. \tag{3.50}$$

(3.50)的另一种写法是

$$\widetilde{Pf}(\alpha)=P\left(i\frac{d}{d\alpha}\right)\tilde{f}(\alpha). \tag{3.51}$$

证明 仅证$n=1$的情况(对于一般的n可用归纳法)．由于(类似于(3.49))

$$\left|\frac{e^{-i(\alpha+\Delta\alpha)x}-e^{-i\alpha x}}{\Delta\alpha}\right|\leqslant|x|,$$

取$F(x)=(1+|x|)|f(x)|$，由定理7，知道对α的微分可以和(对x的)积分交换顺序，从而

$$i\frac{d}{d\alpha}\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}i\frac{d}{d\alpha}e^{-i\alpha x}f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}xf(x)dx.$$

因而对任何一次多项式$P(y)=a_0+a_1y$，得到

$$\left(a_0+a_1i\frac{d}{d\alpha}\right)\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}(a_0+a_1x)f(x)dx.$$

证毕．

显然，当 $f(x)$ 是勒贝格可积函数，并且 $f(x) \underset{m}{\geqslant} 0$ 时，如果取

$$g(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,$$

那末 $g(x)$ 便是 $(-\infty,\ \infty)$ 上单调增加右连续函数（其实，$g(x)$ 不仅连续，而且还是"全连续函数"——参见本书第三章 § 5）并且 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的密度函数．因此，这时例 5 就是例 4 的特殊情况：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} dg(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x)\,dx.$$

这个等式的严格证明将在第三章 § 5 中给出．

此外，还可以证明：

(1) 设 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 是两个勒贝格可积函数，如果

$$\tilde{f}_1(\alpha)=\tilde{f}_2(\alpha),$$

那末必有 $f_1 \underset{m}{\doteq} f_2$.

(2) 如果 $\tilde{f}(\alpha)$ 是 α 的勒贝格可积函数，那末

$$f(x) \doteq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\tilde{f}(\alpha)\,d\alpha.$$

6．广义黎曼积分和勒贝格积分

$(L\text{-}S)$ 积分有一个重要的性质：如果 $f \in (L\text{-}S)(g)$，那末

$$|f| \in (L\text{-}S)(g)$$

（即绝对可积性）．特别当 $g(x)=x$ 时，自然也有这个性质．即 f 是勒贝格可积时，$|f|$ 必也是勒贝格可积的．但是，广义黎曼积分并不具有这个性质．例如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

在数学分析中已证明了上面的 f 在 $[0,\ 1]$ 上是广义黎曼可积的（但 $|f|$ 不是广义黎曼可积的）．可是，f 不是勒贝格可积的．事实上，如果 f 是勒贝格可积的，那末 $|f|$ 必是 $[0,\ 1]$ 上勒贝格可积的（勒贝格积分的绝对可积性），从而对任何 $0<\eta<1$，应该有

$$(R)\int_{\eta}^{1}|f|dx=(L)\int_{\eta}^{1}|f|dx<(L)\int_{0}^{1}|f|dx. \qquad (3.52)$$

当 $\eta\to 0$ 时，上式左边趋向 ∞，所以 $|f|$ 不是 $[0, 1]$ 上勒贝格可积函数. 从广义积分来看，新积分似乎比过去有了"损失"，但这点损失换来了逐项积分条件的极大改善. 可以这样说：要想保持逐项积分的定理 3、3′、4、4′ 以及 5 等，就不可避免地要求可积函数具有绝对可积性，读者如果对可测集和积分的可列可加性有所了解后，就能明白其中的道理了.

附　　录

7. 可取无限值的积分

前面积分定义时，我们总是假定可积函数的 $(L\text{-}S)$ 积分值是有限的. 如果允许积分可以取无限大值(函数当然也可以扩充成考虑取无限大值的函数，但通常总假设，除去一个 g-零集外，函数是有限值的)，这对积分与极限交换顺序问题的叙述是方便的，下面简略介绍一下可取无限大值的积分建立的过程和极限定理的叙述.

建立过程　仍从 C_0 类出发，C_0 类中函数的积分如前，因此，每个 C_0 类中函数的积分 $\int\varphi dg$ 仍是有限值的. 原来的 $C_1(g)$ 类要扩充成满足下面条件的函数全体：存在 C_0 类中单调序列 $\{\varphi_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=f$，称 f 为 $C_1(g)$ 类函数，并规定

$$\int fdg=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n dg.$$

显然，$\int fdg$ 可能取正无限大值了 $\left(\text{因为}\int\varphi_1dg\leqslant\int\varphi_2dg\leqslant\cdots\leqslant\int\varphi_ndg\leqslant\cdots,\right.$ 所以 $C_1(g)$ 中 f 的积分 $\int fdg$ 不会取负无限大值$\left.\right)$. $(L\text{-}S)(g)$ 类也要扩充成如下函数的全体：$f=f_1-f_2$，其中 $f_1, f_2\in C_1(g)$，但 f_1、f_2 中至少有一个积分是有限的(这个限制的目的是在下式中不出现不定式 $\infty-\infty$). 这时规定

$$\int f\,dg=\int f_1dg-\int f_2\,dg$$

这样得到的可取无限值的积分，基本上保持了有限值积分的性质. 唯一要注

意的是：两个$(L-S)(g)$类函数f_1、f_2，假定$\int f_1\,dg$、$\int f_2\,dg$中有一个积分是有限的，就有下面的代数等式

$$\int(f_1\pm f_2)dg=\int f_1dg\pm\int f_2dg.$$

显然，假定$\int f_1\,dg$、$\int f_2\,dg$中有一个是有限的，这是为了避免出现$\infty-\infty$之类的不定式。除此而外读者不难一一验证积分的其它初等性质。关于极限性质，现在的叙述就方便了。

Levi 引理 设$\{f_n\}\subset(L-S)(g)$，并且$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$，如果$\int f_1dg$是有限的，那末必有

$$\int\lim_{n\to\infty}f_ndg=\lim_{n\to\infty}\int f_ndg.$$

换言之，对于单调增加序列（因为极限函数总存在，当然极限值可以无限大），只要第一个函数f_1按普通意义可积，那末就可逐项积分了。如果积分的极限是有限的，那末极限函数的积分自动是有限值，从而极限函数必几乎处处是有限值。这里第一个函数f_1在普通意义下可积这个条件是不能少的。

例 7 取$g(x)=x$，而

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x\in(-\infty,\ -n]\text{时},\\ 0, & \text{当 } x\in(n,\ \infty)\text{时},\end{cases}\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

易知$\int f_ndg=-\infty$，并且$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$，而$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，即极限函数$f\equiv0$。显然，$\int fdx=0$。所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}f_ndx=0\neq-\infty=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_ndx.$$

Fatou 引理 设$\{f_n\}\subset(L-S)(g)$，如果存在$f_0\in(L-S)(g)$，$\int f_0dg$有限，并且$f_0\leqslant f_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，那末必有

$$\int\varliminf_{n\to\infty}f_ndg\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int f_ndg.$$

同 Levi 引理一样，存在一个普通意义下可积的f_0，满足$f_0\leqslant f_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，这个条件是不能少的。上面 Levi 引理后的反例可以作为这里的反例。

对于单调下降序列的 Levi 引理或级数形式的 Levi 引理以及上限形式的 Fatou 引理有类似的叙述，这里略去。引入取无限值的积分对于控制收敛定理的叙述未能带来什么方便。

8. 积分极限定理的等价性

在第二小节中介绍的积分极限定理3、4、5其实是等价的，即当知道其中一个定理成立时，另外两个定理就成立. 本书采用的是由 Levi 引理推出 Fatou 引理，再推出控制收敛定理，也有的书是先证明控制收敛定理，然后推出其它的定理.

9. 直线上一般(带符号)的勒贝格-斯蒂阶积分

不难把前面讨论的关于单调增加右连续函数 g 的勒贝格-斯蒂阶积分推广到 g 不是单调增加，而是在任何区间 $[-n, n]$ $(n=1, 2, \cdots)$ 上是右连续的有界变差函数的情况.

对直线上右连续的局部有界变差函数(即在任何有限区间上是有界变差的函数) g，有类似的 Jordan 分解，即存在 $(-\infty, \infty)$ 上两个单调增加右连续函数 $p(x)$、$n(x)$，使得(取 a 为 g 的某个连续点)

$$g(x)-g(a)=p(x)-n(x),$$

$$p(x)+n(x)=\bigvee_a^x(g)\quad\left(\text{当 } x<a \text{ 时 } \bigvee_a^x(g)=-\bigvee_x^a(g)\right),$$

且 $p(a)=n(a)=0$. 当 $x>a$ 时，$p(x)$、$n(x)$ 分别表示 g 在 $[a, x]$ 上正、负变差，当 $x<a$ 时，$-p(x)$、$-n(x)$ 表示 g 在 $[x, a]$ 上正、负变差.

当 f 关于 n、p 可积 $\left(\text{等价于 } f \text{ 关于 } \bigvee_a^x(g) \text{ 可积}\right)$ 时，规定

$$\int f dg=\int f dp-\int f dn,$$

这样的积分具有和 g 是单调增加的情况下积分的相似性质. 只有两点是改变了：(1)失去积分的单调性，由此而来的是：(2)在过去 g 是单调增加下所有有关"几乎处处"的假设，现在都必须改为关于

$$\bigvee_a^x(g)=p(x)+n(x)$$

几乎处处成立.

例如，在 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上，$g(x)=\sin x$，$f(x)=1$. 显然 $f>0$，但

$$\int_{\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]} f dg=-1.$$

再如，当 $x\in(n, n+1]$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 时，$g(x)=(-1)^n$，而

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in[-n, n] \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in}[-n, n] \text{ 时},\end{cases}\quad n=1, 2, \cdots$$

显然，$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$，在 $(-\infty, \infty)$ 上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=1$，并且 f_n 关于 $\bigvee_a^x(g)$ 是可积的，

$$\int f_n dg = \int_{-n}^{n} dg = 0.$$

然而，f 关于 g 是不可积的 $\left(\text{因为 } f=1 \text{ 关于 } \overset{x}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(g) \text{ 不可积}\right)$.

所以，有关积分极限定理应改为下面的形式.

Levi 引理　设 $\{f_n\}$ 是单调序列，并且

$$\int f_n d \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) \leqslant A < \infty \quad (n=1, 2, \cdots),$$

那末必存在(关于 g)可积的函数 f，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n \underset{\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)}{\doteq} f,$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dg = \int f dg.$$

Fatou 引理一般用得不多．因为它本身得到的结论是不等式，而由于 g 失去单调性，所以不等式性质一般不能保存下来.

控制收敛定理　设 $\{f_n\}$ 关于 g 是可积的，

$$\lim_{n\to\infty} f_n \underset{\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)}{\doteq} f,$$

如果存在关于 g 的可积函数 F，使得

$$|f_n| \underset{\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)}{\leqslant} F,$$

那末 f 关于 g 必可积，而且

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dg = \int f dg.$$

10．上、下限

对于有限数列 $\{x_n\}$ 的上、下限需要补充的是证明下面两件事：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在(允许取无限大值)的充要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \left(= \lim_{n\to\infty} x_n\right); \tag{3.53}$$

(2) 上、下限可以表示成二次极限

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \max(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}), \tag{3.54}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \min(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}). \tag{3.55}$$

证明　(1) 如果 $\{x_n\}$ 有极限，显然任何子列必收敛(发散于正无限大或负无限大也叫收敛于正无限大或负无限大)，并且收敛于同一个极限值，所以 $\{x_n\}$ 的上、下限相等并且等于极限值．反之，假设一切收敛子列的极限值中的最大、最小值已经相等，从而 $\{x_n\}$ 的任何收敛子列必收敛于同一个值．如果 $\{x_n\}$ 不收敛，那么容易从 $\{x_n\}$ 中抽出两个收敛于不同值的子列．显然这是

不可能的. 因而 $\{x_n\}$ 必收敛.

(2) 先证(3.55). 记

$$G_{nm}=\min(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}).$$

固定 n, 显然 $\{G_{nm}\}$ 是单调下降数列, 因而有极限, 记为

$$G_n=\lim_{m\to\infty} G_{nm}. \tag{3.56}$$

又因为 $\qquad G_{nm}\leqslant G_{n+1,m-1}, \quad n=1, 2, \cdots; m=2, 3, \cdots$

所以 $\qquad G_n=\lim_{m\to\infty} G_{nm}\leqslant\lim_{m\to\infty} G_{n+1,m-1}=G_{n+1},$

从而 $\{G_n\}$ 是单调增加序列, 因此, $\lim\limits_{n\to\infty} G_n$ 也存在, 记

$$G=\lim_{n\to\infty} G_n=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} G_{nm}.$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的任何收敛子序列, 因为 $G_{n_km}\leqslant x_{n_k}$, 所以

$$\lim_{m\to\infty} G_{n_km}\leqslant x_{n_k},$$

从而 $\qquad G=\lim\limits_{n\to\infty} G_n=\lim\limits_{n_k\to\infty} G_{n_k}=\lim\limits_{n_k\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} G_{n_km}\leqslant\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k},$

即 G 不超过任何收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 的极限, 从而 $G\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

反之, 取 $\{x_n\}$ 的子列如下: 对每个 $\nu(\nu=1, 2, \cdots)$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } G_\nu>-\infty \text{ 时, 取 } G_\nu<x_{n_\nu}<G_\nu+\dfrac{1}{\nu};\\ \text{当 } G_\nu=-\infty \text{ 时, 取 } G_\nu<x_{n_\nu}<-\nu.\end{array}\right. \tag{3.57}$$

并且做到 $1<n_1<n_2<\cdots<n_\nu<\cdots$. 由(3.57)易知无论什么情况下, 总有

$$G=\lim_{\nu\to\infty} G_\nu\leqslant\lim_{\nu\to\infty} x_{n_\nu}\leqslant\lim_{\nu\to\infty}\left(G_\nu+\frac{1}{\nu}\right)\left(\text{或}\lim_{\nu\to\infty} -\nu\right)=G,$$

从而 G 是一个子列的极限值, 因而 $G\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$. 证毕.

类似可以证明(3.54). 当然也可以直接利用(3.55),

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} x_n&=-\varliminf_{n\to\infty}(-x_n)=-\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\min(-x_n, \cdots, -x_{n+m})\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}-\min(-x_n, \cdots, -x_{n+m})\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\max(x_n, \cdots, x_{n+m}).\end{aligned}$$

习 题

1. 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格-斯蒂阶可积函数. 证明: 对任何 $\varepsilon>0$, 必存在 $\delta>0$, 使得任何有限个互不相交的区间 $\langle a_i, b_i\rangle\subset\langle a, b\rangle$, $i=1, 2, \cdots, n$, 如果满足

$$\sum_i g(\langle a_i, b_i\rangle)<\delta,$$

那末必有
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{(a_i,b_i)}|f|dg<\varepsilon.$$

(特别，当 f 是 $[a, b]$ 上勒贝格可积函数时，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当有限个互不相交的区间 $(a_i, b_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ 的总长度
$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$$
时，必有
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{(a_i,b_i)}|f|dx<\varepsilon.\ )$$

2．证明在定理1中将有限个互不相交的区间换为可列个互不相交的区间时，相应的结论也成立。

3．举例说明习题1、2中，把互不相交改为可以相交时，结论不成立。

4．(黎曼-勒贝格引理) 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格可积函数，证明
$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\cos tx dx=0,$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin tx dx=0.$$
(当 $\langle a, b\rangle=(-\infty, \infty)$ 时，上面的事实即 $\lim\limits_{\alpha\to\pm\infty}\tilde{f}(\alpha)=0$)．举例说明 (L) 积分换为 $(L\text{-}S)$ 积分时，一般不成立。

5．设 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可积函数，证明下面的(积分)平均连续性：
$$\lim_{h\to0}\int|f(x+h)-f(x)|dx=0.$$
举例说明 (L) 积分换为 $(L\text{-}S)$ 积分一般不成立。

6．设 $\{f_n\}$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上(关于 g)的勒贝格-斯蒂阶可积函数列，且
$$f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant\cdots\geqslant0.$$
证明 $\{f_n\}$ 在 $\langle a, b\rangle$ 上几乎处处收敛于0的充要条件是
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\langle a,b\rangle}f_n dg=0.$$

7．证明 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$，存在 $f_1, -f_2\in C_1(g)$，使得

(i) $f_2(x)\leqslant f(x)\leqslant f_1(x)$;

(ii) $\int(f_1-f_2)dg<\varepsilon$.

8．设 $\{f_n\}(n=0, 1, 2, \cdots)$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数列，如果满足：
$$f_n\geqslant f_0\quad(n=1, 2, \cdots);$$
$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{\langle a,b\rangle}f_n dg<\infty.$$

问：是否有 $\langle a, b\rangle$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数 f，使得 $f \doteq \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

9．设 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上两列勒贝格-斯蒂阶可积函数，并且满足：

$$|u_n| \leqslant v_n \quad (n=1, 2, \cdots);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int v_n dg < \infty.$$

证明必有 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格-斯蒂阶可积函数 s，使得 $s \doteq \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，并且

$$\int s dg = \sum_{n=1}^{\infty}\int u_n dg.$$

10．证明：当 f_1、f_2 是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格-斯蒂阶可积函数时，函数 $\sqrt{|f_1|^2+|f_2|^2}$ 也是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格-斯蒂阶可积函数.

11．设 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可积函数，a 是任一非零实数．证明 $f(ax)$ 也是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可积函数，并且

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{|a|}\int f(y)dy.$$

12．设 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可积函数，$\{a_n\}$ 是一列非零实数，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|} < \infty.$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n x)$ (关于 m) 几乎处处收敛，并求出它的勒贝格积分.

13．(Γ 函数与 Gauss 公式) 设 $z=x+iy$, $x>0$, 那末积分

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

存在，并且

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.$$

(提示：考虑下面的函数列

$$f_n(t) = \begin{cases}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1}, & \text{当 } 0\leqslant t<n \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } t\geqslant n \text{ 时}.\end{cases}\text{)}$$

14．(Fourier 变换的一致连续性和解析性) 设 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上 (关于 g) 勒贝格-斯蒂阶可积函数，证明

$$\varphi(\alpha) = \int e^{-i\alpha t} f(t) dg(t).$$

(i) 是 $(-\infty, \infty)$ 上 α 的一致连续函数；

(ii) 如果对 $t\in(-\infty, 0]$, $f(t)=0$, 那末 $\varphi(\alpha)$ 是下半平面的解析函数.

15．证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}e^{-x}\cos x dx=0.$$

16．证明：当定理2中的 f 是有界函数，即存在常数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 时，定理2的(1)、(2)中的 φ、ψ 还可以选得也满足 $|\varphi|\leqslant M$ 或 $|\psi|\leqslant M$ 成立.

17．设 $f(x)$ 是 $[0,\ \infty)$ 上勒贝格可积函数，并且在 $[0,\ \infty)$ 上均匀连续，那末必有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0,$$

并举例说明均匀连续的假设是不可去掉的.

18．(积分的可列可加性)设 f 是 $\langle a,\ b\rangle$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数，如果

$$\langle a,\ b\rangle=\bigcup_{i=1}^\infty \langle a_i,\ b_i\rangle,$$

其中 $\{\langle a_i,\ b_i\rangle\}$ 是一列互不相交的区间集，那末

（i）对每个 i，f 是 $\langle a_i,\ b_i\rangle$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数；

（ii）级数 $\sum_{i=1}^\infty\int_{\langle a_i,b_i\rangle}|f|dg$ 收敛，并且

$$\int_{\langle a,b\rangle} f dg=\sum_{i=1}^\infty\int_{\langle a_i,b_i\rangle} f dg.$$

反之，如果 f 满足(i)、(ii)条件，那末 f 必是 $\langle a,\ b\rangle$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数.

19．假设控制收敛定理已被证明，试利用控制收敛定理证明 Levi 引理(从而又可推出 Fatou 引理).

20．(1) 设 $K(x,\ y)$ 是 $[a,\ b]\times[c,\ d]$ $(a\neq b,\ c\neq d)$ 上二元连续函数. 证明对任何 $[c,\ d]$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积函数 $f(y)$，固定 x 后，(y 的函数)$K(x,\ y)f(y)$ 是 $[c,\ d]$ 上(关于 g)勒贝格-斯蒂阶可积的，并且

$$\varphi(x)=\int K(x,\ y)f(y)dy$$

是 $[a,\ b]$ 上连续函数.

(2) 如果 $K(x,\ y)$ 满足：对固定的 $x\in[a,\ b]$，$K(x,\ y)$ 是 y 的有界可测函数，而当固定 $y\in[c,\ d]$ 时，作为 x 的函数是连续的. 问(1)中 $\varphi(x)$ 是否是 x 的连续函数？(如果是，请证明；如果不是就举反例).

21．证明将定理2中的(3)中，$[a,\ b]$ 换为有限区间 $\langle a,\ b\rangle$ 也是对的.

§4 高维空间积分和累次积分

在这一节中将讨论高维空间上的勒贝格-斯蒂阶积分. 由于基本精神的一致性, 所以我们只讨论二维空间(即平面)上的积分, 并且, 和直线上类似的部分我们只简略地提一提结果. 平面积分又分一般的和比较特殊的, 但较经常用到的是比较特殊的情况, 即所谓乘积积分的情况. 它是本节中主要讨论的对象, 我们还要考察它和累次积分的关系. 而平面上的一般积分将放在本节附录中.

下面第1、2、3小节是仿直线情况的讨论.

1. $g_1\times g_2$-面积

视平面 E^2 为两根直线 E^1 的乘积空间, $E^2=E^1\times E^1$. 平面中点 z 记为 $z=(x, y)$, $x, y\in E^1$, 称集

$$J=\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle \tag{4.1}$$

为矩形. 由于直线上区间可以有两种形式: (a, b)、$[a, a]$, 所以平面上矩形的基本形式有四种. 重要的是当 $\langle a, b\rangle$、$\langle c, d\rangle$ 都是闭(或开)区间时, 相应于(4.1)的 J 称为闭(或开)矩形. 而称 $(a, b]\times(c, d]$ 为下开上闭矩形, $[b, a)\times[c, d)$ 为下闭上开矩形. 当 $\langle a, b\rangle$、$\langle c, d\rangle$ 是有限区间时, 称 I 为有限矩形, 否则称无限矩形. 记平面上有限矩形全体为 $\boldsymbol{P}$ 而有限个互不相交的矩形的和集全体记为 $\boldsymbol{R}_0$. 因此, 每个 $E\in\boldsymbol{R}_0$, 必可表示成

$$E=\bigcup_{i=1}^{n} J_i,$$

此地 $\{J_i\}$ 是有限个互不相交的矩形, 这时称 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i$(或 $\{J_i\}$)为 E 的初等分解.

显然, 当 $E\in\boldsymbol{R}_0$ 时, 初等分解并不唯一. 又易知对任何

$$E、F\in\boldsymbol{R}_0,\quad E\cup F、E-F\in\boldsymbol{R}_0$$

(即 $\boldsymbol{R}_0$ 是一个环).

设 $g_1(x)$, $g_2(y)$ 分别是 x, y 的单调增加右连续函数. 对每个 $I=\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle$, 称

$$g_1\times g_2(I)=g_1(\langle a,\ b\rangle)g_2(\langle c,\ d\rangle) \tag{4.2}$$

为矩形 I 的 $g_1\times g_2$-面积．特别，当 $g_1(x)=x$, $g_2(y)=y$ 时，矩形的 $g_1\times g_2$-面积就是普通面积．这种普通面积又常记为 $m(I)$．

当 $A\in \boldsymbol{R}_0$, $A=\bigcup_{i=1}^{n}J_i$ 是 A 的一个初等分解时，称

$$g_1\times g_2(A)=\sum_{i=1}^{n}g_1\times g_2(J_i) \tag{4.3}$$

为 A 的 $g_1\times g_2$-面积．

和直线情况的 g-长度完全类似(参见§1 定理 1、2)有如下结果(读者自己证明)：

定理 1　(1) $\boldsymbol{R}_0$ 中集 A 的 $g_1\times g_2$-面积不依赖于 A 的初等分解的选取．

(2) (有限可加性)A_1, $\cdots$, $A_n\in \boldsymbol{R}_0$, $A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$，那末

$$g_1\times g_2\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}g_1\times g_2(A_i).$$

(3) (可减性)A, $B\in \boldsymbol{R}_0$, $A\supset B$, 那末

$$g_1\times g_2(A-B)=g_1\times g_2(A)-g_1\times g_2(B).$$

(4) (单调性)A, $B\in \boldsymbol{R}_0$, $A\supset B$, 那末

$$g_1\times g_2(A)\geqslant g_1\times g_2(B).$$

(5) (次有限可加性)A_1, $\cdots$, $A_n\in \boldsymbol{R}_0$, 那末

$$g_1\times g_2\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}g_1\times g_2(A_i).$$

2. $g_1\times g_2$-零集

设 A 是 E^2 上一个点集，如果对任何 $\varepsilon>0$，总存在有限个或可列个有限矩形 $\{J_n\}$，使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n\supset A$，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}g_1\times g_2(J_n)<\varepsilon,$$

那末称 A 是 $g_1\times g_2$-零集．特别当 $g_1(x)=x$, $g_2(y)=y$ 时，$g_1\times g_2$-零集称为勒贝格零集，记为 m-零集．和直线上 g-零集相似，有下面的结果：

定理 2　(1) $g_1\times g_2$-零集的子集必是 $g_1\times g_2$-零集．

(2) 有限个或可列个 $g_1\times g_2$-零集的和集必是 $g_1\times g_2$-零集.

(3) 如果 x_0 是 $g_1(x)$(或 y_0 是 $g_2(y)$)的连续点,那末直线(特殊的矩形)$x=x_0$(或 $y=y_0$)是 $g_1\times g_2$-零集,特别,任意可列根直线是 m-零集.

(4) A 是 $g_1\times g_2$-零集的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$,存在有限个或可列个开矩形 $\{I_n\}$,使得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n\supset A$,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_1\times g_2(I_n)<\varepsilon.$$

在平面上也有(关于 $g_1\times g_2$)的几乎处处概念,并且有如下结果.

定理 3 (1) 设 $f_1\doteq f_2$, $h_1\doteq h_2$,那末对任何数 α、β,必有

$$\alpha f_1+\beta h_1\doteq \alpha f_2+\beta h_2.$$

(2) 设 $f\doteq h$,如果 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f,那末 $\{f_n\}$ 必几乎处处收敛于 h.

3. C_0 类、$C_1(g_1\times g_2)$ 类、$(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$ 类

平面上在有限个互不相交的矩形上为非零常数,其余点为零的函数,称为(平面上)的简单函数. 简单函数全体仍记为 C_0. 当 $\varphi\in C_0$,

$$\varphi(x, y)=\begin{cases} C_i\ (C_i\neq 0), & \text{当}(x, y)\in J_i \text{ 时}, i=1, 2, \cdots, n, \\ 0, & \text{当}(x, y)\,\overline{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i, \end{cases}$$

称 $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i g_1\times g_2(J_i)$ 为 φ 的积分,记为 $\int \varphi d g_1\times g_2$.

由于平面上 Borel 覆盖定理成立(即如果一族开矩形 $\{J_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 覆盖有限闭矩形,那末必可从 $\{J_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 中选出有限个 J_1、$\cdots$、J_n 覆盖 J)[注],从而可仿直线上情况引入 $C_1(g_1\times g_2)$ 类:

[注] 在平面上,Borel 覆盖定理的一般形式是:如果一族平面开集 $\{O_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 覆盖平面上有界闭集 F,必可从 $\{O_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 中选出有限个 O_1、$\cdots$、O_n 覆盖 F. 详见本书下篇第四章 §6.

设 f 是矩形 I 上有限实函数，如果存在 $\{\varphi_n\}\subset C_0$，满足

（i） $\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\doteq f$；

（ii） $\int\varphi_n dg_1\times g_2\leqslant A<\infty$；

称 f 为 I 上(关于 $g_1\times g_2$)的 C_1 类函数，E^2 上 C_1 类函数全体记为 $C_1(g_1\times g_2)$. 如果 f 是 I 上 $C_1(g_1\times g_2)$类函数，称 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n dg_1\times g_2$ 为 f 的积分，记为 $\int_I f dg_1\times g_2$.

同样引入 I 上 (关于 $g_1\times g_2$) 的 $(L\text{-}S)$ 类函数和它的积分，$(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$类上积分具有 §3 定理 1～5 及其系的类似性质. 为了便于查考，现将结果分两个定理列出.

定理 4　设 $f, h\in(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$，

(1) (单调性)当 $f\geqslant h$ 时，$\int f dg_1\times g_2\geqslant\int h dg_1\times g_2$；

(2) (线性)设 α, β 为任意两个常数，

$$\alpha f+\beta h\in(L\text{-}S)(g_1\times g_2),$$

且

$$\int(\alpha f+\beta h)dg_1\times g_2=\alpha\int f dg_1\times g_2+\beta\int h dg_1\times g_2;$$

(3) 如果另有函数 k，$k\doteq f$，那末 $k\in(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$，且

$$\int k dg_1\times g_2=\int f dg_1\times g_2;$$

(4) (绝对可积性)$|f|\in(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$，并且

$$\left|\int f dg_1\times g_2\right|\leqslant\int|f|dg_1\times g_2;$$

(5) $\max(f, h)$, $\min(f, h)\in(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$，且

$$\int\max(f, h)dg_1\times g_2\geqslant\max\left(\int f dg_1\times g_2,\ \int h dg_1\times g_2\right),$$

$$\int\min(f, h)dg_1\times g_2\leqslant\min\left(\int f dg_1\times g_2,\ \int h dg_1\times g_2\right);$$

(6) (全连续性)[注1] 对任何 $\varepsilon>0$, 必存在 $\delta>0$, 当任何有限个互不相交的矩形 J_1、…、J_n 满足 $\sum_{i=1}^{n} g_1\times g_2(J_i)<\delta$ 时, 那末

$$\sum_{i}\int_{J_i}|f|\,dg_1\times g_2<\varepsilon. \tag{4.4}$$

下面是极限性质. 设 $\{f_n\}\subset(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$,

(7) (Levi 引理)如果 $\{f_n\}$ 满足

(i) $f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$,

(ii) $\int f_n dg_1\times g_2\leqslant A<\infty\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$,

那末 $\{f_n\}$ 必几乎处处收敛于一个关于 $g_1\times g_2$ 的可积函数, 并且

$$\int\lim_{n\to\infty} f_n dg_1\times g_2=\lim_{n\to\infty}\int f_n dg_1\times g_2;$$

(8) (Fatou 引理)如果存在 $f_0\in(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$, 满足 $f_n\geqslant f_0$, $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 且

$$\varliminf_{n\to\infty}\int f_n dg_1\times g_2<\infty,$$

那末 $\varliminf_{n\to\infty} f_n$ 必关于 $g_1\times g_2$ 可积, 而且

$$\int\varliminf_{n\to\infty} f_n dg_1\times g_2\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int f_n dg_1\times g_2.$$

(9) (Lebesgue 控制收敛定理)设 $\{f_n\}\subset(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$, 如果存在 $F\in(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$, 使得 $|f_n|\leqslant F$, 并且 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛, 那末 $\lim_{n\to\infty} f_n$ 必是 $(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$ 类函数, 并且

$$\int\lim_{n\to\infty} f_n dg_1\times g_2=\lim_{n\to\infty}\int f_n dg_1\times g_2.$$

(10) (矩形可列可加性)[注2] 设矩形 $J=\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, 其中 $\{J_i\}$ 是一列互不相交的矩形, 那末 f 是 J 上 $(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$ 类的充要条件是:

(i) f 在每个 $J_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots)$ 上是 $(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$ 类;

[注1] "全连续性"可以推广到一般可测集的情况, 参见第三章可测集上积分.

[注2] "矩形可列可加性"可以推广到一般可测集的情况, 参见第三章§2可测集上积分.

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}\int_{J_i}|f|dg_1\times g_2<\infty$.

而当 f 在 J 上是 $(L-S)(g_1\times g_2)$ 类时，成立下面的等式：

$$\int_J f dg_1\times g_2=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{J_i} fdg_1\times g_2.$$

(11) (唯一性)如果 $f\in(L-S)(g_1\times g_2)$，$f\geqslant 0$，并且

$$\int fdg_1\times g_2=0,$$

那末 $f\doteq 0$.

(12) 设 $\{f_n\}\subset(L-S)(g_1\times g_2)$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 几乎处处存在，记 $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$. 如果存在 $F\in(L-S)(g_1\times g_2)$，使得 $|f|\leqslant F(n=1, 2, \cdots)$，那末 $f\in(L-S)(g_1\times g_2)$.

同直线的情形一样，我们引入如下概念：

定义 设 f 是矩形 J 上实有限函数，如果存在 $\{\varphi_n\}\subset C_0$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\doteq f$ 在 J 上成立，那末称 f 是 J 上 $g_1\times g_2$-可测函数. 在不会混淆时，简称 $g_1\times g_2$-可测函数为可测函数.

显然，可积函数必是可测函数，利用可测函数概念，(12) 也可以表述如下：

(12) 设 f 是矩形 J 上可测函数，如果存在 J 上 $(L-S)(g_1\times g_2)$ 类函数 F，使得 $|f|\leqslant F$，那末 f 必是 J 上 $(L-S)(g_1\times g_2)$ 类函数.

下面是积分的逼近性质.

定理 5 设 $f\in(L-S)(g_1\times g_2)$，那末对任何 $\varepsilon>0$，

(1) 必存在 $\varphi\in C_0$，使得 $\int|f-\varphi|dg_1\times g_2<\varepsilon$;

(2) 必存在平面上二元连续函数 ψ，使得

$$\int|f-\psi|dg_1\times g_2<\varepsilon;$$

(3) 当 f 是有限矩形 J 上 $(L-S)(g_1\times g_2)$ 类函数时，必存在二元多项式 $P(x, y)$，使得

$$\int_J |f-P|\,dg_1\times g_2<\varepsilon.$$

仿直线的情况，在利用定理5的(1)证明定理5的(2)时，要用到如下事实：当$\varphi(x, y)$是矩形$J=\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle$上取值为非零常数$c$，而在其余点的值是零时，$\varphi(x, y)$就是$c\chi_{\langle a,b\rangle}(x)\chi_{\langle c,d\rangle}(y)$，其中$\chi_{\langle a,b\rangle}(x)$、$\chi_{\langle c,d\rangle}(y)$分别是直线上区间$\langle a, b\rangle$、$\langle c, d\rangle$的特征函数。从而(12)的证明就化为直线上的情况了.

此外，对于平面上的勒贝格积分也有类似于直线上的如下结论：平面勒贝格积分对平面上的平移和反射是不变的.

4. 截口

为了讨论平面积分和累次积分的关系，先讨论平面集合和平面上函数的截口.

定义 设A是平面E^2上点集. 对任何x_0，称

$$A_{x_0}=\{(x, y)\mid (x, y)\in A,\ x=x_0\}$$

为集A在x_0处的截口，简称x_0-截口. 同样，对任何y_0，称集

$$A^{y_0}=\{(x, y)\mid (x, y)\in A,\ y=y_0\}$$

为集A在y_0处截口，简称y_0-截口.

设$f(x, y)$是定义在平面点集A上有限实函数，对任何x_0，称A_{x_0}上函数

$$f_{x_0}(y)=f(x_0, y)$$

为f在x_0处的截口，简称为x_0-截口. 同样，对任何y_0，称集A^{y_0}上函数

$$f^{y_0}(x)=f(x, y_0)$$

为f在y_0处的截口，简称为y_0-截口.

引理1 截口具有如下性质(y-截口和x-截口是对称的，所以我们只列出x-截口的性质)：

(1) A_{x_0}是y直线上的点集，并且A_{x_0}是A和直线$x=x_0$的交集.

(2) $f_{x_0}(y)$是y直线上点集A_{x_0}上的有限实函数.

(3) 如果$A=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，那末

$$A_{x_0}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_{\lambda x_0};\tag{4.5}$$

如果 $A=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, 那末

$$A_{x_0}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_{\lambda x_0};\tag{4.6}$$

如果 $A=B-C$, 那末

$$A_{x_0}=B_{x_0}-C_{x_0};\tag{4.7}$$

如果 $\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是互不相交的, 那末 $\{A_{\lambda x_0}|\lambda\in\Lambda\}$ 也是互不相交的.

(4) 对于矩形 $J=\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle$ 的截口 J_x, 当且仅当

$$x\overline{\in}\langle a, b\rangle$$

时, J_x 是空集; 当且仅当 $x\in\langle a, b\rangle$ 时, $J_x=\langle c, d\rangle$.

(5) 平面上简单函数 $\varphi(x, y)$ 的 x-截口 $\varphi_x(y)$ 是 y 轴上的简单函数.

(6) 设 $J=\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle$ 是有限矩形, $\chi_J(x, y)$、$\chi_{\langle a,b\rangle}(x)$、$\chi_{\langle c,d\rangle}(y)$ 分别是平面矩形 J、直线上区间 $\langle a, b\rangle$、$\langle c, d\rangle$ 的特征函数,

$$\begin{aligned}&\int\chi_J(x, y)dg_1\times g_2(x, y)\\ =&\int\left(\int\chi_{\langle a,b\rangle}(x)\chi_{\langle c,d\rangle}(y)dg_2(y)\right)dg_1(x)\\ &\times\int\chi_J(x, y)dg_1\times g_2(x, y)\end{aligned}\tag{4.8}$$

$$=\int\left(\int\chi_{\langle a,b\rangle}(x)\chi_{\langle c,d\rangle}(y)dg_1(x)\right)dg_2(y).\tag{4.9}$$

证明　(1)、(2)、(4) 是显然的.

(3)[注] 我们只证当 $A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 时, $A_{x_0}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_{\lambda x_0}$ (而其余的由读者来证): 因为

$$A_\lambda\subset A,$$

所以对每个 x_0, $A_{\lambda x_0}\subset A_{x_0}$, 从而

[注]　(3) 可直接利用本引理的 (1) 以及交运算的性质得到.

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{\lambda x_0}\subset A_{x_0}.$$

反之，对每个 $y\in A_{x_0}$，有 $(x_0, y)\in A=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$，从而必有某个 $\lambda\in\Lambda$，使得 $(x_0, y)\in A_\lambda$，即 $y\in A_{\lambda x_0}$. 因此，

$$A_{x_0}\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{\lambda x_0},$$

由此证明了(4.5).

(5) 设 $J=\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle$，当 $\varphi(x, y)=\chi_J(x, y)$ 时，

$$\chi_J(x, y)=\chi_{\langle a,b\rangle}(x)\chi_{\langle c,d\rangle}(y),$$

所以
$$\varphi_x(y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\overline{\in}\langle a, b\rangle \text{ 时},\\ \chi_{\langle c,d\rangle}(y), & \text{当 } x\in\langle a, b\rangle \text{ 时},\end{cases}$$

即 $\varphi_x(y)$ 是直线上简单函数. 因而对任何常数 C，函数 $C\cdot\chi_J(x, y)$ 的任何截口必也是直线上的简单函数. 但任何平面上简单函数必可写成

$$\varphi(x, y)=\sum_{i=1}^n C_i\chi_{J_i}(x, y),$$

其中 $\{C_i\}$ 是非零常数，而 $\{J_i\}$ 是互不相交的有限矩形. 记

$$\varphi_i(x, y)=\chi_{J_i}(x, y),$$

那末 $\varphi=\sum\limits_{i=1}^n C_i\varphi_i$，对任何 x，显然

$$\varphi_x(y)=\sum_{i=1}^n C_i\varphi_{ix}(y),$$

所以 $\varphi_x(y)$ 是直线上简单函数.

(6) 从平面上 C_0 类积分定义有

$$\int\chi_J(x, y)dg_1\times g_2(x, y)=g_1\times g_2(J)$$
$$=g_1(\langle a, b\rangle)g_2(\langle c, d\rangle). \quad (4.10)$$

另一方面，显然有

$$\int\chi_{\langle a,b\rangle}(x)\chi_{\langle c,d\rangle}(y)dg_2(y)$$
$$=\begin{cases}\int\chi_{\langle c,d\rangle}(y)dg_2(y), & \text{当 } x\in\langle a, b\rangle \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in}\langle a, b\rangle \text{ 时},\end{cases} \quad (4.11)$$

由此可知　　$$\varphi(x)=\int \chi_{\langle a,b\rangle}(x)\chi_{\langle c,d\rangle}(y)dg_2(y)$$

是 x 轴上简单函数，由简单函数积分定义知道

$$\int\varphi(x)dg_1(x)=\int\chi_{\langle c,d\rangle}(y)dg_2(y)g_1(\langle a,\ b\rangle)$$
$$=g_2(\langle c,\ d\rangle)g_1(\langle a,\ b\rangle),$$

结合(4.10)便得到(4.8).

类似可证(3.9). 证毕.

定理6　设 A 是 $g_1\times g_2$–零集，那末(关于 g_1)对几乎所有的 x，A_x 是 g_2–零集.

证明　设 n 是自然数，记 $A_n=A\cap([-n,\ n]\times[-n,\ n])$，如能证明：(关于 g_1)几乎所有的 x，A_{nx} 是 g_2–零集，那末从定理5便得到(关于 g_1)几乎所有的 x，$A_x=\bigcup\limits_n A_{nx}$ 是 $g_1\times g_2$–零集. 因此，我们不妨设 A 被包含在某个有限矩形 J 内的 $g_1\times g_2$–零集.

设 $A\subset J=\langle a,\ b\rangle\times\langle c,\ d\rangle$，$J$ 是有限矩形，A 是 $g_1\times g_2$–零集. 任取

$$\varepsilon=\frac{1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

存在一列有限矩形 $\{J_i^{(n)}\}$(不妨设 $J_i^{(n)}\subset J$)，使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}J_i^{(n)}\supset A$，并且

$$\sum_{i=1}^{\infty}g_1\times g_2(J_i^{(n)})<\frac{1}{n}. \tag{4.12}$$

由于　　$$\bigcup_{i=1}^{\infty}J_i^{(n)}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Big(J_i^{(n)}-\bigcup_{j=1}^{i-1}J_j^{(n)}\Big),$$

并且 R_0 中集　　$$J_i^{(n)}-\bigcup_{j=1}^{i-1}J_j^{(n)}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots)$$

又可表示成有限个互不相交的矩形的和，因此不妨设 $\{J_i^{(n)}\}$ 是一列互不相交的矩形. 记

$$J_i^{(n)}=\langle a_i^{(n)},\ b_i^{(n)}\rangle\times\langle c_i^{(n)},\ d_i^{(n)}\rangle,\quad B^{(n)}=\bigcup_{i=1}^{\infty}J_i^{(n)}.$$

由于 $A\subset B^{(n)}\subset J$，所以对任何 x，

$$A_x\subset B_x^{(n)}=\bigcup_{i=1}^{\infty}J_{ix}^{(n)}\subset J_x.$$

显然,只要证明对(关于 g_1)几乎所有的 x,

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g_2(J_{ix}^{(n)})=0, \tag{4.13}$$

就可以了. 现在证明(4.13). 因为 $\sum\limits_{i=1}^{k}g_2(J_{ix}^{(n)})\in C_0$, 并且

$$\int\sum_{i=1}^{k}g_2(J_{ix}^{(n)})dg_1(x)=\sum_{i=1}^{k}\int g_2(J_{ix}^{(n)})dg_1(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}g_1\times g_2(J_i^{(n)})<\frac{1}{n},$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots$$

所以,作为 x 的函数,

$$\sum_{i=1}^{\infty}g_2(J_{ix}^{(n)})=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}g_2(J_{ix}^{(n)})\in C_1(g),$$

并且
$$\int\sum_{i=1}^{\infty}g_2(J_{ix}^{(n)})dg_1(x)=\lim_{k\to\infty}\int\sum_{i=1}^{k}g_2(J_{ix}^{(n)})dg_1(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}g_1\times g_2(J_i^{(n)})<\frac{1}{n}.$$

又因为 x 的函数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_2(J_{ix}^{(n)})$ 是非负的, 由 Fatou 引理就得到

$$\int\varliminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g_2(J_{ix}^{(n)})dg_1(x)$$
$$\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int\sum_{i=1}^{\infty}g_2(J_{ix}^{(n)})dg_1(x)=0,$$

但 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_2(J_{ix}^{(n)})\geqslant 0$, 所以(4.13)成立.

同样可以证明除去一个 g_2-零集外, A^y 是 g_1-零集. 证毕.

定理 7　设 $f(x, y)$ 是矩形 $J=\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle$ 上(关于 $g_1\times g_2$)可测函数, 那末对(关于 g_1)几乎所有的 x-截口(或(关于 g_2)几乎所有的 y-截口), $f_x(y)=f(x, y)$ (或 $f^y(x)=f(x, y)$)是 $\langle c, d\rangle$ 上 g_2 的可测函数($\langle a, b\rangle$ 上 g_1 的可测函数).

证明　按可测函数定义, 存在 $\{\varphi_n\}\subset C_0$, 使得对任何

$$(x, y)\,\overline{\in}\,J,\quad \varphi_n(x, y)=0,$$

并且
$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\underset{g_1\times g_2}{\doteq}f.$$

记 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n$ 不存在或 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n\neq f$ 的点的全体为 E, $g_1\times g_2(E)=0$. 根据定理 6, 对(关于 g_1)几乎所有的 $x\in\langle a, b\rangle$, $g_2(E_x)=0$. 因为 $(x, y)\in J-E$ 时, $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x, y)=f(x, y)$, 因此对于满足 $g_2(E_x)=0$ 的 x, 下式成立

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{nx}(y)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x, y)=f(x, y)$$
$$=f_x(y), \quad ((x, y)\in J-E). \qquad (4.14)$$

但 $\varphi_{nx}(y)$ 是 y 的简单函数. 由(4.14)知道, 对(关于 g_1)几乎所有的 $x\in\langle a, b\rangle$, $f_x(y)$ 是简单函数列 $\{\varphi_{nx}(y)\}$ 的(关于 g_2)几乎处处收敛的极限, 从而 $f_x(y)$ 是 $\langle c, d\rangle$ 上 y 的可测函数.

同样可证定理的另外一部分. 证毕.

5. 二次积分和重积分

下面是本节最主要的内容, 即讨论平面积分和累次积分的关系.

定义 设 $f(x, y)$ 是矩形 $J=\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle$ 上有限实函数, 如果对 $\langle a, b\rangle$ 上(关于 g_1)几乎所有 x, $f_x(y)=f(x, y)$ 是 $\langle c, d\rangle$ 上(关于 g_2)可积函数, 即

$$\varphi(x)=\int_{\langle c, d\rangle} f(x, y)dg_2(y)$$

存在, 并且 $\varphi(x)$ 作为 $\langle a, b\rangle$ 上函数(对上面积分不存在的 x, 可规定 $\varphi(x)=0$ 或其它任意值)是 $\langle a, b\rangle$ 上(关于 g_1)可积函数, 那末称

$$\int_{\langle a, b\rangle}\varphi(x)dg_1(x)$$

是 $f(x, y)$ 在 J 上的一个二次积分, 记为

$$\int_{\langle a, b\rangle}\int_{\langle c, d\rangle} f(x, y)dg_2(y)dg_1(x). \qquad (4.15)$$

显然还可以定义另一个二次积分(定义的叙述从略)

$$\int_{\langle c, d\rangle}\int_{\langle a, b\rangle} f(x, y)dg_1(x)dg_2(y). \qquad (4.16)$$

相对于上面的二次积分, 我们称本节以前定义的积分

$$\int_J f(x, y)dg_1\times g_2(x, y)$$

是 f 在 J 上的重积分.

定理 8(Fubini) 设 $f(x, y)$ 是矩形 $J=\langle a, b\rangle\langle c, d\rangle$ 上有限可测函数.

(1) 如果 f 在 J 上重积分存在, 那末 f 的两个二次积分 (4.15)、(4.16) 均存在, 并且

$$\int_J fdg_1\times g_2=\int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle} fdg_2dg_1$$
$$=\int_{\langle c,d\rangle}\int_{\langle a,b\rangle} fdg_1dg_2. \qquad (4.17)$$

(2) 如果 $|f|$ 在 J 上一个二次积分存在[注], 那末 f 在 J 上的重积分也存在, 从而由(1)又得到(4.17)成立.

证明 (1) 当 $f\in C_0$ 时, f 是有限个互不相交的有限矩形特征函数的线性组合, 而对于有限矩形的特征函数, (4.17) 显然成立 (见定理 5 的(6)中(4.8)、(4.9)式). 但重积分和二次积分都具有线性, 因此对平面 C_0 类函数, (1) 成立.

如果 $f\in C_1(g_1\times g_2)$, 那末存在 $\{\varphi_n\}\subset C_0$, 使

$$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots,$$

$$\int_J \varphi_n dg_1\times g_2\leqslant A<\infty,\quad n=1, 2, \cdots \qquad (4.18)$$

以及 $g_1\times g_2$-零集 $E\subset J$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x, y)=f(x, y),\quad ((x, y)\in J-E), \qquad (4.19)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_J \varphi_n dg_1\times g_2=\int_J fdg_1\times g_2. \qquad (4.20)$$

因为 $g_1\times g_2(E)=0$, 所以存在 B, $g_1(B_1)=0$, 且当

$$x\in\langle a, b\rangle-B_1$$

[注] 当 f 是 J 上二元可测函数时, 必存在一列 $J\varphi_n\in C_0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x, y)=f(x, y),$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(x, y)|=|f(x, y)|,$$

即 $|f|$ 必是二元可测的.

时，$g_2(E_x)=0$. 记

$$\Phi_n(x)=\int_{\langle c,d\rangle}\varphi_n(x,\ y)dg_2(y),$$

那末，Φ_n 是 x 轴上简单函数．由 $\{\varphi_n\}$ 单调性，易知

$$\Phi_n(x)\leqslant\Phi_{n+1}(x),\quad n=1,\ 2,\ \cdots \tag{4.21}$$

并且

$$\int_{\langle a,b\rangle}\Phi_n(x)dg_1(x)=\int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle}\varphi_n(x,\ y)dg_2(y)dg_1(x)$$

$$=\int_J\varphi_n dg_1\times g_2\longrightarrow\int_J fdg_1\times g_2. \tag{4.22}$$

由 Levi 引理，存在 x 轴上零集 B_2，当 $x\overline{\in}B_2$ 时，

$$\Phi(x)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)<\infty \tag{4.23}$$

且

$$\int_{\langle a,b\rangle}\Phi dg_1=\lim_{n\to\infty}\int_{\langle a,b\rangle}\Phi_n dg_1=\int_J fdg_1\times g_2. \tag{4.24}$$

对每个 $x\overline{\in}B_1\cup B_2$，由积分单调性，

$$\int_{\langle c,d\rangle}\varphi_n(x,\ y)dg_2(y)\leqslant\Phi(x)<\infty,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

固定这个 $x\overline{\in}B_1\cup B_2$ 后，当 $y\overline{\in}E_x$ 时，

$$\varphi_1(x,\ y)\leqslant\varphi_2(x,\ y)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x,\ y)\leqslant\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x,\ y)=f(x,\ y).$$

作为 y 的函数，再利用 Levi 引理，得 $f_x(y)=f(x,\ y)$ 在 $\langle c,\ d\rangle$ 上(关于 g_2)可积，并且

$$\int_{\langle c,d\rangle}f(x,\ y)dg_2(y)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\langle c,d\rangle}\varphi_n(x,\ y)dg_2(y)=\Phi(x). \tag{4.25}$$

但 $B_1\cup B_2$ 仍是 g_1-零集，由 $\Phi(x)$ 的可积性立即得到 $\int_{\langle c,d\rangle}f(x,\ y)\cdot dg_2(y)$ 是 x 的可积函数．再由(3.25)、(3.24)得到

$$\int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle} f(x, y)dg_2(y)dg_1(x)$$

$$=\int_{\langle a,b\rangle}\Phi dg_1=\int_J fdg_1\times g_2,$$

即(4.17)的第一式成立.

同样可证(4.17)的第二式成立.

当 $f\in(L\text{-}S)(g_1\times g_2)$ 时, $f=f_1-f_2$, 其中

$$f_1、f_2\in C_1(g_1\times g_2),$$

利用(1)对 $C_1(g_1\times g_2)$ 中函数成立以及重积分和二次积分的线性, 易知(4.17)对 f 也成立.

(2) 分三步来证:

(i) 设 J 是有限矩形, $f\geqslant 0$, 并且

$$\int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle} fdg_2dg_1<\infty.$$

由于 f 在 J 上二元可测, 所以存在 $\varphi_n\in C_0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x, y)\doteq f(x, y). \tag{4.26}$$

对任何自然数 N, 令

$$f_N(x, y)=\min(f(x, y), N),$$

$$\varphi_{nN}(x, y)=\min(\varphi_n(x, y), N).$$

由(3.26)知

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{nN}(x, y)\doteq f_N(x, y), \tag{4.27}$$

即 $f_N(x, y)$是 J 上二元可测函数, 并且$|f_N(x, y)|\leqslant N$. 可是,

$$g_1\times g_2(J)<\infty,$$

根据定理 4 的(12)(取 $F(x, y)=N$), $f_N(x, y)$的重积分存在. 从而由本定理的(1)得到

$$\int_J f_N(x, y)dg_1\times g_2(x, y)$$

$$=\int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle} f_N(x, y)dg_2(y)dg_1(x)$$

$$\leqslant\int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle} f(x, y)dg_2(y)dg_1(x)<\infty. \tag{4.28}$$

又显然有

$$f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y) \leqslant \cdots \leqslant f_N(x, y) \leqslant \cdots,$$
$$\lim_{N\to\infty} f_N(x, y) = f(x, y). \tag{4.29}$$

根据重积分的 Levi 引理知道，$f(x, y)$在 J 上的重积分必存在.

(II) 仍设

$$f \geqslant 0, \quad \int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle} f dg_2 dg_1 < \infty,$$

但 $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ 是无限的. 对任何有限矩形

$$J' = \langle a', b'\rangle \times \langle c', d'\rangle \subset J,$$

今先证 f 在 J' 上重积分存在,并且

$$\int_{J'} f dg_1 \times g_2 = \int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle} f dg_2 dg_1. \tag{4.30}$$

事实上，在 J 上成立的(4.26)、(4.27)限制在 J' 上时自然也应成立，即 f 作为 J' 上函数是二元可测的. 但对任何自然数 N, f_N 在 J' 上重积分存在. 由本定理的(1)，

$$\int_{J'} f_N(x, y) dg_1 \times g_2(x, y)$$
$$= \int_{\langle a',b'\rangle} \int_{\langle c',d'\rangle} f_N(x, y) dg_2(y) dg_1(x). \tag{4.31}$$

因为 $\langle c', d'\rangle \subset \langle c, d\rangle$, $0 \leqslant f_N \leqslant f$, 对(关于 g_1)几乎所有的

$$x \in \langle a, b\rangle, \quad \int_{\langle c,d\rangle} f dg_2 < \infty,$$

所以对(关于 g_1)几乎所有的 $x \in \langle a', b'\rangle$,

$$\int_{\langle c',d'\rangle} f_N(x, y) dg_2(y) \leqslant \int_{\langle c',d'\rangle} f(x, y) dg_2(y)$$
$$\leqslant \int_{\langle c,d\rangle} f(x, y) dg_2(y), \tag{4.32}$$

从而由(4.31)得到

$$\int_{J'} f_N dg_1 \times g_2 \leqslant \int_{\langle a',b'\rangle} \int_{\langle c,d\rangle} f dg_2 dg_1$$
$$\leqslant \int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle} f dg_2 dg_1.$$

再注意到(4.29)，利用重积分的 Levi 引理便得到(4.30).

再证 f 在 J 上重积分存在：易知必存在平面上一列有限的矩形 $\{J_n\}$,

$$J_1\subset J_2\subset\cdots\subset J_n\subset\cdots, \tag{4.33}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n=J.$$

作 f_n 如下：

$$f_n(x,\ y)=\begin{cases}f(x,\ y), & 当(x,\ y)\in J_n\\ 0, & 当(x,\ y)\in J-J_n.\end{cases}$$

显然，从(4.30)得到(取 $J'=J_n$),

$$\int_J f_n dg_1\times g_2=\int_{J_n} f dg_1\times g_2\leqslant\int_{\langle a,b\rangle}\int_{\langle c,d\rangle} f dg_2 dg_1. \tag{4.34}$$

在 J 上又明显地成立着

$$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots,\quad \lim_{n\to\infty} f_n=f, \tag{4.35}$$

再用 Levi 引理就得到 f 在 J 上的重积分必存在.

(III) 证明一般情况. 由于 f 是 J 上可测函数，所以，(4.26)成立，由此易知

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi(x,\ y)|\doteq|f(x,\ y)|,$$

即 $|f|$ 是 J 上可测函数. 由于假设 $|f|$ 的一个二次积分存在，从(II)得到 $|f|$ 在 J 上重积分存在，利用定理4的(12)，取 $F(x,\ y)=|f(x,\ y)|$，就知道 f 在 J 上重积分存在.

同样可证在假设二次积分 $\int_{\langle c,d\rangle}\int_{\langle a,b\rangle}|f|dg_1dg_2$ 存在的情况下本定理的(2)成立. 证毕.

Fubini 定理告诉我们，可测函数在重积分存在的前提下，两个二次积分无条件地可以交换顺序. 对于一个可测函数，在重积分不知是否存在的情况下，如果 $|f|$ 的一个二次积分存在，那末另一个二次积分必存在，而且可以交换顺序. 这里条件"$|f|$ 的一个二次积分存在"是不可少的，即使两个积分相等，重积分也未必存在.

例 1 在矩形 $(0,\ 1]\times[1,\ \infty)$ 上函数

$$f(x,\ y)=e^{-xy}-e^{-2xy}$$

关于 $g_1(x)=x$, $g_2(y)=y$ 的两个二次积分存在并且是有限数，但是

$$\int_0^1\int_1^\infty(e^{-xy}-e^{-2xy})\,dy\,dx=\int_0^1\frac{1}{x}(e^{-x}-e^{-2x})\,dx>0,$$

$$\int_1^\infty\int_0^1(e^{-xy}-e^{-2xy})\,dx\,dy=\int_1^\infty-\frac{1}{y}(e^{-y}-e^{-2y})\,dy<0.$$

例 2 在矩形 $J=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$上，函数

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{当 } x^2+y^2\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=y=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

仍考虑勒贝格积分，利用函数 f 的奇性，易知

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,\ y)\,dy\,dx=0,$$

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,\ y)\,dx\,dy=0,$$

然而 f 在 J 上二重积分不存在．否则，f 在 J 上绝对可积，从而在 $J_1=(0,\ 1]\times(0,\ 1]$上重积分应存在，因此在 J_1 上二次积分存在．但是

$$\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^2+1)}=\frac{1}{2x(x^2+1)},$$

而 $\dfrac{1}{2x(x^2+1)}$ 不是$(0,\ 1]$上勒贝格可积函数．因此，在 J_1 上 f 的重积分实际上是不存在的．

附　录

6. 平面上一般的勒贝格-斯蒂阶积分

本节中第一至第五小节讨论的是分析学科中经常采用的平面勒贝格-斯蒂阶积分，但它是特殊的平面勒贝格-斯蒂阶积分．因为任何有限矩形 $J=\langle a,\ b\rangle\times\langle c,\ d\rangle$ 的 $g_1\times g_2$ 面积

$$g_1\times g_2(J)=g_1(\langle a,\ b\rangle)g_2(\langle c,\ d\rangle),\tag{4.2}$$

即 J 的"面积"等于"边" $\langle a, b\rangle$、$\langle c, d\rangle$ 的"长度" $g_1(\langle a, b\rangle)$、$g_2(\langle c, d\rangle)$ 之积．它是一种乘积积分(用测度论的语言来说，它是建立在 g_1、g_2 的(完全的)乘积测度上的积分．这可参见第三章中一般测度论简介)．

如果从物质质量或电荷分布来看(3.2)，就可显示出它的特殊性．例如，设想在平面上分布着某种物质或电荷(总量是1)，由这个分布可导出如下二元函数：

$\psi(x, y)=$矩形$(-\infty, x]\times(-\infty, y]$中总质量或总电荷量．显然，$\psi$ 应满足下列条件：

(i) 固定 x，$\psi(x, y)$ 是 y 的单调增加右连续函数；固定 y，$\psi(x, y)$ 是 x 的单调增加右连续函数；

(ii) 当 $a<b$，$c<d$ 时

$$\psi(b, d)-\psi(a, d)-\psi(b, c)+\psi(a, c)\geqslant 0;$$

(iii) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\psi(x, y)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\psi(x, y)=0$，$\lim\limits_{y\to-\infty}\psi(x, y)=0$．

类似于直线上的分布，在用二元函数 $\psi(x, y)$ 描述平面上的分布时，上述条件(iii)的出现是由于假定参考点选在$(-\infty, -\infty)$，并且全平面上总质量或总电荷量是 1 的缘故．因此当总质量或总电荷量是一般的情况(甚至可以无限大)，而参考点不在$(-\infty, -\infty)$时，条件(iii)将不再出现．可见由二元函数描述一般的平面分布最本质的条件是(i)、(ii)．

反之，当二元函数 $\psi(x, y)$ 满足条件(i)、(ii)时，对任何有限矩形 $J=(a, b]\times(c, d]$，规定

$$\psi(J)=\psi(b, d)-\psi(a, d)-\psi(b, c)+\psi(a, c),$$

并称 $\psi(J)$ 是 J 的 ψ-面积．类似直线上情况，可将 ψ-面积推广到平面上能够表示成有限个互不相交矩形的和的那种集上，再引入 ψ-零集，从而又可建立 C_0 类函数关于 ψ-面积的积分，以及引入 $C_1(\psi)$ 类，和关于 ψ 的$(L\text{-}S)$积分，对于这种积分也有一系列的性质(包括 Levi 引理，Fatou 引理和控制收敛定理等)．但由于 ψ 太一般了，所以不存在类似于 Fubini 定理的结果．同样还可考虑平面上带符号的 ψ 的积分．

习　题

1. 设 $\{\varphi_n\}$ 是平面上 C_0 类的数列，并且满足：

$$\varphi_1\geqslant\varphi_2\geqslant\cdots\geqslant\varphi_n\geqslant\cdots;\quad \varphi_n\geqslant 0\quad (n=1, 2, \cdots);$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \underset{g_1\times g_2}{\doteq} 0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi_n\,dg_1\times g_2=0$，

2．证明定理 1～5 的所有结论．

3．证明二次积分具有线性．

4．试叙述并证明三个变数的 Fubini 定理．

5．证明：对任何$(c, d)(c\neq d)$，平面集合

$$B=\{(x, y)\,|\,y-x\in(c, d)\}$$

可以分解成平面上可列个开矩形的和．又证明：对任何自然数 n，如记

$$J_n=[-n, n]\times[-n, n],$$

那末函数 $\chi_{B\cap J_n}(x, y)$属于平面上 $C_1(g_1\times g_2)$类．

6．设 E 是 m-零集，证明平面上集合

$$B_E=\{(x, y)\,|\,y-x\in E\}$$

是平面上 m-零集．

7．设f 是直线上勒贝格(即关于 m)可测函数，证明 $f(x-y)$是平面上勒贝格(即关于平面上 m)可测函数．举例说明：当 f 是直线上勒贝格可积函数时，$f(x-y)$不是平面上勒贝格可积函数，并求出 $f(x-y)$为平面上可积函数的充要条件．

8．设f、g 是两个直线上勒贝格可积函数，证明对(关于 m)几乎所有 x，

$$h(x)=\int f(x-t)g(t)\,dt$$

存在，而且函数 $h(x)$(在上述积分无意义的一个零集上补充定义后)是直线上勒贝格可积函数(通常称 h 为 f、g 的卷积，记为

$$h=f*g).$$

9．设 f、g 是直线上两个勒贝格可积函数，证明：

(i) $f*g=g*f$;

(ii) $\tilde{f}*g=\tilde{f}\bar{g}$;

(iii) $f*g$ 是勒贝格可积函数，且

$$\int f*g\,dx=\int f dx\int g dx.$$

10．设f 是$[a, b]$上勒贝格可积函数，$0<\alpha<1$，证明对(关于 m)几乎所有的 $t\in[a, b]$，积分

$$g(t)=\int_a^b\frac{f(x)}{|x-t|^\alpha}dx$$

存在，并且函数 $g(t)$(在上述积分不存在的点补充定义后)是$[a, b]$上勒贝格可积函数．

11．设 $f(x, y)$是 $\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle$ 上的(关于 $g_1\times g_2$)可测的函数，证明：

如果对(关于 g_1)几乎所有的 $x\in\langle a,\ b\rangle$, $f_x(y)$是 $\langle c,\ d\rangle$ 上(关于 g_2)可积的，那末函数

$$\varphi(x)=\int_{\langle c,d\rangle} f(x,\ y)\,dg_2(y)$$

必是 $\langle a,\ b\rangle$ 上(关于 g_1)的可测函数(对上述积分不存在的 x, 规定 $\varphi(x)=0$)。

第三章　可测函数、可测集与不定积分

可测函数与可测集是两个重要的概念，它们与积分的关系非常密切．一般书中，是先把 g-长度概念延拓成能定义在复杂点集（比我们在第二章中曾遇到的直线上的区间、可列个区间的和集等要复杂得多）上的 g-测度，然后讨论测度观念下的可测函数及其积分．而本书中采用的办法是直接建立积分，这样就更快地达到先介绍积分的基本结果．对于积分论中的测度、可测函数这两种重要概念读者必须有所了解，所以本章将对这两个概念作一些介绍．

§1　可测函数与可测集的性质

这一节将系统地讨论可测函数与可测集．

1．g-可测函数

为了系统起见，将第二章中已经遇到过的可测函数概念复述如下：

定义　设 g 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上单调增加右连续函数，f 是 $\langle a, b\rangle$ 上有限实函数，如果存在一列非零定义域包含在 $\langle a,\ b\rangle$ 上的简单函数 $\{\varphi_n\}$，使得（关于 g）在 $\langle a,\ b\rangle$ 上

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n \doteq f, \tag{1.1}$$

那么称 f 是（关于 g）在 $\langle a,\ b\rangle$ 上勒贝格-斯蒂阶可测函数，简称为 $\langle a,\ b\rangle$ 上 g-可测函数．特别当 $g(x)=x$ 时，g-可测函数 f 称为是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格可测函数，简称为 $\langle a, b\rangle$ 上 m-可测函数（或 L-可测函数）．如果 f 是 $\langle a,\ b\rangle$ 上复值函数，当 f 的实部 $\mathrm{Re} f$、虚部 $\mathrm{Im} f$ 分别是 g-可测（m-可测）时，称 f 是 $\langle a,\ b\rangle$ 上 g-可测（m-可测）函数，

常用的重要可测函数的例子有：

例1 直线上任何简单函数 φ（即 $\varphi\in C_0$）对任何 g 都是 $(-\infty,\ \infty)$ 上 g-可测的.

显然，只要取 $\varphi_n=\varphi(n=1,\ 2,\ \cdots)$，便知 φ 对任何 g 都是 $(-\infty,\ \infty)$ 上可测函数.

例2 任何 $(-\infty,\ \infty)$ 上 g-可测函数 f，视为 $\langle a,\ b\rangle\subset(-\infty,\ \infty)$ 上函数时（即将 f 限制在 $\langle a,\ b\rangle$ 上时，f 必是 $\langle a,\ b\rangle$ 上 g-可测函数.

因为 f 在 $(-\infty,\ \infty)$ 上 g-可测，所以存在简单函数列 $\{\varphi_n\}$，使得(1.1)式在 $(-\infty,\ \infty)$ 上成立，自然在 $\langle a,\ b\rangle$ 上(1.1)式也成立，因此 f 是 $\langle a,\ b\rangle$ 上 g-可测函数.

例3 f 是 $\langle a,\ b\rangle$ 上 g-可测函数，如果 f 在 $\langle a,\ b\rangle$ 外的点补充定义为 0，得到直线上的函数 $\hat{f}$，$\hat{f}$ 必是 $(-\infty,\ \infty)$ 上 g-可测函数.

事实上，因为 f 在 $\langle a,\ b\rangle$ 上 g-可测，所以存在非零定义域包含在 $\langle a,\ b\rangle$ 中的简单函数列 $\{\varphi_n\}$，使得(1.1)式在 $\langle a,\ b\rangle$ 上成立，因为在 $\langle a,\ b\rangle$ 以外的点 x 上，$\varphi_n(x)=0(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$\hat{f}(x)=0$，所以在 $(-\infty,\ \infty)$ 上（关于 g），

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\doteq\hat{f},$$

即 $\hat{f}$ 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上 g-可测函数.

例4 f 是 $\langle a,b\rangle$ 上连续函数，f 关于任何 g 必是 g-可测函数.

事实上，如果 $\langle a,\ b\rangle=[a,\ b]$，这时由 f 在 $[a,\ b]$ 上的均匀连续性，知道必存在 $[a,\ b]$ 上一列简单函数 $\{\varphi_n\}$，使得 $\{\varphi_n\}$ 一致收敛于 f，从而(1.1)对任何 g 在 $[a,\ b]$ 上成立. 因此，f 在 $[a,\ b]$ 上 g-可测.

如果 $\langle a,\ b\rangle=(a,\ b]$（$a$ 可以是 $-\infty$），那末，对任何自然数 $n>\dfrac{1}{b-a}$，f 是 $\left[a+\dfrac{1}{n},\ b\right]$（当 $a=-\infty$ 时，换为 $[-n,\ b]$，$-n<b$）上连续函数，由均匀连续性，存在非零定义域包含在 $\left[a+\dfrac{1}{n},\ b\right]$（$[-n,\ b]$）中的简单函数 φ_n，使得 $|\varphi_n(x)-f(x)|<\dfrac{1}{n}$ 在 $\left[a+\dfrac{1}{n},\right.$

$b]$ $([-n, b])$上成立，由此易知

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$$

对每个 $x\in(a, b]$成立. 自然关于任何 g，在$(a, b]$上(1.1)式成立，从而 f 是$(a, b]$上 g-可测函数.

同样可证，$\langle a, b\rangle=[a, b)$ (b 可以是 ∞)或 (a, b) 或$(-\infty, \infty)$的情况下，结论也成立.

例 5　多项式或三角多项式关于任何 g 是任何 $\langle a, b\rangle$上的 g-可测函数.

这是例 4 的特殊情况.

例 6　假设 $g(x)=\theta_1(x)$，那末任何$\langle a, b\rangle$上有限函数 f 都是$\langle a, b\rangle$上 θ_1-可测的.

事实上，如果 $0\overline{\in}\langle a, b\rangle$，取 $\varphi_n=0$ $(n=1, 2, \cdots)$，如果 $0\in\langle a, b\rangle$，作$\langle a, b\rangle$上一列简单函数：

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}f(0), & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\end{cases}\quad n=1, 2, \cdots$$

因为$(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$是 θ_1-零集，所以无论 $0\overline{\in}\langle a, b\rangle$ 或 $0\in\langle a, b\rangle$，关于 θ_1 总有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\doteq f,$$

即 f 是$\langle a, b\rangle$上 θ_1-可测函数.

是否对每一个 g，所有的有限函数都是 g-可测的？特别，是否所有的有限函数都是 m-可测的？这个问题的回答是否定的. 可以举出不可测函数的例子，具体的例子我们将放在 §3 末举出.

可测函数性质　可测函数有如下常用性质：

定理 1　设 f、h 是$\langle a, b\rangle$上的 g-可测函数，那末

(1) $\alpha f+\beta h$ (α、β 是常数)、$|f|$、$\max(f, h)$、$\min(f, h)$、f^+、f^-、fh 都是 g-可测函数.

(2) 如果 f (关于 g)几乎处处不等于零，那末 $\dfrac{1}{f}$ 是 g-可测函数(当 $f(x)=0$ 时，可规定 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为任意有限值).

(3) 当(关于 g) $k(x)\doteq f(x)$ 时, $k(x)$是 g-可测函数.

(4) 设 $k(x)$ 是$\langle a, b\rangle$上有限函数, $\langle a, b\rangle=\bigcup\limits_{i=1}^{l}\langle a_i, b_i\rangle$是互不相交的分解, 那末 k 在$\langle a, b\rangle$上 g-可测的充要条件是 k 在每个$\langle a_i, b_i\rangle$上为 g-可测函数.

(5) $\langle a, b\rangle$上 g-可积函数必是 g-可测函数.

(6) f 关于 g 可积的充要条件是存在 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可积函数 F, 使得(关于 g)

$$|f|\leqslant F.$$

(7) 如果 $g(\langle a, b\rangle)<\infty$, 并且存在常数 M, 使得(关于 g) $|f|\leqslant M$, 那末 f 必是$\langle a, b\rangle$上 g-可积函数.

(8) 设$\{f_n\}$是$\langle a, b\rangle$上一列 g-可测函数, 并且(关于 g)几乎处处收敛于 k, 那末 k 是$\langle a, b\rangle$上 g-可测函数.

证明 (为了简便, 下面证明中所有"关于 g"均省略)按假设, 存在$\{\varphi_n\}\subset C_0$, $\{\psi_n\}\subset C_0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\doteq f,\quad \lim_{n\to\infty}\psi_n\doteq h.$$

(1) 由于

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\varphi_n+\beta\psi_n)\doteq\alpha f+\beta h,$$

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi_n|\doteq f,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max}{\min}(\varphi_n, \psi_n)\doteq\frac{\max}{\min}(f, h),$$

$$\lim_{n\to\infty}\max(\varphi_n, 0)\doteq\max(f, 0)=f^+,$$

$$\lim_{n\to\infty}\max(-\varphi_n, 0)\doteq\max(-f, 0)=f^-,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\psi_n\doteq fh,$$

所以定理中(1)成立.

(2) 作 C_0 中函数列

$$\tau_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varphi_n(x)}, & \text{当 } \varphi_n(x)\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \varphi_n(x)=0 \text{ 时},\end{cases}\quad n=1, 2, \cdots$$

按假设存在$\langle a, b\rangle$上的 g-零集 E，当 $x\in\langle a, b\rangle-E$ 时，$f(x)\neq 0$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$. 所以对每个 $x\in\langle a, b\rangle-E$，当 n 充分大时，$\varphi_n(x)\neq 0$，从而 C_0 中序列$\{\tau_n\}$在$\langle a, b\rangle-E$ 上收敛于 $\dfrac{1}{f(x)}$，因此 $\dfrac{1}{f}$ 是 g-可测的.

(3) 从定义立即可得.

(4) 当 k 在$\langle a, b\rangle$上 g 可测时，存在 $\{\tau_n\}\subset C_0$，在 $\langle a, b\rangle$上 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n\doteq k$. 自然在$\langle a_i, b_i\rangle$ $(i=1, \cdots, l)$上 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n\doteq k$，从而 k 在$\langle a_i, b_i\rangle$上 g-可测.

反之，对每个 i $(i=1, 2, \cdots, l)$，存在 $\{\tau_n^{(i)}\}\subset c_0$，在$\langle a_i, b_i\rangle$ 上 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n^{(i)}\doteq k$. 显然，$\tau_n=\sum\limits_{i=1}^{l}\tau_n^{(i)}$ 在$\langle a, b\rangle$上满足

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n\doteq k.$$

即 k 是$\langle a, b\rangle$上 g-可测函数.

(5) 从可积性定义知道这是显然的.

(6) 如果 f 可积，取 $F=|f|$ 即可. 相反的事实已在第二章§3定理5的系2中证明了.

(7)是(6)的特殊情况.

(8) 不妨设$\langle a, b\rangle=(-\infty, \infty)$. 作$\langle a, b\rangle$上一列函数:

$$h_n(x)=\frac{f_n(x)}{1+|f_n(x)|},\ n=1, 2, \cdots$$

由本定理的(1)、(2)知 h_n 是$\langle a, b\rangle$上 g-可测函数，而且对每个 $x\in\langle a, b\rangle$，$|h_n(x)|<1$. 由假设易知

$$\lim_{n\to\infty}h_n(x)\doteq\frac{f(x)}{1+|f(x)|},$$

所以由第二章§3定理5的系2，$h(x)=\dfrac{f(x)}{1+|f(x)|}$ 在任何有限区间$\langle\alpha, \beta\rangle(\subset\langle a, b\rangle)$上是 g-可积函数，从而由本定理的(5)知道，$h(x)$ 是$\langle\alpha, \beta\rangle$上 g-可测函数，由本定理的(1)、(2)知道

$$f(x)=\frac{h(x)}{1-|h(x)|}$$

是$\langle\alpha, \beta\rangle$上$g$-可测函数.

特别取$\langle\alpha, \beta\rangle=(n, n+1]$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，由$f$的可测性，存在$\{\varphi_k^{(n)}\}\subset C_0$，$\varphi_k^{(n)}$的非零定义域包含在$(n, n+1]$中，并且在$(n, n+1]$上

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k^{(n)}\doteq f.$$

由此易知，当取

$$\varphi_k=\varphi_k^{(1)}+\varphi_k^{(2)}+\cdots+\varphi_k^{(k)}, \qquad k=1, 2, \cdots$$

$\{\varphi_k\}\subset C_0$，并且在$(-\infty, \infty)$上

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k\doteq f,$$

即f是$\langle a, b\rangle$上g-可测函数. 证毕.

可测函数还有一些重要的等价定义形式，但那些形式要依赖另一个重要的概念——可测集. 所以下面讨论可测集，而把可测函数的等价定义放在§3中讨论.

2. g-可测集

现在再利用积分来扩充g-长度概念.

首先注意在第一章§1习题中已经指出，集合A和A上的特征函数$\chi_A(x)$是一一对应的，而区间$\langle a, b\rangle$的g-长度$g(\langle a, b\rangle)$正是$\chi_{\langle a,b\rangle}$的(关于$g$)的勒贝格-斯蒂阶积分：

$$\int\chi_{\langle a,b\rangle}dg=g(\langle a, b\rangle). \qquad (1.2)$$

由此引入如下定义.

定义 设E是$(-\infty, \infty)$上点集，如果χ_E是$(-\infty, \infty)$上g-可测函数，就称E为(关于g)勒贝格-斯蒂阶可测集，简称为g-可测集，并称

$$\mu_g(E)=\lim_{n\to\infty}\int_{[-n,n]}\chi_E dg \qquad (1.3)$$

为E(关于g)的勒贝格-斯蒂阶测度，简称为E的g-测度. 特别地，当$g(x)=x$时，g-可测集称为勒贝格可测集，简称为m-可测集，相

应的 E 的 g-测度称为 E 的勒贝格测度，记为 $m(E)$.

g-可测集全体记为 $\boldsymbol{L}_g$，勒贝格可测集全体记为 $\boldsymbol{L}$.

注意，如果 E 是 g-可测集，χ_E 便是 $(-\infty, \infty)$ 上 g-可测函数，从而对任何 n，χ_E 也是 $[-n, n]$ 上 g-可测函数，因而 χ_E 也是 $[-n, n]$ 上 g-可积函数，并且积分随 n 增加而增加，所以(1.3)是有意义的(允许极限为 ∞).

g-可测集具有如下重要的常用性质.

定理 2　(1) 一切有限区间 $\langle a, b\rangle \in \boldsymbol{L}_g$，并且 $\mu_g(\langle a, b\rangle) = g(\langle a, b\rangle)$ (即 μ_g 测度是 g-长度的拓广).

(2) E 是 g-零集的充要条件是 $\mu_g(E)=0$.

(3) $(-\infty, \infty)$, $\phi \in \boldsymbol{L}_g$，并且 $\mu_g(\phi)=0$.

(4) (非负性)对任何 $E \in \boldsymbol{L}_g$，$\mu_g(E) \geqslant 0$.

(5) (有限可加性)如果 $E_1, \cdots, E_n \in \boldsymbol{L}_g$，并且 $\{E_i\}$ 互不相交，那末 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \boldsymbol{L}_g$，并且

$$\mu_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_g(E_i). \tag{1.4}$$

(6) (单调性)如果 $E, F \in \boldsymbol{L}_g$，$E \subset F$，那末

$$\mu_g(E) \leqslant \mu_g(F). \tag{1.5}$$

(7) (可减性)如果 $E, F \in \boldsymbol{L}_g$，$E \subset F$，且 $\mu_g(E) < \infty$，那末

$$\mu_g(F-E) = \mu_g(F) - \mu_g(E). \tag{1.6}$$

(8) (可通性)如果 $E, F \in \boldsymbol{L}_g$，那末 $E \cap F \in \boldsymbol{L}_g$.

(9) (次有限可加性)如果 $E_1, \cdots, E_n \in \boldsymbol{L}_g$，那末 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \boldsymbol{L}_g$，并且

$$\mu_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_g(E_i). \tag{1.7}$$

(10) (可列可加性)如果 $\{E_n\} \subset \boldsymbol{L}_g$，$E_n \cap E_m = \phi\ (n \neq m)$，那末 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{L}_g$，并且

$$\mu_g\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_g(E_i). \tag{1.8}$$

(11) (次可列可加性)如果 $\{E_n\}\subset \boldsymbol{L}_g$, 那末 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\in \boldsymbol{L}_g$, 并且

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu_g(E_i). \tag{1.9}$$

(12) (单调极限)设 $\{E_n\}\subset \boldsymbol{L}_g$,

(i) 如果 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$, 那末 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n\in \boldsymbol{L}_g$, 并且

$$\mu_g(\lim_{n\to\infty} E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_g(E_n). \tag{1.10}$$

(ii) 如果 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$, 那末 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n\in \boldsymbol{L}_g$, 又当存在某个 n_0, 使得 $\mu_g(E_{n_0})<\infty$ 时, 有

$$\mu_g(\lim_{n\to\infty} E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_g(E_n). \tag{1.11}$$

(13) (上、下限)如果$\{E_n\}\subset \boldsymbol{L}_g$, 那末 $\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n$、$\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n\in \boldsymbol{L}_g$, 并且

$$\mu_g(\varliminf_{n\to\infty} E_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mu_g(E_n); \tag{1.12}$$

而当存在某个 n_0, 使得 $\mu_g(\bigcup\limits_{i=n_0}^{\infty} E_i)<\infty$ 时, 有

$$\mu_g(\varlimsup_{n\to\infty} E_n)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\mu_g(E_n). \tag{1.13}$$

(14) (极限)如果$\{E_n\}\subset \boldsymbol{L}_g$, $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ 存在, 并且存在某个n_0, 使得 $\mu_g(\bigcup\limits_{i=n_0}^{\infty} E_i)<\infty$ 时, 有

$$\mu_g(\lim_{n\to\infty} E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_g(E_n). \tag{1.14}$$

(15) 如果 $\{E_n\}\subset \boldsymbol{L}_g$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_g(E_n)<\infty$, 那末

$$\mu_g(\varlimsup_{n\to\infty} E_n)=0. \tag{1.15}$$

(16) (勒贝格测度的平移、反射不变性)设 a 是任何实数. 如果 $E\in \boldsymbol{L}$, 那末

$$E+a=\{x+a\,|\,x\in E\}\in \boldsymbol{L},\ -E=\{-x\,|\,x\in E\}\in \boldsymbol{L},$$

且

$$m(E+a)=m(E),\ m(-E)=m(E). \tag{1.16}$$

在证明定理 2 之前，我们先对定理 2 的内容作几点说明：

第一，定理 2 中的(1)、(2)是说明 μ_g 和 g-长度的关系的．(1)说明 μ_g 是 g-长度的拓广，过去只有区间形式的集才有 g-长度，现在 μ_g 可以定义在远比区间复杂得多的点集上了(这种复杂的集今后我们将会看到)；(2)说明 g-零集和测度 μ_g 是零(又称做 μ_g-零集)是一致的．从而 μ_g-零集的任何子集仍是 μ_g-零集．在测度理论中，具有这种性质的测度称为完全测度．

第二，(16)是勒贝格测度所特有的性质，它是建立经典调和分析的基础．

第三，性质(3)～(15)是 $\boldsymbol{L}_g$ 和 μ_g 的常用的基本性质(当然还可再写出一些性质)，但这许多性质中最核心的性质是以下两点：

(Ⅰ) g-可测集全体 $\boldsymbol{L}_g$ 是对可列个互不相交的集的求和运算与减法运算封闭的集类(即如果 E、$F\in\boldsymbol{L}_g$，$\{E_n\}\subset\boldsymbol{L}_g$，并且 $E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j)$，那末必有 $E-F\in\boldsymbol{L}_g$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\boldsymbol{L}_g$)，并且 $(-\infty,\infty)\in\boldsymbol{L}_g$(换言之，$\boldsymbol{L}_g$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的 σ-代数，参见第一章§1附录)．

(Ⅱ) 定义在集类 $\boldsymbol{L}_g$ 上的集函数 μ_g(因为 μ_g 不是点的函数，而是定义在 $\boldsymbol{L}_g$ 中的每个集上的函数)是非负的、可列可加的(即对 $\boldsymbol{L}_g$ 中任何一列互不相交的集 $\{E_n\}$，总有 $\mu_g(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_g(E_n)$)．

(3)～(15)中其它一切性质都是由上述(Ⅰ)、(Ⅱ)两个性质派生出来的，所以我们在证明定理的(3)～(15)性质时，将采取先证明(Ⅰ)、(Ⅱ)，然后由(Ⅰ)、(Ⅱ)推演出其它．这样的证明过程也便于在一般测度论中推广．

定理 2 的证明

(1) 显然，$\chi_{\langle a,b\rangle}$ 是 g-可测函数，所以 $\langle a,b\rangle\in\boldsymbol{L}_g$．由(1.3)易知 $\mu_g(\langle a,b\rangle)=g(\langle a,b\rangle)$．

(2) **必要性**　因 E 是 g-零集，所以 $\chi_E\doteq 0$，从而 $\chi_E\in\mathfrak{L}_1(g)$，

因此 χ_E 是 g-可测函数，并且

$$\int \chi_E\,dg=\int 0\,dg=0,$$

故而 $\mu_g(E)=0$.

充分性 因为 $\mu_g(E)=0$, $\chi_E\geqslant 0$, 由积分的唯一性定理知 $\chi_E\doteq 0$，即 $E=\{x\,|\,\chi_E(x)\neq 0\}$ 是 g-零集.

下面证明性质(3)～(15)，先证(I)、(II). 首先证明((II)中的)μ_g 的非负性，其实这就是证明(4).

(4) 因为 $\chi_E\geqslant 0$，所以对任何 $E\in \boldsymbol{L}_g$，由积分的单调性可知对任何 n,

$$\int_{[-n,n]}\chi_E\,dg\geqslant 0,$$

从而
$$\mu_g(E)=\lim_{n\to\infty}\int_{[-n,n]}\chi_E dg\geqslant 0.$$

再证((I)中的) $\boldsymbol{L}_g$ 对可列个互不相交的集的和运算封闭以及((II)中的)μ_g 在 $\boldsymbol{L}_g$ 上的可列可加性，其实这就是要证明(10).

(10) 因为$\{E_n\}\subset \boldsymbol{L}_g$，且是互不相交的序列，因而 χ_{E_n} 是 g-可测函数，从而 $\chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}$ 是 g-可测函数单调列 $\left\{\sum\limits_{n=1}^{k}\chi_{E_n}\right\}$的极限函数，所以 $\chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n}$ 是 g-可测函数，从而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in \boldsymbol{L}_g$，即 $\boldsymbol{L}_g$ 对可列个互不相交的集的和运算封闭.

再证 μ_g 是可列可加的：对任何 n,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\int_{[-n,n]}\chi_{E_i}dg&=\int_{[-n,n]}\sum_{i=1}^{k}\chi_{E_i}dg\\&\leqslant\int_{[-n,n]}dg=g([-n,\ n])<\infty,\qquad(1.17)\\&k=1,\ 2,\ \cdots\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}\chi_{E_i}=\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i}$ 在$[-n,\ n]$上成立，根据 Levi 引理，

$$\int_{[-n,n]}\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i}\,dg=\int_{[-n,n]}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\chi_{E_i}dg=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\int_{[-n,n]}\chi_{E_i}dg.\qquad(1.18)$$

由(1.18)立即得到对任何 n,

$$\int_{[-n,n]}\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i}dg\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\int_{[-n,n]}\chi_{E_i}dg\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g(E_i).\qquad(1.19)$$

在(1.19)中再令 $n\to\infty$,立即得到

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\lim_{n\to\infty}\int_{[-n,n]}\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i}\ dg\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g(E_i).\qquad(1.20)$$

反之,对固定的 k,利用积分的非负性,由(1.18)得到

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\geqslant\int_{[-n,n]}\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i}\ dg\geqslant\sum_{i=1}^{k}\int_{[-n,n]}\chi_{E_i}dg.\qquad(1.21)$$

再在(1.21)右边,令 $n\to\infty$,就得到

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\geqslant\sum_{i=1}^{k}\mu_g(E_i).\qquad(1.22)$$

由于(1.22)对任何 k 成立,再令 $k\to\infty$,立即得到

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g(E_i).\qquad(1.23)$$

从(1.23)和(1.20)就得到(1.8),即 μ_g 是可列可加的.

因为 $(n,\ n+1]\in\boldsymbol{L}_g$,由可列和运算封闭性可知 $(-\infty,\ \infty)=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}(n,\ n+1]\in\boldsymbol{L}_g$.

最后再证((I)中所说的)$\boldsymbol{L}_g$ 对减法运算封闭:事实上,当 E, $F\in\boldsymbol{L}_g$ 时,χ_E、χ_F 是 g-可测函数,由于 $\chi_{E-F}=\chi_E-\chi_F\chi_E$ 是 g-可测函数,所以 $E-F\in\boldsymbol{L}_g$.

现在从(I)、(II)出发来证明(3)~(15)中其它未证明的性质.

(3) 任取 $E\in\boldsymbol{L}_g$. 因为 $\boldsymbol{L}_g$ 对减法运算封闭,所以 $\phi=E-E\in\boldsymbol{L}_g$. 再在 $\boldsymbol{L}_g$ 中任取一个测度 μ_g 是有限值的集 E(例如 E 是有限区间),作 $\boldsymbol{L}_g$ 中序列:$E_1=E$, $E_n=\phi(n=2,3,\cdots)$. 显然,$\{E_n\}$ 是 $\boldsymbol{L}_g$ 中一列互不相交的集,从而

$$\mu_g(E)=\mu_g(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\mu_g(E_1)+\cdots+\mu_g(E_n)+\cdots,$$

等式两边可消去有限值 $\mu_g(E)$,并注意到 $\mu_g(E_n)=\mu_g(\phi)$, $n\geqslant2$, 因此得到

$$0=\mu_g(\phi)+\mu_g(\phi)+\cdots+\mu_g(\phi)+\cdots.$$

因为 $\mu_g(\phi)$ 是非负的，所以 $\mu_g(\phi)=0$.

(5) 设 $E_1, \cdots, E_n\in \boldsymbol{L}_g$，补充取 $E_{n+k}=\phi$, $k=1, 2, \cdots$，得到一列互不相交的集$\{E_i\}$ $(i=1, 2, \cdots)$. 由(10)及(3)立即得到

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)=\mu_g(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu_g(E_i).$$

(6) 当 $E\subset F$ 时，$F=E\cup(F-E)$, $E\cap(F-E)=\phi$，由(5)得到

$$\mu_g(F)=\mu_g(E)+\mu_g(F-E), \tag{1.24}$$

因为 $\mu_g(F-E)\geqslant 0$，所以 $\mu_g(F)\geqslant\mu_g(E)$.

(7) 因为 $\mu_g(E)<\infty$，所以在(1.24)式中两边同时消去 $\mu_g(E)$后就得到(1.6).

(8) 因为 $E\cap F=E-(E-F)$，而 $\boldsymbol{L}_g$ 对减法运算封闭，所以 $E\cap F\in\boldsymbol{L}_g$.

(9) 先证明 $n=2$ 的情况：因为

$$E_1\cup E_2=E_1\cup(E_2-E_1), \tag{1.25}$$

而 $E_1\cap(E_2-E_1)=\emptyset$，由(5)可知 $E_1\cup E_2\in\boldsymbol{L}_g$，并且

$$\mu_g(E_1\cup E_2)=\mu_g(E_1)+\mu_g(E_2-E_1)\leqslant\mu_g(E_1)+\mu_g(E_2).$$

对于一般的 n，因为 $\boldsymbol{L}_g$ 中任何两个集的和仍在 $\boldsymbol{L}_g$ 中，而 $\boldsymbol{L}_g$ 对减法运算封闭，因此由归纳法易知 $\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\bigcup_{i=1}^{n}(E_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}E_j)\in\boldsymbol{L}_g$，再利用 μ_g 的有限可加性及单调性立即得到

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu_g(E_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}E_j)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu_g(E_i).$$

(11) 因为 $\boldsymbol{L}_g$ 对有限和、减法以及互不相交的可列和运算封闭，所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}E_j)\in\boldsymbol{L}_g$. 再利用 μ_g 的可列可加性和单调性立即得到

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g(E_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}E_j)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g(E_i).$$

(12) (i) 当 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\boldsymbol{L}_g$.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_g(E_n)=\infty$，那末由单调性 $\mu_g(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i)\geqslant\mu_g(E_n)$，从而

$$\mu_g(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\geqslant\lim_{n\to\infty}\mu_g(E_n)=\infty,$$

即 $\mu_g(\lim\limits_{n\to\infty}E_n)=\mu_g(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i)=\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_g(E_n)$.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_g(E_n)<\infty$，那末由于 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i=E_1\cup(\bigcup\limits_{i=2}^{\infty}(E_i-E_{i-1}))$，从而由 μ_g 的可列可加性和可减性(因为每个 $\mu_g(E_i)<\infty$)得到

$$\begin{aligned}\mu_g(\lim_{n\to\infty}E_n)&=\mu_g(E_1)+\sum_{i=2}^{\infty}\mu_g(E_i-E_{i-1})\\&=\mu_g(E_1)+\sum_{i=2}^{\infty}(\mu_g(E_i)-\mu_g(E_{i-1}))\\&=\lim_{n\to\infty}[\mu_g(E_1)+\sum_{i=2}^{n}(\mu_g(E_i)-\mu_g(E_{i-1}))]\\&=\lim_{n\to\infty}\mu_g(E_n).\end{aligned}$$

(ii) 当 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$ 时，$E_1-E_2\subset E_1-E_3\subset\cdots\subset E_1-E_n\subset\cdots$，而 $E_1-E_i\in\boldsymbol{L}_g(i=1,2,\cdots)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(E_1-E_n)\in\boldsymbol{L}_g$. 从而 $E_1-\lim\limits_{n\to\infty}(E_1-E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\boldsymbol{L}_g$. 又因为从序列 $\{E_i\}$ 中去掉前 n_0 项不影响它的极限，所以不妨在假设 $\mu_g(E_1)<\infty$ 的前提下来证明(1.11).

利用 $E_1\supset\lim\limits_{n\to\infty}(E_1-E_n)$ 和 μ_g 的可减性以及(i)，

$$\begin{aligned}\mu_g(\lim_{n\to\infty}E_n)&=\mu_g(E_1)-\mu_g(E_1-\lim_{n\to\infty}E_n)\\&=\mu_g(E_1)-\mu_g(\lim_{n\to\infty}(E_1-E_n))\\&=\mu_g(E_1)-\lim_{n\to\infty}\mu_g(E_1-E_n)\\&=\mu_g(E_1)-\lim_{n\to\infty}(\mu_g(E_1)-\mu_g(E_n))\\&=\lim_{n\to\infty}\mu_g(E_n).\end{aligned}$$

(13) 当 $\{E_i\}\subset \boldsymbol{L}_g$ 时，由于 $B_k=\bigcap_{i=1}^{k} E_i\in \boldsymbol{L}_g$ 以及 (12) 中的 (ii)，$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i=\lim_{k\to\infty} B_k\in \boldsymbol{L}_g$，即 $\boldsymbol{L}_g$ 对可列个集的通的运算封闭．从而

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\in \boldsymbol{L}_g,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\in \boldsymbol{L}_g.$$

由(12)的(i)和 μ_g 的单调性，

$$\mu_g(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_g(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m)\leqslant \lim_{n\to\infty}\inf_{m\geqslant n}\mu_g(E_m)$$
$$=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_g(E_n).$$

由于假设存在 n_0，使得 $\mu_g(\bigcup_{m=n_0}^{\infty} E_m)<\infty$，所以用 (12)的 (ii) 和 μ_g 的单调性，

$$\mu_g(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu_g(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m)\geqslant \lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqslant n}\mu_g(E_m)$$
$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_g(E_n).$$

(14) 由(13)立即可得．

(15) 因为 $\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n\subset\bigcup_{m=k}^{\infty} E_m,\ k=1,\ 2,\ \cdots$

利用次可列可加性以及假设 $\sum_n \mu_g(E_n)<\infty$，立即得到

$$\mu_g(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n)\leqslant \mu_g(\bigcup_{m=k}^{\infty} E_m)\leqslant \sum_{m=k}^{\infty}\mu_g(E_m)\to 0(k\to\infty).$$

(16) 利用勒贝格零集和勒贝格积分对平移、反射的不变性可得．例如证明平移不变性如下(反射不变性由读者自己证明)．

设 E 是 m–可测集，并且存在 $M>0$，使得 $E\subset[-M,\ M]$．这时，χ_E 是 m–可积函数．对任何实数 a，由于

$$\chi_{E+a}(x)=\chi_E(x-a),$$

根据勒贝格积分的平移不变性，

$$m(E)=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\chi_E(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_E(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_E(x-a)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{E+a}(x)\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\chi_{E+a}(x)\,dx=m(E+a),$$

即任何有界的 m-可测集平移后仍是 m-可测集，而且 m-测度不变.

对一般的 m-可测集 E，令 $E_n=(n,\ n+1]\cap E$ $(n=0,\ \pm1,\ \cdots)$ $E=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}E_n$. 对任何 a，$E+a=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(E_n+a)$，由可列可加性，$E+a\in\boldsymbol{L}$，并且

$$m(E+a)=\sum_{-\infty}^{\infty}m(E_n+a)=\sum_{-\infty}^{\infty}m(E_n)=m(E).$$

同样可证反射不变性. 证毕.

我们再次指出定理中性质(3)～(15)的证明也可直接从可测集、可测函数的定义出发逐步证明，个别的证明可能比这里的简单(例如证明(3)). 但这里的证明方法可以推广到一般测度. 在§6中我们将会看到在任意给定的 σ-环 $\boldsymbol{R}$(对减法和可列和运算封闭的集类，参见第一章§1附录)上给定的非负、空集上取值为零、可列可加的集函数 μ 都必具有(3)～(15)这些性质.

下面利用定理2给出一些常用的 g-可测集.

系 1 直线上开集、闭集是 g-可测集，并且开集 G 的测度等于 G 的构成区间的测度和.

证明 (Ⅰ) 如果开集 $G=(a,\ b)$，当 $(a,\ b)$ 是有限区间时，由定理2的(1)知 $G\in\boldsymbol{L}_g$. 如果 $(a,\ b)$ 是无限区间，显然必存在一列单调增加的有限区间序列 $(a_n,\ b_n)\subset(a,\ b)$，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(a_n,\ b_n)=(a,\ b).$$

由单调极限性质知 $(a,\ b)\in\boldsymbol{L}_g$.

(Ⅱ) 如果 $G=\bigcup_{\nu=1}^{k}(a_\nu,\ b_\nu)$ $(k\leqslant\infty)$，而 $\{(a_\nu,\ b_\nu)\}$ 是 G 的构成区间，从有限可加或可列可加(视 $k<\infty$ 或 $k=\infty$)性可知 $G\in\boldsymbol{L}_g$，并且

$$\mu_g(G)=\sum_{\nu}\mu_g((a_\nu,\ b_\nu)).$$

(III) 如果 F 是闭集，那末 $G=(-\infty,\ \infty)-F$ 是开集. 但由(I)、(II)可知开集$(-\infty,\ \infty)$, $G\in \boldsymbol{L}_g$, 再由定理 2 中可减性立即得到 $F=(-\infty,\ \infty)-G\in \boldsymbol{L}_g$. 证毕.

系 2 E 是 g-零集(或 $\mu_g(E)=0$)的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$,存在开集 $G\supset E$,并且

$$\mu_g(G)<\varepsilon. \tag{1.26}$$

证明 必要性 因为 $\mu_g(E)=0$,所以对任何 $\varepsilon>0$, 存在可列个开区间 $\{I_\nu\}$, 使得 $\bigcup\limits_{\nu} I_\nu\supset E$,并且

$$\sum_{\nu}\mu_g(I_\nu)=\sum_{\nu} g(I_\nu)<\varepsilon.$$

从而开集 $G=\bigcup\limits_{\nu} I_\nu\supset E$,并且由次可列可加性得

$$\mu_g(G)\leqslant\sum_{\nu}\mu_g(I_\nu)<\varepsilon.$$

充分性 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$,存在开集 $G_n\supset E$,使得

$$\mu_g(G_n)<\frac{1}{n},$$

因此 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n\in \boldsymbol{L}_g$ (因为 $\boldsymbol{L}_g$ 对可列通运算封闭, 见定理 2 中 (13)的证明),并且 $G\supset E$. 又显然有

$$\mu_g(G)\leqslant\mu_g\left(\bigcap_{n=1}^{k} G_n\right)\leqslant\mu_g(G_k)<\frac{1}{k},\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

令 $k\to\infty$,就得到 $\mu_g(G)=0$. 由于 E 是 g-零集 G 的子集,所以 E 是 g-零集. 证毕.

G_δ、F_σ 型集 设 $\{G_n\}$是直线上一列开集, 集 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ 称为 G_δ 型集. G_δ 型集全体记为 $\boldsymbol{G}_\delta$. 设$\{F_n\}$是直线上一列闭集, 集 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ 称为 F_σ 型集, F_σ 型集全体记为 $\boldsymbol{F}_\sigma$.

系 3 $\boldsymbol{G}_\delta\subset \boldsymbol{L}_g$, $\boldsymbol{F}_\sigma\subset \boldsymbol{L}_g$.

由定理 2, $\boldsymbol{L}_g$ 对极限运算封闭, 易知系 3 成立.

应该注意：(I) 易知 G_δ、F_σ 分别对可列通、可列和运算封闭，即在 $G_\delta(F_\sigma)$ 中任取可列个集，作通(和)集，仍属 $G_\delta(F_\sigma)$.

(II) 开集、闭集是 G_δ 型集，也是 F_σ 型集．例如开集 G 可以表示成 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ ($G_n=G$, $n=1, 2, \cdots$)，闭集 F 可以表示成 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ ($F_n=F$, $n=1, 2, \cdots$)．利用第一章§4习题8易知 G 是 F_σ 型集，F 是 G_δ 型集．

(III) 直线上有理点全体 A 是可列个单点集(单点集是闭集)的和，所以 $A\in F_\sigma$．A 的余集(无理点全体)是 G_δ 型集，根据第一章§4习题22知道它不是 F_σ 型集，因此 A 就不是 G_δ 型集．

仿 F_σ、G_δ 型集的定义，还可以引入 $F_{\sigma\delta}$：可以表示成可列个 F_σ 型集的通的全体；$G_{\delta\sigma}$：可以表示成可列个 G_δ 型集的和的全体；$F_{\sigma\delta\sigma}$：可以表示成可列个 $F_{\sigma\delta}$ 型集的和的全体；$G_{\delta\sigma\delta}$：可以表示成可列个 $G_{\delta\sigma}$ 型集的通的全体；……

从 L_g 对极限运算的封闭性易知

系 4　$G_{\delta\sigma}$、$F_{\sigma\delta}$、$G_{\delta\sigma\delta}$、$F_{\sigma\delta\sigma}$、$\cdots\subset L_g$.

3．可测集上的可测函数

前面我们讨论的是区间$\langle a, b\rangle$上可测函数．有了可测集概念后我们就可以引入更一般的可测集上可测函数的概念，这对更细致的讨论是有益的．

定义　设 E 是直线上 g-可测集，f 是 E 上有限函数，如果在 $(-\infty, \infty)-E$ 上补充规定函数值是零后所得到的(f 在$(-\infty, \infty)$上延拓)$\hat{f}$ 是$(-\infty, \infty)$上 g-可测函数，那末称 f 是 E 上 g-可测函数．

从定义知道，所谓 g-可测集 E 上的 g-可测函数 f，不过是直线上在 E 外取值是零的 g-可测函数 $\hat{f}$ 在 E 上的限制．反之，对任何一个$(-\infty, \infty)$上 g-可测函数 h，因为 $\chi_E(x)$ 是 g-可测函数(已假定 E 是 g-可测集)，因而 $h\chi_E$ 也是$(-\infty, \infty)$上 g-可测函数，如果把 $h\chi_E$ 视为 E 上函数时，它就是 h．由此可知，E 上 g-可测函数实际上就是一切$(-\infty, \infty)$上 g 可测函数在 E 上的限制．

因此我们很容易得到一切类似于定理1(除可积性将在§2中系统介绍外)的结论.

定理3 设f、h是g–可测集E上的g–可测函数.

(1) $\alpha f+\beta h$ (α、β是常数)、$|f|$、$\max(f, h)$、$\min(f, h)$、f^+、f^-、fh都是E上g–可测函数.

(2) 如果$f\neq 0$,那末$\frac{1}{f}$(当$f(x)=0$时,可规定$\frac{1}{f(x)}$为任意有限值)是E上g–可测函数.

(3) 设$k\doteq f$,那末k是E上g–可测函数. 特别,当E是g–零集时,任何k都是E上g–可测的.

(4) 设k是E上有限函数,如果$E=\bigcup_{i=1}^{l}E_i$ ($E_i\cap E_j=\emptyset$, $i\neq j$),并且每个E_i是g–可测集,那末k是E上g–可测函数的充要条件是k在每个E_i上g–可测.

(5) 设$\{f_n\}$是E上一列g–可测函数,并且在E上关于g几乎处处收敛于k,那末k是E上g–可测函数.

(6) 设k是E上有限函数,如果$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ ($E_i\cap E_j=\emptyset$, $i\neq j$)并且每个E_i是g–可测集,那末k是E上g–可测函数的充要条件是k在每个E_i上是g–可测的.

因为定理3的(6)是定理1中未出现过的,今证明如下:

必要性 因为$\hat{k}$、χ_{E_i}都是$(-\infty, \infty)$上g–可测函数,因而$\hat{k}\chi_{E_i}$是$(-\infty, \infty)$上g–可测函数,$\hat{k}\chi_{E_i}$在E_i上限制就是k在E_i上的限制,所以k是E_i上g–可测函数.

充分性 k作为E_i上函数,在$(-\infty, \infty)$上延拓得$\hat{k}\chi_{E_i}$,由于k是E_i上g–可测函数,所以$\hat{k}\chi_{E_i}$是$(-\infty, \infty)$上g–可测函数.又因为$\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{E_i}$,所以

$$\hat{k}=\hat{k}\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\hat{k}\chi_{E_i}.$$

$\hat{k}$是可列个g–可测函数的和,从而是$(-\infty, \infty)$上g–可测函数.因

此 k 是 E 上 g–可测函数.

4. 可测集观念下的可测函数

前面我们是用简单函数列极限的方式来建立可测函数概念,并再用可测函数的概念导出集的可测性. 现在我们要用可测集的概念来了解可测函数. 为了叙述方便, 今后用 $E(p)$ 表示命题 P 在 E 上成立的那些点的集合.

定理 4 设 E 是 g–可测集, f 是 E 上有限实函数, 那末下面几件事是等价的.

(1) f 是 E 上 g–可测函数;

(2) 对任何实数 c, $E(f>c)$ $(=\{x|f(x)>c,\ x\in E\})$ 是 g–可测集;

(3) 对任何实数 c, $E(f\geqslant c)$ $(=\{x|f(x)\geqslant c,\ x\in E\})$ 是 g–可测集;

(4) 对任何实数 c, $E(f<c)$ $(=\{x|f(x)<c,\ x\in E\})$ 是 g–可测集;

(5) 对任何实数 c, $E(f\leqslant c)$ $(=\{x|f(x)\leqslant c,\ x\in E\})$ 是 g–可测集;

(6) 对任何实数 $c<d$, $E(c<f\leqslant d)$ $(=\{x|c<f(x)\leqslant d, x\in E\})$ 是 g–可测集.

证明 我们证明的路线是(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(1).

(1)⇒(2) 因为 $\hat{f}$ 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上 g–可测函数, 所以存在一列简单函数 $\{\varphi_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n \doteq \hat{f} \tag{1.27}$$

在 $(-\infty,\ \infty)$ 上成立. 从而在 E 上

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n \doteq f. \tag{1.28}$$

因此存在一个 g–零集 $E_1\subset E$, 使得当 $x\in E_2=E-E_1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x). \tag{1.29}$$

显然 $E_2\in \boldsymbol{L}_g$. 我们先证明: 对任何 c,

$$E_2(f>c)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_2\left(\varphi_n>c+\frac{1}{k}\right). \tag{1.30}$$

事实上，令 $H_k=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_2\left(\varphi_n>c+\frac{1}{k}\right)$，显然 $H_k=\varliminf_{n\to\infty}E_2\left(\varphi_n>c+\frac{1}{k}\right)$（即 H_k 是由 E_2 中满足从某个指标 $n(x_0)$ 以后 $\varphi_n(x_0)>c+\frac{1}{k}(n\geqslant n(x_0))$ 的点 x_0 的全体所组成的集），从(1.29)可知，对任何 $x_0\in H_k$，$f(x_0)\geqslant c+\frac{1}{k}$，所以 $H_k\subset E_2(f>c)$，从而集

$$Q=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_2\left(\varphi_n>c+\frac{1}{k}\right)\subset E_2(f>c).$$

反之，对任何 $y_0\in E_2(f>c)$，总存在 k，$f(y_0)>c+\frac{1}{k}$，又因为 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y_0)=f(y_0)$，所以必存在 $n(y_0)$，当 $n\geqslant n(y_0)$ 时，

$$\varphi_n(y_0)>c+\frac{1}{k}, \tag{1.31}$$

即 $y_0\in H_k$，也就是说 $y_0\in Q$，从而 $E_2(f>c)\subset Q$. 因此(1.30)成立.

$E_2\left(\varphi_n>c+\frac{1}{k}\right)=E_2\cap\left\{x\,|\,\varphi_n>c+\frac{1}{k}\right\}$. 由于 φ_n 是简单函数，易知 $\left\{x\,|\,\varphi_n>c+\frac{1}{k}\right\}$ 是 g-可测集，从而 $E_2\left(\varphi_n>c+\frac{1}{k}\right)$ 是 g-可测集. 但 L_g 对可列和、可列通运算封闭，所以 Q 是 g-可测集，即对任何 c，$E_2(f>c)$ 是 g-可测集.

但 $E(f>c)=E_2(f>c)\cup E_1(f>c)$，$E_1$ 是 g-零集，因而它的一切子集（特别，子集 $E_1(f>c)$）也是 g-可测集. 因此，$E(f>c)$ 是 g-可测集.

(2)⇒(3) 因为

$$E(f\geqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>c-\frac{1}{n}\right),$$

所以 $E(f\geqslant c)$ 是 g-可测集.

(3)⇒(4) 因为

$$E(f<c)=E-E(f\geqslant c),$$

所以 $E(f<c)$ 是 g-可测集.

(4)⇒(5)　因为

$$E(f\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f<c+\frac{1}{n}\right),$$

所以 $E(f\leqslant c)$ 是 g-可测集.

(5)⇒(6)　因为

$$E(c<f\leqslant d)=E(f\leqslant d)-E(f\leqslant c),$$

所以 $E(c<f\leqslant d)$ 是 g-可测集.

(6)⇒(1)　对任何 $n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$, 集

$$E_i^{(n)}=E\left(\frac{i-1}{n}<f\leqslant\frac{i}{n}\right),$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots;\ i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm n^2,$$

都是 g-可测集. 从而函数

$$\psi_n(x)=\sum_{i=-n^2}^{n^2}\frac{i-1}{n}\chi_{E_i^{(n)}}(x),\ n=1,\ 2,\ \cdots \tag{1.32}$$

是 $(-\infty,\ \infty)$ 上 g-可测函数. 因为 $E_i^{(n)}\subset E$, 所以所有的 $\psi_n(x)$ 在 E^c 上为 0. 另一方面, 对任何 $x_0\in E$, 总存在 n_0, 使得 $-n_0<f(x_0)<n_0$. 从而当 $n>n_0$ 时, 易知

$$|\psi_n(x_0)-f(x_0)|<\frac{1}{n}, \tag{1.33}$$

这就是说在 E 上

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=f(x). \tag{1.34}$$

但在 E^c 上, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=0$, 即在 $(-\infty,\ \infty)$ 上 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n=\hat{f}$. 根据定理 1 的 (8), $\hat{f}$ 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上 g-可测函数, 因而 $\hat{f}$ 在 E 上的限制 f 是 E 上 g-可测函数. 证毕.

由定理 4 立即得到如下的一个系.

系　设 f 是 g-可测集 E 上有限实函数, 那末 f 是 g-可测的充要条件是存在 g-可测集特征函数的线性组合的序列 $\{\psi_n\}$, 在 E 上处处收敛于 f. 而当 f 是有界的 g-可测函数时, 可以做到 $\{\psi_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f.

证明 必要性 因为当 f 在 E 上 g-可测时，它等价于定理 4 中 (5) 成立. 从定理 4 的 (6)⇒(1) 的证明中知道，由 (1.32) 式决定的 $\{\psi_n\}$ 在 E 上处处收敛于 f (即 (1.34)).

当 f 有界时，显然，只要取 n_0，满足 $n_0 \geqslant M$，$M=\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$，易知当 $n\geqslant n_0$ 时，对一切 $x_0\in E$，(1.33) 成立，即 $\{\psi_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f.

充分性 如果存在

$$\varphi_n(x)=\sum_{j=1}^{l_n}\alpha_j^{(n)}\chi_{E_j^{(n)}}(x),\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

在 E 上处处收敛于 f，那末 $\Psi_n(x)=\psi_n(x)\chi_E(x)$ 仍是 g-可测集特征函数线性组合序列，并且在 E 上

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\Psi_n(x).$$

显然，Ψ_n 在 E^c 上取值为零，因此在 $(-\infty,\ \infty)$ 上 $\lim\limits_{n\to\infty}\Psi_n(x)=\hat{f}(x)$，从而 f ($\hat{f}$ 在 E 上限制) 是 E 上 g-可测函数. 证毕.

5. 高维空间上可测集与可测函数

对于多元情况，完全平行于前面第 1～4 小节的方法进行讨论. 如以二元为例，即引入关于 $\psi(x,\ y)$ 的勒贝格-斯蒂阶可测函数，ψ-可测集及测度，并且能得到定理 1～3 的所有结果. 只不过"区间$\langle a,\ b\rangle$"换为"矩形"，"一元函数"换为"二元函数"，"g-可测集"换为"ψ-可测集". 所要注意的是，对于乘积测度的情况 (即 $\psi=g_1\times g_2$)，有如下结果.

定理 5 (1) 如果 E 是 $g_1\times g_2$-可测集，那末对 (关于 g_1) 几乎所有的 x，截口 E_x 是 g_2-可测集，对 (关于 g_2) 几乎所有的 y，截口 E^y 是 g_1-可测集.

(2) 如果 $f(x,\ y)$ 是 $g_1\times g_2$-可测集 E 上 $g_1\times g_2$-可测函数，那末对 (关于 g_1) 几乎所有的 x，截口 $f_x(y)$ 是 g_2-可测集 E_x 上的 g_2-可测函数；对 (关于 g_2) 几乎所有的 y，截口 $f^y(x)$ 是 g_1-可测集 E^y 上 g_1-可测函数.

证明 (1) E 是 $g_1\times g_2$-可测集，所以 $\chi_E(x,\ y)$ 是全平面上的

$g_1\times g_2$-可测函数，根据第二章§4定理7，存在 g_1-零集 E_1，当 $x_0\in(-\infty,\infty)-E_1$ 时，$\chi_E(x_0, y)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上 g_2-可测函数，但是

$$\chi_{E_{x_0}}(y)=\chi_E(x_0, y), \tag{1.35}$$

所以，当 $x_0\in(-\infty, \infty)-E_1$ 时，E_{x_0} 是 g_2-可测集.

同样可证，对(关于 g_2)几乎所有 y，E^y 是 g_1-可测集.

(2) 因为 $f(x, y)$ 是 E 上 $g_1\times g_2$-可测函数等价于 $\hat{f}(x, y)$（当 $(x, y)\in E$ 时，$\hat{f}(x, y)=f(x, y)$；当 $(x, y)\overline{\in} E$ 时，$\hat{f}(x, y)=0$）是全平面上 $g_1\times g_2$-可测函数. 根据第二章§4定理7，存在 g_1-零集 E_2，当 $x_0\in(-\infty, \infty)-E_2$ 时，$\hat{f}(x_0, y)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上 g_2-可测函数. 根据本定理的(1)，又存在 g_1-零集 E_1，当 $x_0\in(-\infty, \infty)-E_1$ 时，E_{x_0} 是 g_2-可测集，因此，当 $x_0\in(-\infty, \infty)-(E_1\cup E_2)$ 时，$\hat{f}(x_0, y)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上 g_2-可测函数，但 $\hat{f}(x_0, y)$ 限制在 E_{x_0} 上就是 $f(x_0, y)$，所以 $f_{x_0}(y)=f(x_0, y)$ 是 E_{x_0} 上 g_2-可测函数.

同样可证，对(关于 g_2)几乎所有的 y，$f^y(x)$ 是 E^y 上 g_1-可测函数.

习　题

1. 设 $\{f_n\}$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上一列实的 g-可测函数，如果(关于 g)几乎所有的 x，下面的函数

$$M(x)=\sup_n f_n(x),\quad m(x)=\inf_n f_n(x),$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x),\ \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

是有限值，那末这些函数必和 $\langle a, b\rangle$ 上的某个 g-可测函数(关于 g)几乎处处相等.

2. 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可测函数，证明 f^2 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可测函数.

3. 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可测函数，h 是 $(-\infty, \infty)$ 上连续函数，证明 $h(f)$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可测函数.

4. 设 f 的实部 f_1、虚部 f_2 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可积函数，证明 $|f|$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可积函数.

5. 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可积函数，h 是 $\langle a, b\rangle$ 上有界可测函数. 证明 fh 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可积函数.

6. 设 f、h 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可测函数，而且 $|f|^2$、$|h|^2$ 是 g-可积函数. 证

明 fh 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可积函数.

7. 证明 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可测函数的充要条件是存在 $\langle a, b\rangle$ 上连续函数列 $\{f_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

在 $\langle a, b\rangle$ 上(关于 g)几乎处处成立. 当 $\langle a, b\rangle$ 是无限区间时, 还可以做到对每个 n, $E_n=\{x|f_n(x)\neq 0\}$ 是有界集.

8. 当 $\langle a, b\rangle$ 是有限区间时, 证明 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上 g-可测函数的充要条件是存在 $\langle a, b\rangle$ 上多项式序列 $\{P_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x)$$

在 $\langle a, b\rangle$ 上(关于 g)几乎处处成立.

9. 当 $\langle a, b\rangle$ 是无限区间, 但 $g(\langle a, b\rangle)<\infty$ 时, 习题 8 仍正确.

10. 证明 f 是 $[a, b]$ 上 g-可测函数的充要条件是下面两个条件中任何一个成立:

(1) 存在一列在有限个以有理数为端点的区间 $\langle a_\nu, b_\nu\rangle(\nu=1, 2, \cdots, n)$ 上取值是有理数的简单函数, 在 $[a, b]$ 上(关于 g)几乎处处收敛于 f.

(2) 存在 $[a, b]$ 上一列有理系数多项式 $\{P_n\}$, 在 $[a, b]$ 上(关于 g)几乎处处收敛于 f.

11. 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格可测函数. 证明: 对任何实数 α, $f(x+\alpha)$ 是 $\langle a-\alpha, b-\alpha\rangle$ 上勒贝格可测函数; $f(-x)$ 是 $\langle -b, -a\rangle$ 上勒贝格可测函数.

12. 设 f 是 $\langle a, b\rangle$ 上勒贝格可测函数. 证明对任何 $\alpha>0$ (或 $\alpha<0$), $f\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$ 是 $\langle \alpha a, \alpha b\rangle$ (或 $\langle \alpha b, \alpha a\rangle$) 上勒贝格可测函数.

13. 设 A 是勒贝格零集. 证明 $A^2=\{x^2|\ x\in A\}$ 也是勒贝格零集.

14. 设 f 是 $[0, a]$ 上勒贝格可测函数. 证明 $f(x^2)$ 是 $[0, \sqrt{a}]$ 上勒贝格可测函数.

15. 举出一列 g-可测集 $\{E_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_g(E_n)$ 存在并且有限, 但

$$\mu_g(\varliminf_{n\to\infty} E_n)\neq\mu_g(\varlimsup_{n\to\infty} E_n).$$

16. 习题 1～9 中, $\langle a, b\rangle$ 换成一般的 g-可测集 E 后, 哪些结论仍成立? 为什么?

17. 设 $\{f_n\}$ 在 E 上(关于 g)几乎处处收敛于 f, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n\doteq f, \quad \varliminf_{n\to\infty} f_n\doteq f.$$

18. 证明 F_σ、G_δ 分别对可列和、可列通运算封闭.

19. 证明 F_σ 型集的余集必是 G_δ 型集, G_δ 型集的余集必是 F_σ 型集.

§2 可测集上积分和积分的等价定义

在本节中，我们将以直线上情况为例(高维类似)，把以前区间上积分的概念推广成更一般的可测集上的积分，并介绍勒贝格-斯蒂阶积分的另一种常用的等价定义方式.

1. 可测集上积分 设 g 是直线上给定的单调增加右连续函数，由它产生一个勒贝格-斯蒂阶测度 μ_g. 设 E 是 g-可测集，f 是 E 上可测函数，令

$$\hat{f}(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } x\in E \text{ 时},\\ 0\quad, & \text{当 } x\overline{\in} E \text{ 时}.\end{cases}$$

如果 $\hat{f}$ 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上 g-可积函数，那末称 f 在 E 上 g-可积(或 E 上 μ_g-可积)，并规定 f 在 E 上的积分

$$\int_E f\,d\mu_g=\int\hat{f}dg.$$

从定义立即得到

$$\int_E d\mu_g=\int\chi_E dg=\lim_{n\to\infty}\int_{[-n,n]}\chi_E dg=\mu_g(E)^{[注]},\tag{2.1}$$

此外，在定义中特别取 $E=\langle a,\ b\rangle$ 时，就有

$$\int_{\langle a,b\rangle} fd\,\mu_g=\int\hat{f}dg=\int_{\langle a,b\rangle} fdg.\tag{2.2}$$

因此，以前区间上积分和这里的积分是一致的，这样就可将前面区间积分符号里的 dg 换成 $d\mu_g$，或者说可以不区分 dg 与 $d\mu_g$.

又从定义可知，f 在 E 上积分，实质上就是 $\hat{f}$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 上积分. 由 f 和 $\hat{f}$ 的关系，不难得到 E 上积分的如下性质(鉴于可测集上的积分是我们要建立的新积分的最一般形式，这里将系统地列出积分的性质).

定理 1 设 f、h 是 E 上 g-可积函数.

(1) (单调性) 当 $f\geqslant h$ 时，

[注] 这里不管 $\mu_g(E)$ 是有限或无限值都是对的，当 $\mu_g(E)=\infty$ 时，要用到允许取无限值的积分概念. 可见第二章 §3 附录中第七小节.

$$\int_E f d\mu_g \geqslant \int_E h d\mu_g.$$

(2)（线性） α、β为任意数，

$$\int_E (\alpha f+\beta h) d\mu_g = \alpha \int_E f d\mu g + \beta \int_E h d\mu_g.$$

(3) 如果 $k \doteq f$，那末 k 在 E 上 g–可积，并且

$$\int_E k d\mu_g = \int_E f d\mu_g.$$

(4)（绝对可积性） $|f|$ 必在 E 上 g–可积，并且

$$\left|\int_E f d\mu_g\right| \leqslant \int_E |f| d\mu_g.$$

(5) 如果 $f \geqslant 0$，并且

$$\int_E f d\mu_g = 0$$

那末 $f \doteq 0$.

(6) 设 k 是 E 上 g–可测函数，如果 $|k| \leqslant f$，那末 k 是 E 上 g–可积函数.

(7)（可列可加性） 如果 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，$E_i$ $(i=1, 2, \cdots)$ 都是 g–可测集，并且 $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$，那末有限函数 k 在 E 上 g–可积的充要条件是：

（i） k 在每个 E_i 上 g–可积；

（ii） $\sum_i \int_{E_i} |k| d\mu_g < \infty$.

并且当 k 在 E 上 g–可积时，

$$\int_E k d\mu_g = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} k d\mu_g. \tag{2.3}$$

特别，当 $E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i$，$E_i \cap E_j = \phi$ $(i \neq j)$ 时（即 $m>n$ 时 $E_m = \phi$），积分有有限可加性：

$$\int_E k d\mu_g = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} k d\mu_g.$$

(8) Levi 引理、Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理成立（只

要将第二章§3中定理3～5中区间$\langle a, b\rangle$换为E即可).

(9)（有界控制可积性）　设k是E上g-可测函数，并且有界，如果$\mu_g(E)<\infty$，那末k在E上必是g-可积的.

(10)（积分逼近）　对任何$\varepsilon>0$，必存在简单函数φ、$(-\infty, \infty)$上连续函数ψ（还可以做到ψ的支集有界），使得

$$\int_E |f-\varphi|\,d\mu_g<\varepsilon,$$

$$\int_E |f-\psi|\,d\mu_g<\varepsilon.$$

而当E是有界集时，存在多项式p，使得

$$\int_E |f-p|\,d\mu_g<\varepsilon.$$

(11)（全连续性）　对任何$\varepsilon>0$，必存在$\delta>0$，当可测集$E_1\subset E$，并且$\mu_g(E_1)<\delta$时，

$$\int_{E_1} |f|\,d\mu_g<\varepsilon.$$

(12)（勒贝格积分的平移、反射不变性）

$$\int_E f(x)\,dx=\int_{-E} f(-x)\,dx,$$

$$\int_E f(x)\,dx=\int_{E+a} f(x-a)\,dx,$$

其中a是任何实数.

这些性质的基本证法是直接把f化为$\hat{f}$，利用$\hat{f}$在$(-\infty, \infty)$上积分的性质推出来. 下面我们只证(7)和(11).

证明　(7)如果k在E上g-可积，那末$\hat{k}$在$(-\infty, \infty)$上g-可积，从而$|\hat{k}|$在$(-\infty, \infty)$上g-可积. 对每个i，显然$\hat{k}\chi_{E_i}$是$(-\infty, \infty)$上g-可测函数，并且$|\hat{k}\chi_{E_i}|\leqslant|\hat{k}|$，所以$\hat{k}\chi_{E_i}$在$(-\infty, \infty)$上$g$-可积. 但$\hat{k}\chi_{E_i}$限制在$E_i$上就是$k$，所以$k$在$E_i$上$g$-可积，即(i)成立.

又由于

$$\left|\hat{k}\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{l} E_i}\right|=\left|\sum_{i=1}^{l}\hat{k}\chi_{E_i}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{l}|\hat{k}\chi_{E_i}|\leqslant|\hat{k}|,$$

但 $\hat{k}$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上 g-可积函数，所以 $\sum_{i=1}^{l}|\hat{k}\chi_{E_i}|$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上 g-可积函数，积分不超过 $\int|\hat{k}|d\mu_g$，并且 $\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}|\hat{k}\chi_{E_i}|=|\hat{k}|$。由 $(-\infty, \infty)$ 上 Levi 引理知

$$\infty>\int|\hat{k}|d\mu_g=\int\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}|\hat{k}\chi_{E_i}|d\mu_g$$

$$=\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\int|\hat{k}\chi_{E_i}|d\mu_g=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|k|d\mu_g,$$

即(ii)成立。

而当 k 在 E 上 g-可积时，$|\hat{k}|$ 便是序列 $\left\{\sum_{i=1}^{l}\hat{k}\chi_{E_i}\right\}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的控制 g-可积函数。又由于 $\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\hat{k}\chi_{E_i}=\hat{k}$，根据 $(-\infty, \infty)$ 上积分的控制收敛定理，有

$$\int_E kd\mu_g=\int\hat{k}\,d\mu_g=\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\int\hat{k}\chi_{E_i}d\mu_g$$

$$=\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\int_{E_i}k\,d\mu_g=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}kd\mu_g,$$

这就是说(2.3)成立。

反之，由 k 在 E_i 上 g-可积性，$\hat{k}\chi_{E_i}$ 便是 $(-\infty, \infty)$ 上 g-可测函数。显然

$$\hat{k}=\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\hat{k}\chi_{E_i}, \tag{2.4}$$

因此，$\hat{k}$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上 g-可测函数。由条件(ii)，可积函数单调列 $\left\{\sum_{i=1}^{l}|\hat{k}|\chi_{E_i}\right\}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的 g-积分所得到的积分数列是有界的，根据 $(-\infty, \infty)$ 上的 Levi 引理，函数

$$|\hat{k}|=\lim_{l\to\infty}\sum_{1}^{l}|\hat{k}|\chi_{E_i}$$

是 $(-\infty, \infty)$ 上 g-可积函数，从而 k 在 E 上 g-可积。

证明 (11) 对任何 $\varepsilon>0$，由(10)知道存在简单函数 φ，使得

$$\int_E|f-\varphi|\,d\mu_g<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记 $\max\limits_x |\varphi(x)|=M$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$. 设 $E_1\subset E$, 并且 $\mu_g(E_1)<\delta$. 由于 $|f|\leqslant|f-\varphi|+|\varphi|$, 利用本定理的(4)就得到

$$\begin{aligned}\int_{E_1}|f|d\mu_g&\leqslant\int_{E_1}|f-\varphi|\,d\mu_g+\int_{E_1}|\varphi|d\mu_g\\&\leqslant\int_E|f-\varphi|\,d\mu_g+M\int_{E_1}d\mu_g\\&<\frac{\varepsilon}{2}+M\mu_g(E_1)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

证毕.

利用积分的可列可加性，我们可以给出 E 上 g-可测函数为 g-可积的另一个判断方法.

系　设 f 是 g-可测集 E 上 g-可测函数，并且 $\mu_g(E)<\infty$, 那末 f 是 E 上 g-可积函数的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{\infty}i\mu_g(E(i-1<|f|\leqslant i))<\infty.$$

$$(\text{或}\quad\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\mu_g(E(i-1<|f|\leqslant i))<\infty.\ )\tag{2.5}$$

证明　因为 $|f|$ 是 E 上 g-可测函数，所以 $E_i=E(i-1<|f|\leqslant i)$ 是 g-可测集. 而 f 在 E 上 g-可积的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f|d\mu_g<\infty.\tag{2.6}$$

但在 E_i 上成立 $i-1<|f|\leqslant i$, 所以

$$(i-1)\mu_g(E_i)\leqslant\int_{E_i}|f|d\mu_g\leqslant i\mu_g(E_i).\tag{2.7}$$

由于 $\mu_g(E)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu_g(E_i)<\infty$, 因此

$$\sum_{i=1}^{\infty}i\mu_g(E_i)-\mu_g(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f|d\mu_g\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}i\mu_g(E_i).$$

$$\begin{aligned}(\text{或}\quad\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\mu_g(E_i)&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f|d\mu_g\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\mu_g(E_i)+\mu_g(E).\ )\end{aligned}$$

这就是说条件(2.6)与(2.5)等价. 证毕.

附 录

2. 积分的等价定义

如果对积分的可列可加性（定理1的(7)）以及定理1的系作一仔细分析，不难给出积分的另一种等价定义．为此，先给出如下定理．

定理2 设 E 是实的 g-可测集，$\mu_g(E)<\infty$，D 为直线上的分点组(由可列个点构成) $\{y_n\}$：

$$\cdots<y_{-n}<\cdots<y_{-1}<y_0=0<y_1<\cdots<y_n<\cdots \tag{2.8}$$

当 $n\to\infty$ 时，$y_{\pm n}\to\pm\infty$，而 $d(D)=\sup\limits_n(y_n-y_{n-1})<\infty$．对分点组 D，作

$$S(f,D)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n\mu_g(E(y_{n-1}<f\leqslant y_n)), \tag{2.9}$$

其中 $\xi_n\in[y_{n-1},y_n]$，那末 f 在 E 上 g-可积的充要条件是级数(2.9)绝对收敛．如果 $\{D_k\}$ $(D_k=\{y_n^{(k)}\})$ 是一列分点组，并且 $d(D_k)\to0$ $(k\to\infty)$，那末，当 f 在 E 上 g-可积时，必有

$$\lim_{k\to\infty}S(f,D_k)=\int_E fd\mu_g. \tag{2.10}$$

证明 令 $E_n=E(y_{n-1}<f\leqslant y_n)$．显然，$f$ 是 g-可积的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{E_n}|f|d\mu_g<\infty. \tag{2.11}$$

由于

$$\begin{cases}y_{n-1}\mu_g(E_n)\leqslant\displaystyle\int_{E_n}|f|d\mu_g\leqslant y_n\mu_g(E_n),\ n>0,\\ |y_n|\mu_g(E_n)\leqslant\displaystyle\int_{E_n}|f|d\mu_g\leqslant|y_{n-1}|\mu_g(E_n),\ n\leqslant0,\end{cases} \tag{2.12}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}y_{n-1}\mu_g(E_n)+\sum_{n=-\infty}^{0}|y_n|\mu_g(E_n)&\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{E_n}|f|d\mu_g\\ &\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}y_n\mu_g(E_n)+\sum_{n=-\infty}^{0}|y_{n-1}|\mu_g(E_n).\end{aligned} \tag{2.13}$$

记 $M=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n\mu_g(E_n)+\sum\limits_{n=-\infty}^{0}|y_{n-1}|\mu_g(E_n)$，$m=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_{n-1}\mu_g(E_n)+\sum\limits_{n=-\infty}^{0}|y_n|\times\mu_g(E_n)$．显然 $M\geqslant m$，并且 $M\leqslant m+d(D)\mu_g(E)$，所以从(2.13)可知，$f$ 是 g-可积的充要条件是 M 为有限数或 m 为有限数．然而

$$m\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n|\mu_g(E(y_{n-1}<f\leqslant y_n))\leqslant M,$$

所以，f 是 g-可积的充要条件是级数(2.9)绝对收敛．

现在，对一列分点组 $\{D_k\}$，作出相应的 $S(f,D_k)$、$\xi_n^{(k)}$、$E_n^{(k)}$、$M^{(k)}$、$m^{(k)}$．由于假定 f 是 g-可积的，所以由积分的可列可加性，对每个 k，

$$\int_E f d\mu_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{E_n^{(k)}} f d\mu_g.$$

从而
$$\left|\int_E f d\mu_g - S(f, D_k)\right| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\int_{E_n^{(k)}} f d\mu_g - \xi_n^{(k)} \mu_g(E_n^{(k)})\right|$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\int_{E_n^{(k)}} (f - \xi_n^{(k)}) d\mu_g\right| \leqslant d(D_k) \mu_g(E),$$

因为 $d(D_k) \to 0 (k \to \infty)$，所以(2.10)成立．证毕．

特别，当 f 是有界 g-可测函数时，可以取到常数 u, v，使得

$$u \leqslant f(x) \leqslant v.$$

显然，定理1中分点组 D_k 分别可以只取有限个点：

$$D_k: \quad u = y_0^{(k)} < y_1^{(k)} < \cdots < y_{i_k}^{(k)} = v, \tag{2.14}$$

这时，相应的和式 $S(f, D_k)$ 绝对收敛，从而必有

$$\lim_{k \to \infty} S(f, D_k) = \int_E f d\mu_g, \tag{2.15}$$

这里和式 $S(f, D_k)$ 很象黎曼和，不同之点是分点组取在 y 轴上，而不是取在 x 轴上，黎曼和中区间长度 Δx 换成了这里的 $\mu_g(E(y_{n-1}^{(k)} < f \leqslant y_n^{(k)}))$．勒贝格-斯蒂阶积分的另一种定义方式就是按这样进行的．不过要按这种方式引入积分，得先有直线上具有可列可加性的勒贝格-斯蒂阶测度 μ_g，然后对有界可测函数 f，作分点组列(2.14)和相应的 $S(f, D_k)$，再后假如 $S(f, D_k)$ 有极限(当 $k \to \infty$ 时)，规定极限为积分，从而得到测度有限的集 E 上有界可测函数的积分，以后再推广到无界函数和 E 是无限测度情况的积分．这样建立的积分和我们这里建立的积分是等价的．对这样建立积分的具体过程有兴趣的读者可以参看本章§6的一般测度和积分，那里没有证明，但有建立的过程，即依次一个一个的定理，读者也可自己加以逐一证明．当然也可直接参看[1]，[2]，[8]等．

3. 带符号的勒贝格-斯蒂阶测度的积分　现在考虑 g 是右连续而在任何有限区间上是有界变差函数的情况．在第二章§3第9小节已指出：这时存在 $(-\infty, \infty)$ 上两个单调增加右连续函数 $p(x)$、$n(x)$，使得(取 a 为 g 的某个连续点)

$$g(x) - g(a) = p(x) - n(x), \tag{2.16}$$

$$p(x) + n(x) = \bigvee_a^x (g) \tag{2.17}$$

(当 $x < a$ 时，规定 $\bigvee_a^x (f) = -\bigvee_x^a (f)$)，其中 $p(a) = n(a) = 0$，即 $p(x)$、$n(x)$ 是 g 的 Jordan 分解．

对于这种 g，也可平行于第二章以及本章前二节内容建立 g-积分、g-可测函数、g-可测集等理论．例如规定 $\langle a, b\rangle$ 的 g-长度

$$g(\langle a,b\rangle)=p(\langle a,b\rangle)-n(\langle a,b\rangle), \tag{2.18}$$

这样 $g(\langle a,b\rangle)$ 可能是负值. C_0 类函数 φ 的 g-积分规定为

$$\int\varphi dg=\int\varphi\,dp-\int\varphi\,dn. \tag{2.19}$$

应特别注意，对于这种 g，所谓 E 是 g-零集，实际上是规定 E 为 $\overset{*}{\underset{*}{\mathrm{V}}}(g)$-零集. 容易证明，它等价于 E 既是 p-零集，又是 n-零集. 因而关于这种 g 的所谓"几乎处处成立"，其实都是指关于 $\overset{*}{\underset{*}{\mathrm{V}}}(g)$ 几乎处处成立，等价地是同时关于 p、n 几乎处处成立.

对于这种 g, $f\in C_1(g)$，是指存在单调序列 $\{\varphi_n\}\subset C_0$，使得

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\underset{\overset{*}{\underset{*}{\mathrm{V}}}(g)}{\doteq}f(x),\\ \sup_n\int\varphi_n d\overset{*}{\underset{*}{\mathrm{V}}}(g)<\infty\end{gathered} \tag{2.20}$$

(后一式又等价于 $\sup\limits_n\int\varphi_n dp<\infty$ 和 $\sup\limits_n\int\varphi_n\,dn<\infty$)，即 $C_1(g)=C_1\overset{*}{\underset{*}{\mathrm{V}}}(g)$，并规定

$$\int fdg=\int fdp-\int fdn. \tag{2.21}$$

同样，可引入关于 g 的可积函数(就是关于 $\overset{*}{\underset{*}{\mathrm{V}}}(g)$ 的可积函数) f，它的积分仍用(2.21)的形式来规定.

对于这种 g，也可引入 g-可测函数：如果存在 $\{\psi_n\}\subset C_0$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n\underset{\overset{*}{\underset{*}{\mathrm{V}}}(g)}{\doteq}f,$$

就称 f 是 g-可测函数. 它等价于 f 既是 p-可测函数，又是 n-可测函数. 同样可以引入 g-可测集，它等价于既是 p-可测集，又是 n-可测集. 规定一个 g-可测集 E 的 g-测度

$$\mu_g(E)=\mu_p(E)-\mu_n(E), \tag{2.22}$$

称这种测度 μ_g 为带符号的勒贝格-斯蒂阶测度. 还可引入 g-可测集 E 上 g-可测函数的积分.

必须指出，由于 $\mu_g(E)$ 可能是负值，因而，关于这种 g 的积分，失去了过去积分(包括测度)的单调性. 除此以外，积分(包括测度)的性质都仍然保持着. 今将积分的基本性质列举如下.

定理 8 设 E 是 g-可测集.

(1) (线性) 设 f、h 是 E 上 g-可积函数，那末对任何常数 α、β, $\alpha f+$

βh 在 E 上 g-可积，并且

$$\int_E (\alpha f+\beta h)d\mu_g=\alpha\int_E f d\mu_g+\beta\int_E h\,d\mu_g.$$

如果 f 在 E 上既是 g_1-可积，又是 g_2-可积，那末对任何常数 α、β，f 在 E 上关于 $\alpha g_1+\beta g_2$ 可积，并且

$$\int_E f\,d\mu_{\alpha g_1+\beta g_2}=\alpha\int_E f\,d\mu_{g_1}+\beta\int_E f\,d\mu_{g_2}.$$

(2) 如果 $k\doteq f$，那末 k 在 E 上 g-可积的充要条件是 f 在 E 上 g-可积，并且，当可积时，

$$\int_E k\,d\mu_g=\int_E f\,d\mu_g.$$

(3)（绝对可积性） 如果 f 在 E 上 g-可积，那末 $|f|$ 必在 E 上关于 $\overset{*}{\underset{*}{V}}(g)$ 可积，并且，当 f 可积时，

$$\left|\int_E f d\mu_g\right|\leqslant\int_E |f|\,|d\mu_g|,$$

这里 $|d\mu_g|$ 表示 $d\overset{*}{\underset{a}{V}}(g)$.

(4) 设 f 在 E 上 g-可测，并且存在 E 上 g-可积函数 F，使得

$$f(x)\leqslant F(x),$$

那末 f 在 E 上 g-可积.

(5)（可列可加性） 如果 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，$E_i$ 是 g-可测，并且 $E_i\cap E_j=\phi(i\neq j)$，那末 f 在 E 上 g-可积的充要条件是

(i) f 在每个 E_i 上 g-可积；

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f|\,|d\mu_g|<\infty$.

并且，当 f 是 g-可积时，

$$\int_E f\,d\mu_g=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f\,d\mu_g.$$

(6) Levi 引理、Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理成立.

(7)（全连续性） 如果 f 在 E 上 g-可积，那末，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当 $E_1\subset E$，$\mu_{\overset{*}{\underset{*}{V}}(g)}(E_1)<\delta$ 时，

$$\left|\int_{E_1} f\,d\mu_g\right|<\varepsilon.$$

当然，对这种 g 的 g-可积、g-可测和测度 μ_g 的理论，等价地可直接从下列方式得到：规定这种 g 的 g-可测集全体 $L_g=L_p\cap L_n$，当 $E\in L_g$，f 在 E 上

既是 p-可测，又是 n-可测时，才规定 f 在 E 上 g-可测，同样，规定 f 在 E 上既是 p-可积，又是 n-可积时，才称 f 在 E 上 g-可积，并规定

$$\int_E f\,d\mu_g=\int_E f\,d\mu_p-\int_E f\,d\mu_n. \tag{2.23}$$

在通常的应用中，对这种 g 的积分，f 一般总是取为 Borel 可测函数（详见下面 §3）.

在泛函分析中，需要下面的一个定理和系.

令 $C[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上连续函数全体，$V_0[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上满足下列条件的有界变差函数全体：(i) $g(a)=0$，(ii) g 在 (a, b) 上右连续（g 在 a 点可以不右连续）.

对 $g\in V_0[a, b]$，引入 $(-\infty, \infty)$ 上函数

$$g_1(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant a \text{ 时},\\ g(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时},\\ g(x), & \text{当 } x\in(a, b] \text{ 时},\\ g(b), & \text{当 } x>b \text{ 时}.\end{cases} \tag{2.24}$$

g_1 是右连续的有界变差函数. 对任何 $f\in C[a, b]$，规定 f 关于 $g(\in V_0[a, b])$ 的积分

$$\int_{[a,b]} f\,dg=\int_{[a,b]} f\,d\mu g_1. \tag{2.25}$$

定理 4 设 $g\in V_0[a, b]$，如果对 $[a, b]$ 上一切非负连续实函数 f，有

$$\int_{[a,b]} f\,dg\geqslant 0,$$

那末 g 在 $[a, b]$ 上必是单调增加函数.

证明 从 g_1 的定义可知，要证明 g 是 $[a, b]$ 上单调增加函数，仅需证明 g_1 是任何包含 $[a, b]$ 的开区间 (a', b') 上单调增加函数.

设 f 是 $[a', b']$ 上非负连续函数，显然，

$$\int_{[a',b']} f\,d\mu g_1=\int_{[a,b]} f\,d\mu g_1\geqslant 0, \tag{2.26}$$

因此，我们不妨假设对 g_1 在 $[a', b']$ 上满足定理 4 的条件下来证明 g_1 在 (a', b') 上单调增加就可以了.

设 $\alpha, \beta\in(a', b')$，$\alpha<\beta$，并且 α、β 都是 g_1 的连续点. 如果 $g_1(\alpha)>g_1(\beta)$，那末必存在 $\delta>0$，使得

$$\bigvee_{\alpha-\delta}^{\alpha}(g_1)+\bigvee_{\beta}^{\beta+\delta}(g_1)<\frac{1}{2}(g_1(\alpha)-g_1(\beta)).$$

由此作 $(\alpha-\delta, \beta+\delta)$ 上非负连续函数如下：

$$f=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in[\alpha,\beta] \text{ 时},\\ \dfrac{-(x-\beta-\delta)}{\delta}, & \text{当 } x\in[\beta,\beta+\delta) \text{ 时},\\ \dfrac{x-\alpha+\delta}{\delta}, & \text{当 } x\in(\alpha-\delta,\alpha] \text{ 时}.\end{cases}$$

由于 $f\geqslant 0$, 所以

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_{[a',b']} f\,d\mu g_1\\ &\leqslant\int_{[\alpha,\beta]} f\,d\mu g_1+\int_{[\beta,\beta+\delta]} f\,|d\mu g_1|+\int_{[\alpha-\delta,\alpha]} f\,|d\mu g_1|\\ &\leqslant g_1(\beta)-g_1(\alpha)+\bigvee_{\beta}^{\beta+\delta}(g_1)+\bigvee_{\alpha-\delta}^{\alpha}(g_1)\\ &\leqslant\frac{1}{2}(g_1(\beta)-g_1(\alpha))<0,\end{aligned}$$

这就发生矛盾. 因此 $g_1(\alpha)\leqslant g_1(\beta)$. 根据右连续性, 易知 g 在 (a', b') 上单调增加. 证毕.

显然, 由定理 4 立即可以得到下面的系.

系　假设 g 如定理 4, 如果对一切 $[a, b]$ 上连续函数 f,

$$\int_{[a,b]} f\,dg=0,$$

那末 g 在 $[a, b]$ 上必为常数.

习　题

1. 证明定理 1 中除(7)与(11)以外的一切性质.

2. 设 E 是 g-可测集, 并且 $\mu_g(E)<\infty$. 又设 f 在 E 上是 g-可测函数, $\{D_n\}$ 是有限分点组所成的序列

$$D_n:\ y_0^{(n)}<y_1^{(n)}<\cdots<y_{m_n}^{(n)},\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

满足 $d(D_n)\to 0$, $y_0^{(n)}\to-\infty$, $y_{m_n}^{(n)}\to\infty$. 作和式

$$S(D_n,\ f)=\sum_{\nu=1}^{m_n}\xi_\nu^{(n)}\mu_g(E(y_{\nu-1}^{(n)}<f\leqslant y_\nu^{(n)})).$$

证明 f 为 g-可积的充要条件是存在数 A, 对任何 $\{D_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n,\ f)=A.$$

3. 将定理 4 中"对 $[a, b]$ 上一切非负连续实函数 f"有

$$\int_{[a,b]} f\,dg\geqslant 0,$$

换成"对 $[a, b]$ 上一切正连续函数 f"成立, 证明定理 4 结论乃成立.

4．证明定理4的系．

5．令 $T_{2\pi}$ 是三角多项式全体，$V_{2\pi}$ 是 $V_0[0, 2\pi]$ 中满足 $g(0+0)=g(0)$ 的函数全体．证明：如果 $g\in V_0[0, 2\pi]$，并对一切 $T_{2\pi}$ 中满足 $f(t)>0(t\in[0, 2\pi])$ 都有 $\int_{[0,2\pi]} f\,dg\geqslant 0$，那末 g 必是 $[0, 2\pi]$ 上单调增加函数．

§3 波雷尔集与勒贝格-斯蒂阶可测集的关系

在这一节的附录中，将要举出一个勒贝格不可测集的例子，这说明对某些 g（不只是 $g(x)=x$ 的情况）存在不（关于 g）可测的集，因而这种集上的特征函数也不是 g-可测的．从§2看出，我们要讨论关于 g 的积分，函数必须要求是 g-可测的．又从§1看出，函数的可测性是依赖于 g 的，这很不方便．例如，在讨论问题中，假如同时出现两个以上的函数 g，就可能发生一个函数关于某些 g 是可测的，而关于另一些 g 不可测的情况．例如在第二章§3第9小节中就出现这种情况，再如通常黎曼积分中有

$$(R)\int_a^b f\,d\varphi_1+(R)\int_a^b f\,d\varphi_2+\cdots+(R)\int_a^b f\,d\varphi_n$$

$$=(R)\int_a^b f\,d\sum_{i=1}^n\varphi_i,$$

其中 f 在 $[a, b]$ 上连续，φ_i 在 $[a, b]$ 上连续可微．要想推广黎曼积分中上述结果到一般的勒贝格-斯蒂阶积分，自然会想到下面的等式：

$$\int_{\langle a,b\rangle} f\,dg_1+\cdots+\int_{\langle a,b\rangle} f\,dg_n=\int_{\langle a,b\rangle} f\,d\Big(\sum_{i=1}^n g_i\Big),$$

这里也会同时出现许多的 g．更复杂的情况下，可测性条件说起来非常烦琐，甚至说不清楚．很自然地，希望能出现这样一个函数类，一方面它包含了足够多的函数，例如把简单函数、连续函数、以及通常见到的复杂函数（象 Dirichlet 函数等）都包括在内；另一方面，这个类中的每个函数对一切 g 都是可测的，并且这个类还满足分析数学最通常的要求，即这个函数类对线性运算、代数运算、极限运算是封闭的．如果能做到如此，一般说来对于分析数学也

相当地可以够用了. 波雷尔可测函数就能做到这一点.

1. 波雷尔(Borel)集

我们以直线的情况为例(高维空间类似)引入 Borel 集.

定义　用 $\boldsymbol{P}$ 表示直线上有限的左开右闭区间 $(a, b]$ 全体所成的集类, 用 $\boldsymbol{R}_0$ 表示有限个互不相交的有限的左开右闭区间 $(a_i, b_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的和集 $E=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$ 全体所成的集类. 用 $\boldsymbol{B}$ (有时也用 $\mathscr{B}$) 表示包含 $\boldsymbol{R}_0$, 但对减法和可列和运算封闭的最小集类, 称 $\boldsymbol{B}$ 是直线上 Borel 集类, 而 $\boldsymbol{B}$ 中每个集称为直线上的 Borel 集(也称为 Borel 可测集). 而 $\boldsymbol{B}\cap\langle a, b\rangle=\{E\cap\langle a, b\rangle|E\in\boldsymbol{B}\}$ 称为 $\langle a, b\rangle$ 上 Borel 集类, 这里 $\boldsymbol{B}\cap\langle a, b\rangle$ 中每个集称为 $\langle a, b\rangle$ 上 Borel 集.

如果用第一章 §1 有关集类的代数语言, 显然 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{R}_0$、$\boldsymbol{B}$ 有如下性质:

(1) $\boldsymbol{R}_0$ 是包含 $\boldsymbol{P}$ 的最小环, $\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P})$ (即包含 $\boldsymbol{P}$, 并对和、差运算封闭的最小集类).

(2) $\boldsymbol{B}$ 是包含 $\boldsymbol{R}_0$ 的最小 σ-环, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$ (即 $\boldsymbol{B}$ 是满足(i) $\boldsymbol{B}\supset\boldsymbol{R}_0$, (ii) $\boldsymbol{B}$ 不仅对和、差运算封闭, 而且对可列和运算封闭这两个条件的最小集类. 从而 $\boldsymbol{B}$ 是对集的极限运算封闭的集类. 其实, $\boldsymbol{B}$ 还是 σ-代数, $(-\infty, \infty)\in\boldsymbol{B}$, 所以 $\boldsymbol{B}$ 对求余运算也封闭).

$\boldsymbol{B}$ 还具有下面的性质:

(3) 单点集和可列集是 Borel 集.

(4) 区间、开集、闭集都是 Borel 集.

(5) 一切 F_σ、G_δ、$G_{\delta\sigma}$、$F_{\sigma\delta}$、$\cdots$ 等等类型的集是 Borel 集.

(6) $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{F}$ 分别表示开、闭集类, 那末 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{F})$.

以上(1)～(6)是读者可以自己证明的, 用超限归纳法的理论还可以证明:

(7) $\boldsymbol{B}$ 的势是 $\aleph$.

由(3)～(6)可见, $\boldsymbol{B}$ 是包含了相当复杂的集的一个丰富的集

类．然而，Borel 集的概念是不依赖于事先是否存在 g 的一种集类，从这个意义上讲，$\boldsymbol{B}$ 是集合论范畴的，而不是测度论范畴的．如果从测度论角度来看它，显然有如下性质：

(8) 对任何单调增加右连续函数 g，g-可测集全体 $\boldsymbol{L}_g \supset \boldsymbol{B}$．换言之，$\boldsymbol{B}$ 中每个集都是 g-可测的．

(9) $\boldsymbol{B} \cap \langle a, b\rangle = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0 \cap \langle a, b\rangle)$（即 $\langle a, b\rangle$ 上 Borel 集类可以视为由包含在 $\langle a, b\rangle$ 上左开右闭区间以及可能还有单点 $\{a\}$（当 $\langle a, b\rangle$ 是左闭区间时才需要它）所张成的 σ-环）．

(8)的证明 因为 (i) $\boldsymbol{L}_g \supset \boldsymbol{R}_0$；(ii) 由 §1 定理 2，$\boldsymbol{L}_g$ 是 σ-环，而 $\boldsymbol{B}$ 是包含 $\boldsymbol{R}_0$ 的最小 σ-环，所以 $\boldsymbol{L}_g \supset \boldsymbol{B}$．证毕．

其实，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{L}_g$ 有着更深入的联系．

2．勒贝格-斯蒂阶可测集与波雷尔集

这一小节要讨论 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{L}_g$ 的更深入的关系．为此，我们先证明一个很有用的引理．

引理 设 E 是 g-可测集，$\{\varphi_n\}$、$\{\psi_n\}$ 是 E 上两列 g-可测函数，并且 $\{\varphi_n\}$ 在 E 上（关于 g）几乎处处收敛于 f．下列命题成立：

(1) 令 $E_n = \{x \mid \varphi_n(x) = \psi_n(x)\}$．如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_g(E - E_n) < \infty$（即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_g(E(\varphi_n \neq \psi_n)) < \infty$），那末 $\{\psi_n\}$ 在 E 上（关于 g）几乎处处收敛于 f．

(2) 令 $\{\eta_n\}$ 是收敛于零的一列正数，$E'_n = \{x \mid |\varphi_n(x) - \psi_n(x)| < \eta_n\}$．如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_g(E - E'_n) < \infty$（即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_g(E(|\varphi_n - \psi_n| > \eta_n)) < \infty$），那末 $\{\psi_n\}$ 在 E 上（关于 g）几乎处处收敛于 f．

证明 首先指出命题(1)可由命题(2)推出．事实上，因为

$$E_n \subset E'_n,$$

从而 $E - E'_n \subset E - E_n$，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_g(E - E_n) < \infty$，那末更有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_g(E - E'_n) < \infty$．假定命题(2)成立，因而 $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n \doteq f$，即(1)成立．

今证(2)．因为(2)的结论是只要得到除去 E 中一个 g-零集

外，$\{\psi_n\}$收敛于f，所以，可以事先将$\{\varphi_n\}$不收敛于f的那个g-零集E_0去掉，即不妨假设$\{\varphi_n\}$在E上处处收敛于f（否则用$E_1=E-E_0$代替原来的E就可以了）。

作$\{E'_n\}$的下限集

$$F=\varliminf_{n\to\infty}E'_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E'_n,\ E'_n=E(|\varphi_n-\psi_n|<\eta_n). \tag{3.1}$$

对任何$x_0\in F$，存在$m(x_0)$，当$n\geqslant m(x_0)$时

$$|\varphi_{m(x_0)}(x_0)-\psi_{m(x_0)}(x_0)|<\eta_{m(x_0)},\ \cdots,\ |\varphi_n(x_0)-\psi_n(x_0)|<\eta_n. \tag{3.2}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0)$，由(3.2)易知

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x_0)=f(x_0),$$

这就是说，$\{\psi_n\}$在F上处处收敛于f. 剩下只要证明$E-F$是g-零集即可。

事实上，因为$E-F=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}(E-E'_n)=\varlimsup\limits_{n\to\infty}(E-E'_n)$，由本章§1定理2的性质(15)，$\mu_g(E-F)=0$. 证毕.

系　设E是g-可测集，$\{\psi_n\}$是E上一列g-可测函数，f是E上函数，$\{\eta_n\}$是一列收敛于零的正数，如果$E'_n=\{x\,|\,|\psi_n(x)-f(x)|<\eta_n\}(n=1,2,\cdots)$是$g$-可测集，并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_g(E-E'_n)<\infty$（即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_g(E(|\psi_n-f|\geqslant\eta_n))<\infty$），那末$\{\psi_n\}$在$E$上几乎处处收敛于$f$，从而$f$必是$E$上$g$-可测函数.

证明　取$\varphi_n=f$，$n=1,2,\cdots$，因而$\{\varphi_n\}$在E上处处收敛于f. 尽管暂时还不知道φ_n（即f）是g-可测的，但由假设E'_n是g-可测的，所以引理的证明中从(3.1)式开始仍成立，从而$\{\psi_n\}$除去一个g-零集后收敛于f. f作为g-可测函数列$\{\psi_n\}$的（关于g）几乎处处的极限，它是g-可测的. 证毕.

今后，引理和系中的$\{\eta_n\}$常取成$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$或$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$的形式。

定理1　设E是g-可测集，那末

(1) 对任何$\varepsilon>0$，必存在开集$O\supset E$，使得$\mu_g(O-E)<\varepsilon$；

(2) 对任何 $\varepsilon>0$，必存在闭集 $F\subset E$，使得 $\mu_g(E-F)<\varepsilon$. 更进一步，有

(3) 存在 $\boldsymbol{B}$ 中 G_δ 型集 $G\supset E$，使得 $\mu_g(G-E)=0$;

(4) 存在 $\boldsymbol{B}$ 中 F_σ 型集 $F\subset E$，使得 $\mu_g(E-F)=0$.

证明 (1) 分两步，先设 $E\subset(a,b)$，此地 (a,b) 是有限开区间. 按(1)的结论要求，就是要证明存在开集 O (不妨取 $O\subset(a,b)$)，使得

$$\mu_g(O-E)=\int(\chi_O-\chi_E)dg<\varepsilon.$$

事实上，因为 χ_E 是 g-可测的，从而存在 (a,b) 上一列 C_0 类函数 $\{\tau_n\}$，$\{\tau_n\}$ (关于 g) 几乎处处收敛于 χ_E. 修改每个 τ_n 成 φ_n 如下

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } \tau_n(x)\geqslant\dfrac{1}{2} \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \tau_n(x)<\dfrac{1}{2} \text{ 时}.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n\underset{\mu_g}{\doteq}\chi_E$，易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\underset{\mu_g}{\doteq}\chi_E$. 但 φ_n 是 (a,b) 中有限个互不相交的区间 $I_i^{(n)}$ $(i=1,2,\cdots,i_n)$ 的和集 $\bigcup\limits_{i=1}^{i_n}I_i^{(n)}$ 的特征函数. 对每个 $I_i^{(n)}$，显然，存在 (a,b) 中开区间 $I_i'^{(n)}\supset I_i^{(n)}$，使得 $\mu_g(I_i'^{(n)}-I_i^{(n)})<\dfrac{1}{2^{n+1}i_n}$. 这样，$(a,b)$ 中开集 $G_n=\bigcup\limits_{i=1}^{i_n}I_i'^{(n)}\supset\bigcup\limits_{i=1}^{i_n}I_i^{(n)}$. 显然

$$\{x\,|\,\chi_{G_n}(x)\neq\varphi_n(x)\}=\bigcup_{i=1}^{i_n}I_i'^{(n)}-\bigcup_{i=1}^{i_n}I_i^{(n)}\subset\bigcup_{i=1}^{i_n}(I_i'^{(n)}-I_i^{(n)}).$$

由于 $\mu_g(\bigcup\limits_{i=1}^{i_n}(I_i'^{(n)}-I_i^{(n)}))\leqslant\sum\limits_{i=1}^{i_n}\mu_g(I_i'^{(n)}-I_i^{(n)})<\dfrac{1}{2^{n+1}}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_g(\{x\,|\,\chi_{G_n}\neq\varphi_n\})<\infty$. 由引理的(1)，立即有

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{G_n}\underset{\mu_g}{\doteq}\chi_E,$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\chi_{G_n}\underset{\mu_g}{\doteq}\chi_E. \tag{3.8}$$

令 $O_n=\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}G_m$. 显然，$O_n$ 是 (a,b) 中开集，$\chi_{O_n}=\lim\limits_{m\to\infty}\max(\chi_{G_n},$

$\chi_{G_{n+1}}, \cdots, \chi_{G_m})$. 由(3.3)立即得到

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{O_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{G_n}\underset{\mu_g}{=}\chi_E.$$

由有界控制收敛定理可知，存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\left|\int(\chi_{O_n}-\chi_E)dg\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

注意，$\{O_n\}$是单调下降序列，因此，E 中一切使得 $\lim_{n\to\infty}\chi_{O_n}(y)=\chi_E(y)=1$ 的点 y 必在每个 O_n 中. 但是，使得 $\lim_{n\to\infty}\chi_{O_n}(y)\neq\chi_E(y)$ 的 y 全体 E_0 是 g-零集，从而存在 (a, b) 中开集 $O'\supset E_0$，并且 $\mu_g(O')<\varepsilon/2$. 今取 $O=O_N\cup O'$，显然 $O\supset E$，由(3.4)立即得到

$$\int(\chi_O-\chi_E)dg<\left|\int(\chi_{O_N}-\chi_E)dg\right|+\int\chi_{O'}dg<\varepsilon.$$

第二步，对一般的 E，显然 $E=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}E\cap(n, n+1]$，记 $E_n=E\cap(n, n+1]$，E_n 是有界的，因而存在有限开区间$(a, b)\supset E_n$. 由上面已证明的事实，立即得到对任何 $\varepsilon>0$，存在开集 $O_n\supset E_n$，且

$$\mu_g(O_n-E_n)<\frac{\varepsilon}{2^{|n|+2}}(n=0, \pm1, \cdots).$$

记 $O=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}O_n$. 显然，开集 $O\supset E$，并且 $O-E\subset\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(O_n-E_n)$，从而

$$\mu_g(O-E)\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_g(O_n-E_n)<\varepsilon.$$

(2) 对 E^c，由(1)，存在开集 $O\supset E^c$，使得 $\mu_g(O-E^c)<\varepsilon$. 记 $F=O^c$，因而 F 是闭集，且

$$F\subset E,\ E-F=F^c-E^c=O-E^c$$

由此得到　　$$\mu_g(E-F)=\mu_g(O-E^c)<\varepsilon.$$

(3) 当 $E\in L_g$ 时，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，由(1)，存在开集 $O_n\supset E$，且$\mu_g(O_n-E)<\frac{1}{n}$. 令 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$，显然，$G$ 是 G_δ 型集，且 $G\supset E$. 因此，由测度单调性得到

$$\mu_g(G-E)\leqslant\mu_g(O_n-E)<\frac{1}{n},$$

再令 $n\to\infty$, 从而

$$\mu_g(G-E)=0.$$

(4) 当 $E\in \boldsymbol{L}_g$ 时, $E^c\in \boldsymbol{L}_g$. 由(3)存在 G_δ 型集 $G\supset E^c$, 使 $\mu_g(G-E^c)=0$. 记 $F=G^c$, 显然 F 是 F_σ 型集, 而且 $F\subset E$. 由于 $E-F=G-E^c$, 所以 $\mu_g(E-F)=\mu_g(G-E^c)=0$. 证毕.

定理 1 是在测度论观念下, 用 Borel 集刻划 $\boldsymbol{L}_g$ 中集的定理. 下面是用 Borel 集判断一个集 E 是否属于 $\boldsymbol{L}_g$ 的定理.

定理 2 $E\in \boldsymbol{L}_g$ 的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 存在开集 G、闭集 F, 使得

$$F\subset E\subset G, \text{且} \quad \mu_g(G-F)<\varepsilon.$$

证明 必要性 从定理 1 的(1)、(2)立即可得.

充分性 取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$, 存在闭集 F_n, 开集 G_n, 使得

$$F_n\subset E\subset G_n, \text{且} \quad \mu_g(G_n-F_n)<\frac{1}{n}. \tag{3.5}$$

记 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. 显然, $F, G\in B\subset \boldsymbol{L}_g$, 并且

$$E-F\subset G_n-F \quad (n=1, 2, \cdots),$$

因而 $E-F\subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(G_n-F)$. 然而

$$\mu_g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n-F)\right)\leqslant\mu_g(G_n-F)$$
$$\leqslant\mu_g(G_n-F_n)<\frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

令 $n\to\infty$, 便知集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(G_n-F)$ 是 g-零集, 但 μ_g 是完全测度, 所以它的子集 $E-F$ 也是 g-零集, 即 $\mu_g(E-F)=0$. 从而 $E=F\cup(E-F)$ 是 g-可测集. 证毕.

3. Borel 可测函数

利用 Borel 集可以引入 Borel 可测函数. 先引入测度和积分中常用的可测空间概念.

定义　设 X 是一个集合，$\boldsymbol{R}$ 是由 X 的某一些子集所成的 σ-环，称 $(X, \boldsymbol{R})$ 是可测空间，称 $\boldsymbol{R}$ 中每个集 E 为 $(X, \boldsymbol{R})$ 上可测集．特别，当 $X=E^1$, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}$ 时，称 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 为 Borel 可测空间，称 $\boldsymbol{B}$ 中每个 Borel 集为 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 上 Borel 可测集．

如果取 $X=E^1$, $\boldsymbol{R}$ 分别取为 $\boldsymbol{L}_g$、$\boldsymbol{L}$ 时，分别称 $(E^1, \boldsymbol{L}_g)$, $(E^1, \boldsymbol{L})$ 为（关于 g）勒贝格-斯蒂阶可测空间、勒贝格可测空间．

如果用可测空间上可测集的术语，我们前面所说的 g-可测集、勒贝格可测集就分别是勒贝格-斯蒂阶可测空间 $(E^1, \boldsymbol{L}_g)$ 和勒贝格可测空间 $(E^1, \boldsymbol{L})$ 上的可测集．

应该注意，(I) 从定义可知，抽象的"可测空间"概念本身并不依赖于 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上面的测度概念，所以，"可测空间"属于集合论的范畴．

(II) 在一般的书和文章中，也有常把可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 中 $\boldsymbol{R}$ 规定取为 σ-代数（即还设 $X\in\boldsymbol{R}$），但不明确交待这一点，这是读者要自己留心的．

在可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上如何引入可测函数？当然，一般情况下不能用象直线上取"简单函数"列的几乎处处极限的办法．因为"几乎处处"是对测度而言的．这里没有测度，应该用单纯集合论的语言，或处处收敛的语言．下面用集合论的语言来定义．

定义　设 $(X, \boldsymbol{R})$ 是可测空间，f 是定义在 E 上的有限实函数，如果对任何实数 c, $E(f>c)$ 是可测集（即 $E(f>c)\in\boldsymbol{R}$），称 f 是 E 上可测函数．

特别，当 $X=E^1$, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}$ 时，Borel 可测空间 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 上可测集 E 上可测函数，称为 Borel 可测函数．

显然，当 f 是 E 上可测函数时，$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f>-n)$ 是可测集，即可测函数的定义域必是可测集．

和 §1 的 g-可测集上 g-可测函数一样，可以证明有如下结果：

定理 3　设 E 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上可测集，那末下面几件

事是等价的：

(1) f 是 E 上可测函数.

(2) 对任何实数 c, $E(f\geqslant c)$ 是可测集.

(3) 对任何实数 c, $E(f<c)$ 是可测集.

(4) 对任何实数 c, $E(f\leqslant c)$ 是可测集.

(5) 对任何实数 c、d, $E(c<f\leqslant d)$ 是可测集.

(6) 存在可测集(可以取为包含在 E 中)的特征函数线性组合的序列 $\{\psi_n\}$, 在 E 上处处收敛于 f.

(7) 对任何 Borel 集 B, $f^{-1}(B)$ (B 的原象)是可测集.

证明 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(1) 的过程和 §1 的定理 4 中证明 (2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(1)⇒(2) 的过程一样，唯一要改变的是要把 §1 的定理 4 中证明 (1)⇒(2) 的过程(相当于这里的(6)⇒(1))中所用的(1.30)式中 E_2 换为这里的 E, 把简单函数 φ_n 换为这里的 ψ_n.

(7)是新的，所以现在证明(7)和其它的等价：由于 (c, ∞) 是特殊的 Borel 集，当(7)中 B 取为 (c, ∞) 时, $f^{-1}((c, \infty))=E(f>c)$, 因此(7)⇒(1)是显然的. 余下只要证明 E 上可测函数 f 必具有性质(7)就可以了. 为此，我们记

$$\boldsymbol{M}=\{M\,|\,f^{-1}(M)\in\boldsymbol{R},\ M\in\boldsymbol{B}\}, \tag{3.6}$$

即 $\boldsymbol{M}$ 是 B 中使得 $f^{-1}(M)$ 为可测的 Borel 可测集 M 全体所成的集类. 显然，

(i) $(c, d]\in\boldsymbol{M}$;

(ii) 如果 M_1、$M_2\in\boldsymbol{M}$, 那末，由(易知的)等式 $f^{-1}(M_1-M_2)=f^{-1}(M_1)-f^{-1}(M_2)$, 以及 $f^{-1}(M_1)$, $f^{-1}(M_2)\in\boldsymbol{R}$, 立即有 $M_1-M_2\in\boldsymbol{M}$.

(iii) 如果 $\{M_n\}\subset\boldsymbol{M}$, 那末由(易知的)等式 $f^{-1}(\bigcup_n M_n)=\bigcup_n f^{-1}(M_n)$, 以及 $f^{-1}(M_n)\in\boldsymbol{R}$ $(n=1, 2, \cdots)$, 立即有 $\bigcup_n f^{-1}(M_n)\in\boldsymbol{R}$, 所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\in\boldsymbol{M}$.

这就是说，$\boldsymbol{M}$ 是包含左开右闭区间，并对减法和可列和运算

封闭的集类，从而 $\boldsymbol{M}$ 是包含 $\boldsymbol{P}$ 的 σ-环，而 $\boldsymbol{B}$ 是包含 $\boldsymbol{P}$ 的最小 σ-环，所以 $\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{B}$. 但根据 $\boldsymbol{M}$ 的定义，显然又有 $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}$. 证毕.

E 上可测函数也具有 §1 定理 3 中所有的性质.

定理 4 设 E 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上可测集，f、h 是 E 上可测函数，那末

(1) $\alpha f+\beta h$ (α、β 是常数)、$|f|$、$\max(f, h)$、$\min(f, h)$、f^+、f^-、fh 都是 E 上可测函数.

(2) 如果对一切 $x\in E$，$f(x)\neq 0$，那末 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是 E 上可测函数.

(3) 设 k 是 E 上有限函数，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{I} E_i(E_i\cap E_j=\phi,\ i\neq j)$，并且每个 E_i 是可测集，那末 k 是 E 上可测函数的充要条件是 k 在每个 E_i 上是可测函数.

(4) 设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数，并且在 E 上处处收敛于 k，那末 k 是 E 上可测函数（利用这个结论还可将(3)的结论推广成 $\{E_i\}$ 是一列集的情况）.

定理 4 既可从可测空间上可测函数的定义出发，加以直接证明，例如参见 Halmos 的《测度论》或夏道行等编《实变函数论与泛函分析》，也可仿本章 §1 定理 1 的方法证明（不过要将 §1 定理 1 中简单函数 φ_n 改为这里定理 3(6) 中出现的 ψ_n）.

特别，当 $(X, \boldsymbol{R})$ 是 Borel 可测空间 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 时，定理 3、4 对 Borel 可测函数成立.

常用的 Borel 可测函数有：

例 1 直线上连续函数 f 是 Borel 可测函数. 这是因为对任何 c，$\{x\mid f(x)>c\}=f^{-1}((c, \infty))$ 是开集，而开集是 Borel 可测集的缘故.

例 2 Borel 集的特征函数是 Borel 可测函数. 特别地，一个区间（可以是无限的）的特征函数以及这种函数的线性组合（包括 C_0 类函数）是 Borel 可测函数.

例 3 $\langle a, b\rangle$ 上单调函数是 Borel 可测函数（因为 $f^{-1}((c, \infty))$ 是区间）.

由于 $\boldsymbol{B}\subset \boldsymbol{L}_g$, 所以任何 Borel 可测函数必是 g-可测函数.

对于 Borel 可测函数，还有如下的等价定义：

定义 设 $\mathfrak{M}$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上某些实有限函数构成的一个集，如果满足：

(1) $(-\infty, \infty)$ 上所有连续函数均在 $\mathfrak{M}$ 中；

(2) $\mathfrak{M}$ 对函数列的点点收敛极限运算封闭：即 $\{f_n\}\subset\mathfrak{M}$，且 $\{f_n\}$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上处处收敛于 f 时，$f\in\mathfrak{M}$.

这种集 $\mathfrak{M}$ 中最小的（即一切满足 (1), (2) 的 $\mathfrak{M}$ 的通集）记为 $\mathfrak{M}_0$，称 $\mathfrak{M}_0$ 为 $(-\infty, \infty)$ 上 Borel 函数类，其中每个函数称为 Borel 可测函数．特别，$\mathfrak{M}_0$ 在 Borel 集 E 上的限制 $\mathfrak{M}_0(E)$ 称为 E 上 Borel 函数类，而 $\mathfrak{M}_0(E)$ 中每个函数称为 E 上 Borel 可测函数.

这种定义方式最初是由 Baire 引入的（即看成从连续函数出发，按处处收敛极限封闭逐步扩大的方式产生的函数类），所以，Borel 可测函数（类）又称为 Baire 函数（类）．当然，这两个名称在一般拓扑空间中是有区别的，而在 n 维欧几里德空间中它们是一致的.

4. 勒贝格-斯蒂阶可测函数与 Borel 可测函数

如果考虑到测度 μ_g，由定理 1 就能得到用 Borel 可测函数刻划 g-可测函数的定理.

定理 5 设 E 是 Borel 可测集，f 是 E 上 g-可测函数，那末必存在 E 上 Borel 可测函数 h，使得 $f \underset{\mu_g}{\doteq} h$

证明 由定理 3 的 (6)，存在在 E 上处处收敛于 f 的函数列

$$\psi_n=\sum_{i=1}^{i_n}\alpha_i^{(n)}\chi_{E_i^{(n)}},\quad n=1, 2, \cdots$$

而 $E_i^{(n)}$ 是包含在 E 中的 g-可测集．根据定理 1 的 (4)，存在 Borel 集 $F_i^{(n)}\subset E_i^{(n)}$，使得

$$\mu_g(E_i^{(n)}-F_i^{(n)})=0,\ (n=1, 2, \cdots, i=1, 2, \cdots, i_n).$$

显然 $\chi_{F_i^{(n)}} \underset{\mu_g}{\doteq} \chi_{E_i^{(n)}}$. 记 $h_n=\sum_{i=1}^{i_n}\alpha_i^{(n)}\chi_{F_i^{(n)}}$, h_n 是 Borel 可测函数，并且

$$h_n \underset{\mu_g}{\doteq} \psi_n. \tag{3.7}$$

由于$\{\psi_n\}$处处收敛于 f, 所以$\{h_n\}$在 $\bigcup_{n,i}(E_i^{(n)}-F_i^{(n)})$之外收敛. 注意到 $E_0=\bigcup_{n,i}(E_i^{(n)}-F_i^{(n)})$ 是 g-零集, 再对 E_0 利用定理 1 的(3), 存在 Borel 集 B_0, $B_0\supset\bigcup_{n,i}(E_i^{(n)}-F_i^{(n)})$, 且 $\mu_g(B_0)=0$. 由此可知

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x)\chi_{B_0^c}(x)=f(x),\ x\in B_0^c\cap E. \tag{3.8}$$

所以当规定

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in B_0^c\cap E \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\in(-\infty,\ \infty)-(B_0^c\cap E) \text{ 时}, \end{cases}$$

易知 Borel 可测函数列 $\{h_n\chi_{B_0^c}\}$在$(-\infty,\ \infty)$处处收敛于 h. 因为 h 是 Borel 可测函数, 又由(3.8)可知, 在 E 上 $h \underset{\mu_g}{\doteq} f$. 证毕.

下面将更进一步用连续函数来刻划 g-可测函数.

定理 6 (Егоров)　设$\{f_n\}$是 E 上一列 g-可测函数, $\mu_g(E)<\infty$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \doteq f$, 那末, 对任何 $\delta>0$, 必存在 g-可测集 $E_\delta\subset E$, 使得 $\mu_g(E-E_\delta)<\delta$, 并且$\{f_n\}$在 E_δ 上一致收敛于 f.

证明　按假设, 存在 g-零集 E_0, 当 $x\in E_1=E-E_0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x). \tag{3.9}$$

显然有等式　$E_1=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}E_1\left(|f_m-f|<\frac{1}{n}\right)$,

由于 $F_k=\bigcap_{m=k}^{\infty}E_1\left(|f_m-f|<\frac{1}{n}\right)$是随 k 的增加而增加的集, 并且 $\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k=E_1$, 再注意到 $\mu_g(E_1)<\infty$, 所以对任何 n, 必存在 N_n, 使得

$$\mu_g(E_1-F_{N_n})=\mu_g(E_1)-\mu_g(F_{N_n})<\frac{\delta}{2^n},\quad n=1,\ 2,\ \cdots \tag{3.10}$$

令 $E_\delta=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_{N_n}$. 显然

$$\mu_g(E-E_\delta)=\mu_g(E_1-E_\delta)$$

$$=\mu_g\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1-F_{N_n})\Big)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^n}=\delta. \tag{3.11}$$

再证$\{f_m\}$在 E_δ 上一致收敛于 f. 事实上, 对任何 $\varepsilon>0$, 取自然数 n, 使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 而当 $m>N_n$ 时, 在 F_{N_n}(从而在 E_δ)上

$$|f_m-f|<\frac{1}{n}<\varepsilon, \tag{3.12}$$

即$\{f_m\}$在 E_δ 上一致收敛. 证毕.

定理 7 (Лузин) 设 f 是 E 上 g-可测函数, 那末, 对任何 $\delta>0$, 必存在$(-\infty,\infty)$上连续函数 h, 使得

$$\mu_g(\{x\,|\,f(x)\neq h(x)\})<\delta. \tag{3.13}$$

证明 (I) 先假设 $E=(a,b]$, 并且不妨设 a、b 是 g 的连续点. 由 f 的可测性知道, 存在$(a,b]$上一列 C_0 类函数 $\{\varphi_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n\underset{\mu_g}{\doteq}f$. 利用本节引理中的(1), 可将 φ_n 修改成$(-\infty,\infty)$上连续函数 ψ_n, 并使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n\underset{\mu_g}{\doteq}f$. 再由 Егоров 定理, 存在 g-可测集 $E_\delta\subset(a,b]$, $\mu_g((a,b]-E_\delta)<\varepsilon$, 并且 $\{\psi_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f. 因为 $\mu_g(E_\delta)=\sup\{\mu_g(F)\,|\,F\subset E_\delta$, F 是闭集, 所以不妨认为所取的 E_δ 是闭集. 由于 a、b 是 g 的连续点, 不妨还认为 $E_\delta\subset(a,b)$.

由于 E_δ 上连续函数列$\{\psi_n\}$一致收敛于 f, 因此 f 仅作为闭集 E_δ 上函数时, 是 E_δ 上连续函数. 根据第一章§4定理18, 存在$(-\infty,\infty)$上连续函数 h, 使得对任何 $x\in E_\delta$,

$$f(x)=h(x), \tag{3.14}$$

即(3.13)成立.

(II) 对于一般的 E 上可测函数 f, 先在 E^c 上补充定义取值是零, 记这个延拓为 $\hat{f}$. 如能对$\hat{f}$, 找到$(-\infty,\infty)$上连续函数 h, 使得 $\mu_g(\{x\,|\,\hat{f}(x)\neq h(x)\})<\delta$, 那末作为 E上函数时, 自然就

得到(3.13).

因此，下面不妨设 $E=(-\infty,\infty)$. 作分解 $E=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(a_n, a_{n+1}]$，其中每个 $(a_n, a_{n+1}]$ 是有限区间，每个 a_n 是 g 的连续点. 由于 f 是 $(a_n, a_{n+1}]$ 上可测函数，根据(1)，存在闭集 $E_n\subset(a_n, a_{n+1})$，以及 $(-\infty,\infty)$ 上连续函数 h_n，使得

$$\mu_g((a_n, a_{n+1}]-E_n)<\frac{\delta}{2^{|n|+3}}, \tag{3.15}$$

$$(n=0, \pm1, \cdots)$$

$$f(x)=h_n(x),\ x\in E_n. \tag{3.16}$$

注意到 E_n 是闭集，且 $E_n\subset(a_n, a_{n+1})$，从第一章§4定理18的证明过程(略作修改)，易知可以做到 h_n 在 $(-\infty, a_n]\cup[a_{n+1},\infty)$ 上的值是零. 今作 $(-\infty,\infty)$ 上函数

$$h(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}h_n(x), \tag{3.17}$$

显然，h 在 $(a_n, a_{n+1}]$ 上就是 h_n，从而 h 是 $(-\infty,\infty)$ 上连续函数. 又由于

$$\begin{aligned}&\{x\,|\,f(x)\neq h(x)\}\\&=\bigcup_{-\infty}^{\infty}\{x\,|\,f(x)\neq h_n(x),\ x\in(a_n, a_{n+1}]\}\\&\subset\bigcup_{-\infty}^{\infty}([a_n, a_{n+1}]-E_n),\end{aligned} \tag{3.18}$$

由(3.15)便得到

$$\mu_g(\{x\,|\,f(x)\neq h(x)\})\leqslant\sum_{-\infty}^{\infty}\mu_g([a_n, a_{n+1}]-E_n)<\delta.$$

证毕.

附　　录

5. 勒贝格不可测集

本节中要给出勒贝格不可测集的例子.

设 ξ、η 是[0, 1]中任何两点，如果 $\xi-\eta$ 是有理数，我们规定

$$\xi\sim\eta.$$

易知"$\sim$"是等价关系，用这个等价关系产生 $[0, 1]$中的等价类，记数 $\eta\in[0, 1]$的等价类为 $\tilde{\eta}$. 显然，

(1) 对任何两个等价类 $\tilde{z}_1$、$\tilde{z}_2$，要么 $\tilde{z}_1=\tilde{z}_2$，要么 $\tilde{z}_1\cap\tilde{z}_2=\emptyset$;

(2) 对任何 $x\in[0, 1]$，必存在一个等价类 $\tilde{z}$，使得 $x\in\tilde{z}$. 我们将从每个等价类选出一个代表元(用选择公理)，组成一个集 Z. 显然，

(a) $Z\subset[0, 1]$;

(b) 对任何 $z_1, z_2\in Z$，当 $z_1\neq z_2$ 时，$\tilde{z}_1\cap\tilde{z}_2=\emptyset$;

(c) 任何 $x\in[0, 1]$，必唯一地存在 $z\in Z$，使得 $x\in\tilde{z}$.

记 $[-1, 1]$中有理数全体为$\{\gamma_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$，$Z_{\gamma_n}=Z+\gamma_n$. 显然

(I) $Z_{\gamma_n}=Z+\gamma_n$, $Z_{\gamma_n}=Z_{\gamma_m}+\gamma_n-\gamma_m$ (即 $\{Z_{\gamma_n}\}$ 彼此是经过有理数移动得到的);

(II) $Z_{\gamma_n}\cap Z_{\gamma_m}=\emptyset$ $(\gamma_n\neq\gamma_m)$. 事实上，如果有 $\zeta\in Z_{\gamma_n}\cap Z_{\gamma_m}$，必有 $\zeta=z_1+\gamma_n=z_2+\gamma_m$, $z_1, z_2\in Z$，从而 $z_1-z_2=\gamma_m-\gamma_n$. 由于 Z 的性质(b)，只有 $z_1=z_2$, $\gamma_n=\gamma_m$，这与假设 $\gamma_n\neq\gamma_m$ 矛盾;

(III) $\bigcup\limits_{\gamma_n} Z_{\gamma_n}\supset[0, 1]$. 这可由 Z 的性质(c)和 Z_{γ_n} 的定义得到;

(IV) $\bigcup\limits_{\gamma_n} Z_{\gamma_n}\subset[-1, 2]$. 这可由 Z 的性质(a)和 Z_{γ_n} 的定义得到.

从$\{Z_{\gamma_n}\}$的性质(I)～(IV)，就可以知道 Z 以及一切 Z_{γ_n} 都不是勒贝格可测集.

事实上，如果 Z 是勒贝格可测集，那末 $Z_{\gamma_n}=Z+\gamma_n$ (是 Z 的移动) 也是勒贝格可测集，并且 $m(Z)=m(Z_{\gamma_n})$. 由于(II)、(III)、(IV)以及 m 的可列可加性，立即得到

$$1=m([0, 1])\leqslant m(\bigcup_{\gamma_n} Z_{\gamma_n})=\sum_n m(Z_{\gamma_n})=\sum_n m(Z)\leqslant m([-1, 2])=3,$$

这是不可能的. 因为从无限个 $m(Z)$ 之和要不超过 3 来看，只有 $m(Z)=0$，但这样无限个 $m(Z)$ 之和为零，而不可能不小于 1，所以 Z 是不可测集.

从上面证明可以看出，上述不可测集的例子只用到勒贝格测度是非负、可列可加、平移不变、$[0, 1]$测度有限并且是非零的性质. 因此，上面例子不仅对勒贝格测度不可测，而且对直线上任何非负、可列可加、平移不变、$[0, 1]$测度有限的非零测度都是不可测的. 即使平移不变条件减弱为：存在正数 α、β，对任何可测集 E 以及数 a, $\alpha\mu(E)\leqslant\mu(E+a)\leqslant\beta\mu(E)$，也是适用的.

习 题

1. 设 f 是$(-\infty, \infty)$上 Borel 可测函数，h 是 E 上 g-可测函数，证明 $f\circ h$ (即 $f(h(x))$)是 E 上 g-可测函数(注意，如果 f 不是 Borel 可测函数而

是 g-可测函数，一般说结论不成立).

2. 设 f 是 E 上有限函数，如果 $|f|$ 在 E 上 g-可测，问 f 是否在 E 上 g-可测?

3. 证明直线上任何非负、可列可加、平移不变、$[0, 1]$ 测度有限的非零测度 μ，如果它对一切 Borel 集有定义，那末必存在非零正常数 c，使得 $\mu(E)=cm(E)$ 对一切 Borel 集 E 成立.

§4　度量收敛和再论逐项积分

在这一节中，将扼要介绍与可测函数列几乎处处收敛不同的另一种收敛——度量收敛概念. 它是概率论中最基本的收敛概念之一. 另外还附带介绍一下外测度概念.

1. 度量收敛序列

定义　设 $E\in \boldsymbol{L}_g$，$\{f_n\}$ 是 E 上一列 g-可测函数，如果有 E 上 g-可测函数 f，使得对任何正数 σ，

$$\lim_{n\to\infty}\mu_g(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))=0, \tag{4.1}$$

称 $\{f_n\}$ 在 E 上(关于 g)度量收敛于 f.

把(4.1)用 ε-N 语言叙述，就得到度量收敛的另一个等价定义:

定义　设 $E\in \boldsymbol{L}_g$，$\{f_n\}$ 是 E 上一列 g-可测函数. 如果有 E 上 g-可测函数 f，使得对任何正数 σ、ε，总存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\mu_g(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))<\varepsilon, \tag{4.2}$$

称 $\{f_n\}$ 在 E 上(关于 g)度量收敛于 f.

度量收敛与几乎处处收敛关系如何? 首先看下面两个例子.

例 1　作 $E=[0, 1]$ 上一列函数,

$$\psi_{k,i}(x)=\begin{cases}1, \text{ 当 } x\in\left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right]\text{时}, \\ 0, \text{ 当 } x\overline{\in}\left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right]\text{时},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,k\quad k=1,2,\cdots$$

这样的函数是可列个:

$$\psi_{1,1},\ \psi_{2,1},\ \psi_{2,2},\ \cdots,\ \psi_{k,1},\ \cdots,\ \psi_{k,k},\ \cdots \tag{4.3}$$

显然，$\{\psi_{k,i}\}$ 是 $[0, 1]$ 上简单函数列，我们对 $[0, 1]$ 上勒贝格测度

m 来考察，$\{\psi_{k,i}\}$是一列勒贝格可测函数．对任何 $1>\sigma>0$，由于

$$E(|\psi_{k,i}|\geqslant\sigma)=\left[\frac{i-1}{k},\ \frac{i}{k}\right],$$

因而 $m(E(|\psi_{k,i}|\geqslant\sigma))=\frac{1}{k}$，所以当 $k\to\infty$ 时，序列(4.3)(关于 m)度量收敛于 $f=0$.

然而序列(4.3)在[0, 1]上任何一点都不收敛于0(这是显而易见的)．这说明度量收敛函数列可以一点也不收敛.

例2 作 $E=(-\infty,\ \infty)$ 上一列函数

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in[-n,\ n] \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in}[-n,\ n] \text{ 时},\end{cases}\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

显然，$\{\varphi_n\}$在$(-\infty,\ \infty)$上处处收敛于 $f=1$，但是，$\{\varphi_n\}$按 m 并不度量收敛于 f.

例1, 2说明度量收敛与几乎处处收敛有本质的区别．但它们之间还是有着如下的重要联系.

定理1 (1) (Lebesgue(勒贝格))设$\{f_n\}$是 E 上一列g-可测函数，并且(关于 g)几乎处处收敛于 f．如果 $\mu_g(E)<\infty$，则 $\{f_n\}$ 必(关于 g)度量收敛于 f.

(2) (Riesz(黎斯))设 $\{f_n\}$是 E 上一列 g-可测函数，并且(关于 g)度量收敛于 f，那末必存在子序列 $\{f_{n_k}\}$在 E 上(关于 g)几乎处处收敛于 f.

证明 (1) 任取 $\sigma>0$，今估计 $\mu_g(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))$．为此，考察 g-可测集列

$$E_m=\bigcap_{n=m}^{\infty}E(|f_n-f|<\sigma),\ (m=1,\ 2,\ \cdots)$$

显然，$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_m\subset\cdots\subset E$，并且，凡是$\{f_n\}$收敛于 f 的点必属于某些 E_m．由于$\{f_n\}$(关于 g)几乎处处收敛于 f，因此，E 中最多除去一个 μ_g-零集 E_0 外，应该有

$$\lim_{m\to\infty}E_m=\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\supset E-E_0. \tag{4.3}$$

再注意到 $\mu_g(E_m)\leqslant\mu_g(E)<\infty$以及测度的有关单调极限的性质，

立即由(4.3)得到

$$\lim_{m\to\infty}\mu_g(E-E_m)=0. \tag{4.4}$$

注意到 $E-E_m=\bigcup_{n=m}^{\infty}E(|f_n-f|\geqslant\sigma)$，因此

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mu_g(E(|f_n-f|\geqslant\sigma)\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu_g(E-E_n)=0,$$

即$\{f_n\}$在 E 上(关于 g)度量收敛于 f.

(2) 由于 $\{f_n\}$ (关于 g)度量收敛于 f，取 $\sigma=\frac{1}{\nu}$，$\varepsilon=\frac{1}{2^\nu}$，那末必存在 n_ν，当 $n\geqslant n_\nu$ 时，

$$\mu_g\left(E(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{\nu})\right)<\frac{1}{2^\nu}. \tag{4.5}$$

不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_\nu<\cdots$，由(4.5)立即得到

$$\mu_g\left(E(|f_{n_\nu}-f|\geqslant\frac{1}{\nu})\right)<\frac{1}{2^\nu},\ \nu=1,\ 2,\ \cdots \tag{4.6}$$

由§3中引理的系(取系中的 $\phi_\nu=f_{n_\nu}$，$\eta_\nu=\frac{1}{\nu}$)，从(4.6)式易知$\{f_{n_\nu}\}$在 E 上(关于 g)几乎处处收敛于 f. 证毕.

定理 1 的 (1) (这是勒贝格本人在勒贝格测度情况下证明的) 说明在测度有限的可测集上，由序列 $\{f_n\}$ 的几乎处处收敛可以推出度量收敛，即度量收敛的要求弱于几乎处处收敛的要求. 概率论中所出现的概率测度是全空间测度等于 1 的全有限测度，所以在概率论中度量收敛(在概率论中常称它为依概率收敛)弱于几乎处处收敛.

黎斯根据定理 1 又给出一个用几乎处处收敛判断度量收敛的充要条件.

定理 2 设 $\mu_g(E)<\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上一列 g-可测函数，那末 $\{f_n\}$ (关于 g) 度量收敛于 g-可测函数 f 的充要条件是在 $\{f_n\}$ 的任何子序列$\{f_{n_k}\}$中必可再找到一个(关于 g)的几乎处处收敛于 f 的子序列.

证明 必要性 由于 $\{f_n\}$ 度量收敛于 f，从定义易知这时$\{f_n\}$的任何子序列$\{f_{n_k}\}$必也度量收敛于 f. 利用定理 1 的(2)，立

即知道，$\{f_{n_k}\}$中必存在几乎处处收敛于 f 的子序列.

充分性　如果$\{f_n\}$不度量收敛于 f，即存在一个 $\sigma>0$，使得

$$\mu_g(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))\nrightarrow 0. \tag{4.7}$$

因此必有子序列$\{f_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\mu_g(E(|f_{n_k}-f|\geqslant\sigma))=a>0. \tag{4.8}$$

这样一来，$\{f_{n_k}\}$就不可能再有子序列几乎处处收敛于 f 了．否则，由定理 1 的(1)，将有$\{f_{n_{k_\nu}}\}$度量收敛于 f，即

$$\lim_{\nu\to\infty}\mu_g(E(|f_{n_{k_\nu}}-f|\geqslant\sigma))=0. \tag{4.9}$$

这将与(4.8)矛盾．证毕.

2．度量基本序列

类似 Cauchy 基本序列概念，也可引入.

定义　设$\{f_n\}$是 E 上一列 g-可测函数，如果对任何正数 σ.

$$\lim_{n,m\to\infty}\mu_g(E(|f_n-f_m|\geqslant\sigma))=0, \tag{4.10}$$

就称$\{f_n\}$是 E 上(关于 g)度量基本序列.

等价的定义是

定义　设$\{f_n\}$是 E 上一列 g-可测函数，如果对任何正数 σ 和 ε，存在 N，当 $n, m\geqslant N$ 时，

$$\mu_g(E(|f_n-f_m|\geqslant\sigma))<\varepsilon,$$

称$\{f_n\}$是在 E 上(关于 g)度量基本序列.

对于度量基本序列也有类似 Cauchy 收敛原理的定理.

定理 3　设$\{f_n\}$是 E 上一列 g-可测函数，那末$\{f_n\}$在 E 上(关于 g)度量基本的充要条件是存在 E 上 g-可测函数 f，使得$\{f_n\}$(关于 g)度量收敛于 f.

证明　充分性　设$\{f_n\}$度量收敛于 f．显然，对任何 $\sigma>0$，有

$$E(|f_n-f_m|\geqslant\sigma)\subset E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\cup E\left(|f_m-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right), \tag{4.11}$$

因此

$$\mu_g(E(|f_n-f_m|\geqslant\sigma))\leqslant\mu_g\left(E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\right)$$
$$+\mu_g\left(E\left(|f_m-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right)\right).\qquad(4.12)$$

由于$\{f_n\}$度量收敛于f，当$m,\ n\to\infty$时，(4.12)右边趋于零，从而$\{f_n\}$是度量基本的.

必要性　设$\{f_n\}$是度量基本的，因而对任何自然数ν，存在n_ν(不妨设$n_1<n_2<\cdots<n_\nu<\cdots$)，使得

$$\mu_g\left(E\left(|f_m-f_{n_\nu}|\geqslant\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\right)<\frac{1}{2^{\nu+2}},\quad m\geqslant n_\nu.\qquad(4.13)$$

记$F_j=E(|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|<\frac{1}{2^{j+1}})$，因而

$$\mu_g(E-F_j)=\mu_g\left(E\left(|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|>\frac{1}{2^{j+1}}\right)\right)<\frac{1}{2^{j+2}}.\qquad(4.14)$$

又记$E_\nu=\bigcap\limits_{j=\nu}^{\infty}F_j$，显然，从(4.14)可以得到

$$\mu_g(E-E_\nu)=\mu_g\left(\bigcup_{j=\nu}^{\infty}(E-F_j)\right)<\sum_{j=\nu}^{\infty}\frac{1}{2^{j+2}}=\frac{1}{2^{\nu+1}},\qquad(4.15)$$

并且，当$x\in E_\nu$时，对任何$\mu>\nu$都有

$$|f_{n_\mu}(x)-f_{n_\nu}(x)|\leqslant\sum_{j=\nu}^{\mu-1}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|<\sum_{j=\nu}^{\mu-1}\frac{1}{2^{j+1}}<\frac{1}{2^\nu}.\qquad(4.16)$$

(4.16)表示序列$\{f_{n_j}\}$在集E_ν上一致收敛．从而$\{f_{n_j}\}$在集$E_0=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}E_\nu$上处处收敛于一个$g$-可测函数．记它的极限函数为$f_0$，作

$$f(x)=\begin{cases}f_0(x), & \text{当 } x\in E_0 \text{ 时},\\ 0\ , & \text{当 } x\in E-E_0 \text{ 时},\end{cases}\qquad(4.17)$$

注意

$$\mu_g(E-E_0)=\mu_g\left(\bigcap_{\nu=1}^{\infty}(E-E_\nu)\right)\leqslant\mu_g(E-E_\nu)<\frac{1}{2^{\nu+1}},$$
$$(\nu=1,\ 2,\ \cdots)$$

即得$\mu_g(E-E_0)=0$．所以f是E上g-可测函数.

今证$\{f_n\}$在E上度量收敛于f．事实上，对任何$\sigma>0$，$\varepsilon>0$，

取 ν 使得 $\frac{1}{2^{\nu}}<\min(\sigma, \varepsilon)$. 由 (4.16) 可知(在 (4.16) 中令 $k\to\infty$),

$$|f(x)-f_{n_\nu}(x)|\leqslant\frac{1}{2^{\nu}},\ x\in E_\nu, \tag{4.18}$$

因为 $E\left(|f_m-f|>\frac{1}{2^{\nu}}\right)\subset E\left(|f_m-f_{n_{\nu+1}}|>\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\cup E\left(|f_{n_{\nu+1}}-f|>\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)$, 注意到(4.13)、(4.18)和(4.15), 当 $m\geqslant n_\nu$ 时

$$\begin{aligned}
&\mu_g\left(E\left(|f_m-f|>\frac{1}{2^{\nu}}\right)\right)\\
&\leqslant\mu_g\left(E\left(|f_m-f_{n_{\nu+1}}|>\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\right)\\
&\quad+\mu_g\left(E\left(|f_{n_{\nu+1}}-f|>\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\right)\\
&\leqslant\mu_g\left(E\left(|f_m-f_{n_{\nu+1}}|\geqslant\frac{1}{2^{\nu+2}}\right)\right)\\
&\quad+\mu_g(E-E_{\nu+1})\\
&<\frac{1}{2^{\nu+1}},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

由(4.19)立即得到, 当 $m>n_\nu$ 时

$$\mu_g(E(|f_m-f|\geqslant\sigma))\leqslant\mu_g\left(E\left(|f_m-f|>\frac{1}{2^{\nu}}\right)\right)\leqslant\frac{1}{2^{\nu}}<\varepsilon, \tag{4.20}$$

即 $\{f_n\}$ 度量收敛于 f. 证毕.

3. 再论逐项积分

现在给出度量收敛条件下的逐项积分定理.

定理 4 (勒贝格) 设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列 g-可测函数, 并且(关于 g)度量收敛于 f, 如果存在 E 上 g-可积函数 F, 使得

$$|f_n|\underset{\mu_g}{\leqslant}F,\qquad n=1, 2, \cdots \tag{4.21}$$

则 f 是 E 上 g-可积函数, 而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu_g=\int_E f\,d\mu_g. \tag{4.22}$$

证明　显然，由定理 1 的(2)可知，必有 $|f|\leqslant F$. 再由 g-可测函数的控制可积性，f 必为 E 上 g-可积函数. 现在只要证明(4.22)即可.

任取正数 σ 和自然数 M，记 $E_{\sigma M}=E(|f-f_n|<\sigma)\cap[-M, M]$，显然

$$\begin{aligned}\int_E |f-f_n|\,d\mu_g &\leqslant \int\limits_{E\cap[-M,M]} |f-f_n|\,d\mu_g+\int\limits_{E\cap[-M,M]^c} 2F\,d\mu_g\\&=\int\limits_{E_{\sigma M}} |f-f_n|\,d\mu_g+\int\limits_{E-E_{\sigma M}} |f-f_n|\,d\mu_g\\&\quad+\int\limits_{E\cap[-M,M]^c} 2F\,d\mu_g\\&\leqslant \sigma g([-M, M])+\int\limits_{E-E_{\sigma M}} 2F\,d\mu_g\\&\quad+\int\limits_{E\cap[-M,M]^c} 2F\,d\mu_g.\end{aligned}\tag{4.23}$$

由于 F 是 g-可积的，所以对任何 $\varepsilon>0$，可选出充分大的 M，使

$$\int\limits_{E\cap[-M,M]^c} 2F\,d\mu_g<\frac{\varepsilon}{3}.$$

选定 M 后，可选正数 σ，使得 $\sigma g([-M, M])<\frac{\varepsilon}{3}$. 对选定的这个 σ，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_g(E(|f-f_n|\geqslant\sigma))=0$ 以及函数 F 的积分的全连续性，知道必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时

$$\int\limits_{E(|f-f_n|\geqslant\sigma)} 2F\,d\mu_g<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由此可知对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，由 (4.23) 得到

$$\int_E |f-f_n|\,d\mu_g<\varepsilon,\tag{4.24}$$

即(4.22)成立. 证毕.

附 录

4. 逐项积分的充要条件

关于逐项积分定理还可以把控制条件放宽，得到某种充要条件. 为此引入

定义 设 E 是 g-可测集, $\mathfrak{M}$ 是 E 上一族 g-可积函数. 如果对任何 $\varepsilon>0$, 存在仅依赖于 ε 的 $\delta>0$, 使得 E 上任何一个 g-可测子集 e, 只要 $\mu_g(e)<\delta$, 对一切 $f\in\mathfrak{M}$, 总有

$$\left|\int_e f d\mu_g\right|<\varepsilon,$$

则称函数族 $\mathfrak{M}$ 在 E 上的积分(关于 g)等度全连续(或等度绝对连续).

例如, 如果存在 E 上 g-可积函数 F, 使得一切 $f\in\mathfrak{M}$,

$$|f|\underset{\mu_g}{\leqslant}F.$$

显然, 族 $\mathfrak{M}$ 在 E 上的积分(关于 g)等度全连续.

如果 $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ 是两个在 E 上积分等度全连续的函数族, 显然, $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$ 在 E 上也是积分等度全连续的.

定理 5 (Vitali (维太利)) 设 E 是 g-可测集, $\mu_g(E)<\infty$, $\{f_n\}$ 是 E 上一列非负的 g-可积函数, 并且度量收敛于 g-可测函数 f, 那末, 可以逐项积分的充要条件是 $\{f_n\}$ 在 E 上的积分(关于 g)等度全连续.

证明 充分性 先证 f 在 E 上 g-可积. 事实上, 对任何 $\varepsilon>0$, 由假设存在 $\delta>0$, 当 $e\subset E$, $\mu_g(e)<\delta$ 时,

$$\int_e f_n d\mu_g<\varepsilon.$$

由于 $\{f_n\}$ 度量收敛于 f, 因而必有子序列(不妨设为 $\{f_n\}$ 本身)关于 g 几乎处处收敛于 f, 由 Fatou 引理立即得到

$$\int_e f d\mu_g\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_e f_n d\mu_g\leqslant\varepsilon. \tag{4.25}$$

这说明非负 g-可测函数 f 在 e 上可积, 并且积分值不超过 ε. 记 $E_0=\{x\,|\,\mu_g(\{x\})\geqslant\delta\}$, $E_1=E-E_0$, 由于 $\mu_g(E)<\infty$, 所以 E_0 是有限集, 而且对每个 $x_0\in E_0$, $f_n(x_0)\to f(x_0)$, 从而 f 在 E_0 上 g-可积. 由于 $\mu_g(E_1)<\infty$, 所以总可以把 E_1 分割成有限个 g-测度不超过 δ 的部分, 在每个部分上 f 是 g-可积的, 从而 f 在 E_1 上 g-可积, 因此 f 在 $E=E_1\cup E_0$ 上 g-可积. 易见 $\{f_n, f\}$ 在 E 上的积分是等度全连续的.

因为对任何 $\varepsilon>0$, 总有

$$\left|\int_E (f-f_n)d\mu_g\right| \leqslant \int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)} |f-f_n| d\mu_g + \sigma\mu_g(E). \qquad (4.26)$$

由$\{f_n, f\}$的积分等度全连续性知道必存在 $\delta'>0$, 当 $e\subset E, \mu_g(e)<\delta'$ 时, 有

$$\int_e f_n d\mu_g < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_e f d\mu_g < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对于上面的 ε, 可取(4.26)中的$\sigma=\dfrac{\varepsilon}{3(\mu_g(E)+1)}$. 对取定的 σ, 利用$\{f_n\}$度量收敛于 f, 可知存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时, $\mu_g(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))<\delta'$. 由此, 从(4.26)得到; 当 $n\geqslant N$ 时

$$\left|\int_E (f_n-f)\, d\mu_g\right| < \varepsilon,$$

即$\{f_n\}$可以逐项积分.

必要性(用反证法)　如果不对, 就存在某个 $\varepsilon>0$ 和 $\{f_n\}$ 的一个子序列(为简单起见, 就设为$\{f_n\}$本身), 以及 E 的一列 g-可测子集 $\{e_n\}$, $\mu_g(e_n)\to 0(n\to\infty)$, 但

$$\int_{e_n} f_n d\mu_g \geqslant \varepsilon, \qquad (4.27)$$

根据定理 1 中(2)的证明过程可知, 对度量收敛于 f 的序列$\{f_n\}$, 必存在子序列$\{f_{n_\nu}\}$和 E 的 g-可测子集序列$\{E_\nu\}$, 使得(参见(4.7)、(4.8))

$$E_\nu\subset E, \ \mu_g(E_\nu) < \frac{1}{2^{\nu-1}}, \quad \nu=1, 2, \cdots \qquad (4.7)$$

当 $x\in E-E_\nu$ 时, 对任何 $\nu'\geqslant\nu$,

$$|f_{n_{\nu'}}(x)-f(x)| < \frac{1}{\nu'}. \qquad (4.8)$$

(4.8)式保证了在任何 $E-E_\nu$, 序列$\{f_{n_k}\}$一致收敛. 而(4.7) 保证了 $\mu_g(E_\nu)\to 0(\nu\to\infty)$.

由于 f 是 g-可积的, 所以存在 $\delta>0$, 当 $\mu_g(e)<\delta$ 时

$$\int_e f\, d\mu_g < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.28)$$

取定 δ, 由于 f 是有限函数, $\mu_g(E)<\infty$, 所以必存在充分大的 K, 使得 $\mu_g(E(f>K))<\dfrac{\delta}{2}$. 我们取 ν_0, 使得 $\dfrac{1}{2^{\nu_0-1}}<\dfrac{\delta}{2}$. 显然,

$$E=[(E-E_{\nu_0})\cap E(f\leqslant K)]\cup[(E-E_{\nu_0})\cap E(f>K)]\cup E_{\nu_0}.$$

在(4.28)中, 取 $e=[(E-E_{\nu_0})\cap E(f>K)]\cup E_{\nu_0}$, 由于(4.7)和 K 的取法, 易知 $\mu_g(e)<\delta$. 而在集 $E-e=(E-E_{\nu_0})\cap E(f\leqslant K)$上, 根据(4.8), $\{f_{n_k}\}$一致收敛于 f, 从而

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E-e} f_{n_k} d\mu_g = \int_{E-e} f d\mu_g. \qquad (4.29)$$

但假设 $\int_E f_{n_k}d\mu_g\to\int_E f d\mu_g$, 所以从(4.29)得到 $\int_e f_{n_k}d\mu_g\to\int_e f d\mu_g$. 再从(4.28)知道,必存在 N, 当 $n_k\geqslant N$ 时

$$\int_e f_{n_k}d\mu_g<\frac{3}{4}\varepsilon, \tag{4.30}$$

从而由(4.27)得到对任何 n_k $(k=1, 2, \cdots)$,

$$\int_{e_{n_k}\cap(E-e)} f_{n_k}d\mu_g=\int_{e_{n_k}} f_{n_k}d\mu_g-\int_{e_{n_k}\cap e} f_{n_k}d\mu_g>\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.31}$$

然而由(4.28)知道, 当 $k>\nu_0$ 时, $\{f_{n_k}\}$ 在 $E-e$ 上满足 $|f_{n_k}(x)|\leqslant K+\frac{1}{\nu_0}$, 从而

$$\int_{e_{n_k}\cap(E-e)} f_{n_k}d\mu_g\leqslant\left(K+\frac{1}{\nu_0}\right)\mu_g(e_{n_k}). \tag{4.32}$$

根据反证法假设, 当 $K\to\infty$ 时, $\mu_g(e_{n_k})\to 0$, 而 $\left(K+\frac{1}{\nu_0}\right)$ 是常数, (4.32)将与(4.31)矛盾. 证毕.

我们注意到有下面显然的引理.

引理 设 $\mathfrak{M}$ 是 E 上一族 g-可积函数, 则 $\mathfrak{M}$ 的积分为(关于 g)等度全连续的充要条件是 $|\mathfrak{M}|=\{|h|\,|h\in\mathfrak{M}\}$ 也是 E 上(关于 g)等度全连续的.

由定理5立即可以给出一个逐项积分的充分性条件.

定理6 (Vitali) 设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列 g-可积函数, $\mu_g(E)<\infty$, $\{f_n\}$ 度量收敛于 f, 如果序列 $\{f_n\}$ 的积分在 E 上(关于 g)等度全连续, 那末 f 在 E 上必是 g-可积的, 并且可以逐项积分.

5. 外测度

外测度是测度和积分中常见的一个概念.

定义 设 E 是 $(-\infty, \infty)$ 上任何一个点集, $\{I_i\}$ 是一列有限区间. 如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i\supset E$, 称 $\{I_i\}$ 为 E 的一个可列覆盖. 设 g 是 $(-\infty, \infty)$ 上单调增加右连续函数, E 为 $(-\infty, \infty)$ 上子集, 称

$$\mu_g^*(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}g(I_i)\,\Big|\,\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\supset E\right\} \tag{4.33}$$

(或记为 $\mu_g^*(E)=\inf\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i\supset E}\sum\limits_{i=1}^{\infty}g(I_i)$)为 E 的(关于 g)勒贝格-斯蒂阶外测度, 简称为 g-外测度, 特别, 当 $g(x)=x$ 时, 称 $\mu_x^*(E)$ 为 E 的勒贝格外测度, 它常记为 $m^*(E)$.)

首先提请读者注意两点:

(1) 因为直线上任何集 E, 总能被 $\{(-n, n)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 覆盖, 所对任何 E, 至少存在一个覆盖 $\{I_i\}$, 因而 μ_g^* 是对直线上一切集 E 有定义的. 当然, $\mu_g^*(E)$ 的值可能是无限大.

(2) 从定义知, 只要直线上给定了单调增加右连续函数 g, 并对每个区间 I 规定了 $g(I)$ 的意义之后, 就能对直线上一切子集 E, 引入 g-外测度. 换言之, 从原则上讲, 并不需要先自 g 建立好完整的 μ_g 测度理论之后, 才可引入 g-外测度, 即 g-外测度概念的引入可以不依赖于 μ_g 测度. 相反地, 可以由 g-外测度建立 g-测度的理论(当然是和我们的 g-测度理论是等价的).

下面是 g-外测度的基本性质.

定理 7 (1) (非负性) 对任何 E, $\mu_g^*(E)\geqslant 0$;

(2) $\mu_g^*(\phi)=0$;

(3)(单调性) 当 $E_1\subset E_2$ 时, $\mu_g^*(E_1)\leqslant\mu_g^*(E_2)$;

(4) (次可列可加性) 对任一列集 $\{E_i\}$,

$$\mu_g^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g^*(E_i);$$

(5) 对任何区间 I, $\mu_g^*(I)=g(I)$[注]; 对任何一列互不相交的区间 $\{I_i\}$,

$$\mu_g^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i)=\sum_{i=1}^{\infty}g(I_i);$$

(6) 对任何 E,

$$\mu_g^*(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}g(I_i')\,\middle|\,\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i'\supset E, \text{每个 } I_i' \text{ 是有限开区间}\right\}, \tag{4.34}$$

$$\mu_g^*(E)=\inf\{\mu_g(O)\,|\,O\supset E,\ O \text{ 是开集}\}. \tag{4.35}$$

(7) μ_g^* 外测度是零的集 B 必是 g-可测集, 并且 $\mu_g(B)=0$.

证 (1)~(3)是显然的, 下面证(4)~(7).

(4) 如果 $\mu_g^*(E_i)$ $(i=1, 2, \cdots)$ 中有一个为无限大, 那末(4)显然成立. 因此不妨设每个 $\mu_g^*(E_i)<\infty$. 因而对任何 $\varepsilon>0$, 必有 $\{I_j^{(i)}\}$, 使得 $E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j^{(i)}$, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty}g(I_j^{(i)})<\mu_g^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i},\ i=1, 2, \cdots.$$

显然 $\bigcup_{i,j}I_j^{(i)}\supset E$, 因此 $\{I_j^{(i)}\}$ $(i, j=1, 2, \cdots)$ 是集 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 的覆盖, 所以

$$\mu_g^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\leqslant\sum_{i,j}g(I_j^{(i)})=\sum_i\sum_j g(I_j^{(i)})\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu_g^*(E_i)+\varepsilon. \tag{4.36}$$

[注] 当 I 是无限区间时, 任取一列单调增加的有限区间 $\{I_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=I$, 规定 $g(I)=\lim\limits_{n\to\infty}g(I_n)$.

再令 $\varepsilon\to 0$，由此得到 μ_g^* 的次可列可加性.

(5) 先证明 $\mu_g^*(I)\leqslant g(I)$. 当 I 是有限区间时，取 $I_1=I$，$I_i=\emptyset$ $(i=2, 3, \cdots)$. 显然 $\{I_i\}$是 I 的覆盖，因此

$$\mu_g^*(I)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}g(I_i)=g(I). \tag{4.37}$$

如果 I 是无限区间，而 $g(I)=\infty$ 时，显然(4.37)已成立. 所以不妨设 $g(I)<\infty$，如果 $I=(a, \infty)$，那末取 $I_0=(a, a+1]$，$I_i=(a+i, a+i+1]$ $(i=1, 2, \cdots)$，$\{I_i\}$就是 I 的覆盖，并且

$$\mu_g^*(I)\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}g(I_i)=\lim_{k\to\infty}g((a, a+k])=g(I),$$

即(4.37)也成立.

现在再证明

$$g(I)\leqslant\mu_g^*(I). \tag{4.38}$$

当 $\mu_g^*(I)=\infty$ 时，上式显然成立，因此，不妨在 $\mu_g^*(I)<\infty$ 的情况下证明(4.38)成立.

设$\{I_i\}$是 I 的任一可列覆盖. 任给 $\varepsilon>0$，对每个 I_i，显然存在开区间 $I_i'\supset I_i$，使得

$$g(I_i')<g(I_i)+\frac{\varepsilon}{2^{i+n}}. \tag{4.39}$$

又设 I' 是 I 内的任何一个闭区间，因此 $\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i'\supset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\supset I'$. 由 Borel 覆盖定理知道存在有限个 I_1'、…、I_k'，使得 $\bigcup_{i=1}^{k}I_i'\supset I'$. 容易直接算出

$$g(I')\leqslant\sum_{i=1}^{k}g(I_i'), \tag{4.40}$$

特别取$\{I_i\}$，使得 $\sum_{i=1}^{\infty}g(I_i)<\mu_g^*(I)+\frac{\varepsilon}{2}$. 由此得到

$$\begin{aligned}g(I')&\leqslant\sum_{i=1}^{k}g(I_i')\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}g(I_i')\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}g(I_i)+\frac{\varepsilon}{2}<\mu_g^*(I)+\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，得到对任何闭区间 $I'\subset I$，

$$g(I')\leqslant\mu_g^*(I).$$

再令 $I'\to I$，由 $g(I)=\sup_{I'\subset I}g(I')$ 得到

$$g(I)\leqslant\mu_g^*(I).$$

为了证明(5)中一列互不相交区间$\{I_i\}$情况下的等式，首先指出，容易仿上面的方法证明：对任何有限个互不相交的区间 I_1、…、I_k，下式成立

$$\mu_g^*(\bigcup_{i=1}^k I_i)=\sum_{i=1}^k g(I_i). \tag{4.41}$$

设 $\{I_i\}$ 是一列互不相交的区间，由 μ_g^* 的次可列可加性以及 $g(I_i)=\mu_g^*(I_i)$ 得到

$$\mu_g^*(\bigcup_{i=1}^\infty I_i)\leqslant\sum_{i=1}^\infty \mu_g^*(I_i)=\sum_{i=1}^\infty g(I_i). \tag{4.42}$$

显然，剩下仅需证明 $\mu_g^*(\bigcup_{i=1}^\infty I_i)\geqslant\sum_{i=1}^\infty g(I_i)$. 由于 $\bigcup_{i=1}^\infty I_i\supset\bigcup_{i=1}^k I_i$ 对任何自然数 k 成立，由 μ_g^* 的单调性和(4.42)又立即得到

$$\mu_g^*(\bigcup_{i=1}^\infty I_i)\geqslant\mu_g^*(\bigcup_{i=1}^k I_i)=\sum_{i=1}^k g(I_i),$$

再令 $k\to\infty$，立即得到 $\mu_g^*(\bigcup_{i=1}^\infty I_i)\geqslant\sum_{i=1}^\infty g(I_i)$.

(6) 由于开集 O 有分解 $O=\bigcup_{i=1}^\infty I_i$[注]，其中 I_i 是 O 的构成区间，并且 $\mu_g(O)=\sum_{i=1}^\infty \mu_g(I_i)$. 因此，一切能覆盖 E 的开集所成的集，就是能覆盖 E 的一列互不相交开区间的全体，它显然是能覆盖 E 的一列开区间的全体的子集，而能覆盖 E 的一列开区间的全体，又是能覆盖 E 的一列区间的全体的子集. 因而

$$\begin{aligned}\mu_g^*(E)&=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty g(I_i)\,\Big|\,\bigcup_{i=1}^\infty I_i\supset E,\ \text{每个 } I_i \text{ 是区间}\right\}\\&\leqslant\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty g(I_i')\,\Big|\,\bigcup_{i=1}^\infty I_i'\supset E,\ \text{每个 } I_i' \text{ 是开区间}\right\}\\&\leqslant\inf\{\mu_g(O)\,|\,O\supset E,\ O\text{是开集}\}.\end{aligned} \tag{4.43}$$

由此可知，要证明(4.34)，(4.35)，仅需再证明

$$\mu_g^*(E)\geqslant\inf\{\mu_g(O)\,|\,O\supset E,\ O\text{ 是开集}\}. \tag{4.44}$$

当 $\mu_g^*(E)=\infty$ 时，(4.44)显然成立，因此不妨设 $\mu_g^*(E)<\infty$. 对任何 $\varepsilon>0$，按 $\mu_g^*(E)$ 的定义，必存在一列区间 $\{I_i\}$，使得 $\bigcup_{i=1}^\infty I_i\supset E$，并且 $\sum_{i=1}^\infty g(I_i)<\mu_g^*(E)+\frac{\varepsilon}{2}$. 如(5)中所证明，对每个 I_i，存在开区间 $I_i'\supset I_i$，使得 $O=\bigcup_{i=1}^\infty I_i'\supset E$，并且(4.39)成立，从而

$$\mu_g(O)\leqslant\sum_{i=1}^\infty g(I_i')<\sum_{i=1}^\infty g(I_i)+\frac{\varepsilon}{2}<\mu_g^*(E)+\varepsilon. \tag{4.45}$$

由(4.45)立即得到(4.44).

(7) 当 $\mu_g^*(B)=0$ 时，由定义可知 B 必是 g-零集. 从而 $\mu_g(B)=0$.

[注] 这里，$\{I_i\}$ 可能是有限集，即存在 i_0，当 $i\geqslant i_0$ 时 $I_i=\emptyset$.

证毕.

一个集是否是 g-可测也可以用外测度来判别, 常见的判断方法如下:

定理 8 $E\in \boldsymbol{L}_g$ 的充要条件是下面(1)~(4)中的任何一个成立,

(1) 对任何 $\varepsilon>0$, 存在开集 $O\supset E$, 使得 $\mu_g^*(O-E)<\varepsilon$.

(2) 对任何 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $F\subset E$, 使得 $\mu_g^*(E-F)<\varepsilon$.

(3) 对任何 $\varepsilon>0$, 存在开集 O, 闭集 F, 使得 $F\subset E\subset O$, 而且 $\mu_g^*(O-F)=\mu_g(O-F)<\varepsilon$.

(4) (Carathéodory(卡拉提屋独利)条件)对直线上任何集 H, 成立着

$$\mu_g^*(H)=\mu_g^*(H\cap E)+\mu_g^*(H-E). \tag{4.46}$$

证明 其实(3)就是本章§3的定理2. 利用(3)以及外测度的单调性, 容易证明(1)、(2)的必要性.

要证(1)是充分的. 事实上, 取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$, 存在 $O_n\supset E$, $\mu_g^*(O_n-E)<\frac{1}{n}$. 于是集 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n\supset E$, 又由外测度的单调性, 易知 $\mu_g^*(G-E)\leqslant\mu_g^*(O_n-E)<\frac{1}{n}$. 再令 $n\to\infty$, 便得到 $G-E$ 是 μ_g^*-零集(即知为 g-可测集). 从而 $E=G-(G-E)$ 是 g-可测集.

类似地可以证明(2)也是充分的.

(4) 充分性 取两列数 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$,

$$\cdots<\alpha_n<\alpha_{n-1}<\cdots<\alpha_1<0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_n<\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=-\infty,\ \lim_{n\to\infty}\beta_n=+\infty,$$

并且 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 都是 g 的连续点. 记 $E_n=E\cap(\alpha_n, \beta_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$, 显然对每个 n, $\mu_g^*(E_n)<\infty$.

先证 E_n 是可测的.

按 g-外测度定义, 对任何 $\varepsilon>0$, 必存在开集 $O_n\supset E_n$, 并且不妨设 $O_n\subset(\alpha_n, \beta_n)$, 使得

$$\mu_g(O_n)<\mu_g^*(E_n)+\varepsilon. \tag{4.47}$$

特别取(4.46)中 H 为 O_n 时, (4.46)变成

$$\begin{aligned}\mu_g(O_n)=\mu_g^*(O_n)&=\mu_g^*(O_n\cap E)+\mu_g^*(O_n-E)\\&=\mu_g^*(O_n\cap E_n)+\mu_g^*(O_n-E_n),\end{aligned} \tag{4.48}$$

由(4.48)和(4.47)立即得到

$$\begin{aligned}\mu_g^*(O_n-E_n)&=\mu_g(O_n)-\mu_g^*(O_n\cap E_n)\\&=\mu_g(O_n)-\mu_g^*(E_n)<\varepsilon.\end{aligned}$$

根据(1), 上式说明 E_n 是 g-可测集.

因此，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 也是 g-可测集.

必要性　因为 $H=(H\cap E)\cup(H-E)$，从外测度的次可加性，知道

$$\mu_g^*(H)\leqslant\mu_g^*(H\cap E)+\mu_g^*(H-E)$$

对任何 H、E 总是成立. 因此，只要证明在 E 是 g-可测的情况下，对任何 H，

$$\mu_g^*(H)\geqslant\mu_g^*(H\cap E)+\mu_g^*(H-E) \tag{4.49}$$

成立即可. 而当 $\mu_g^*(H)=\infty$ 时，显然(4.49)成立. 所以不妨在设 $\mu_g^*(H)<\infty$ 的情况下证明(4.49)成立. 由于 $E\in\boldsymbol{L}_g$，从而 $E^c\in\boldsymbol{L}_g$. 根据(1)，对任何 $\varepsilon>0$，存在开集 $O_1\supset E$，$O_2\supset E^c$，从而 $O_1\cup O_2\supset(-\infty,\ \infty)$，使得

$$\mu_g(O_1-E)<\frac{\varepsilon}{4},\ \mu_g(O_2-E^c)<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.50}$$

由于 $O_1\cap O_2\subset(O_1-E)\cup(O_2-E^c)$，所以

$$\mu_g(O_1\cap O_2)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.51}$$

对给定的 H，由于 $\mu_g^*(H)<\infty$，所以对任何 $\varepsilon>0$，存在开集 $O\supset H$，使得

$$\mu_g(O)<\mu_g^*(H)+\frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.52}$$

从而由(4.51)，

$$\begin{aligned}\mu_g^*(H)&>\mu_g(O)-\frac{\varepsilon}{2}=\mu_g(O\cap(O_1\cup O_2))-\frac{\varepsilon}{2}\\&=\mu_g(O\cap O_1)+\mu_g(O\cap O_2)-\mu_g(O\cap O_1\cap O_2)-\frac{\varepsilon}{2}\\&>\mu_g^*(H\cap E)+\mu_g^*(H\cap E^c)-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\\&=\mu_g^*(H\cap E)+\mu_g^*(H-E)-\varepsilon,\end{aligned}$$

再令 $\varepsilon\to0$，立即得到(4.49). 证毕.

从原则上讲，定理8中条件(1)～(4)的任何一个都可作为 g-可测集的定义，其中(4)称为卡拉提屋独利条件，在一般测度论中常用它作为可测集的定义. 而对于直线上的勒贝格测度，通常书中是采用由(3)变形得来的条件作为可测集的定义，即除了引入集的外测度外，再引入集 E 的内测度(它是包含在集 E 中一切有界闭集的"测度"的上确界)，然后，当集 E 的内外测度相等时，规定 E 为可测集. 这可参看纳唐松的《实变函数论》一书.

习　题

1. 设序列$\{f_n\}$既度量收敛于 f，又度量收敛于 h，那末 f、h 必几乎处处相等.

2. 设$\{f_n\}$是g-可测集E上一列g-可测函数, f是E上的有限函数.如果对任何$\sigma>0$, $E(|f_n-f|\geqslant\sigma)$是可测集,并且

$$\lim_{n\to\infty}\mu_g(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))=0,$$

证明f必是E上g-可测函数.

3. 设$\{f_n\}$是E上g-可测函数列,并且是度量基本的,证明必存在E上g-可测函数f,使得$\{f_n\}$度量收敛于f.

4. 设$\mu_g(E)<\infty$, $\{f_n\}$、$\{h_n\}$都是E上g-可测函数列,而且分别度量收敛于f、h. 证明:

(I) 对任何数α、β,序列$\{\alpha f_n+\beta h_n\}$度量收敛于$\alpha f+\beta h$;

(II) $\{f_nh_n\}$度量收敛于fh.

并举例说明对于$\mu_g(E)=\infty$的g-可测集E,上述(II)不成立.

5. 设$\{f_n\}$是E上一列g-可测函数,并且度量收敛于f. 证明:对任何$p>0$,必有

(I) $\{|f_n|^p\}$度量收敛于$|f|^p$;

(II) 设h是E上任何g-可测函数,那末$\{|f_n-h|^p\}$必度量收敛于$|f-h|^p$.

6. 设$\mathfrak{M}_1$、$\mathfrak{M}_2$是E上两族g-可积函数,证明$\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$在$E$上的积分等度全连续的充要条件是$\mathfrak{M}_1$、$\mathfrak{M}_2$在$E$上都是积分等度全连续的.

7. 设$\mathfrak{M}$是E上一族g-可积函数,令$|\mathfrak{M}|=\{|f|\,|f\in\mathfrak{M}\}$. 证明$\mathfrak{M}$在$E$上积分等度全连续的充要条件是$|\mathfrak{M}|$在$E$上积分等度全连续.

8. 试举一列$[a, b]$上g-可测函数$\{f_n\}$,满足下列条件:

(i) $\{f_n\}$在$[a, b]$上度量收敛于某个函数f;

(ii) 对任何$x\in[a, b]$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dg=\int_a^x f(t)\,dg,$$

但$\{f_n\}$在E上积分并不是等度全连续的.

9. 证明定理6.

10. 设g是$(-\infty, \infty)$上单调增加右连续函数. 对于开集$O=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu, b_\nu)$,其中$(a_\nu, b_\nu)$是$O$的构成区间,直接规定$g(O)=\sum_\nu g((a_\nu, b_\nu))$;而对有界闭集$F\subset(-M, M)$,规定$g(F)=2M-g((-M, M)-F)$; 对一般闭集$F$,规定

$$g(F)=\lim_{n\to\infty}g(F\cap[-n, n]).$$

然后,对直线上任何子集E,分别引入外测度μ_g^*,内测度μ_{g*}:

$$\mu_g^*(E)=\inf\{g(O)\mid O\supset E,\ O\text{ 是开集}\},$$
$$\mu_{g*}(E)=\sup\{g(F)\mid F\subset E,\ F\text{ 是闭集}\}.$$

证明：(i) $g(F)$ 的值不依赖于包含 F 的区间 $(-M, M)$ 的选取；(ii) $L_g=\{E\mid \mu_g^*(E)=\mu_{g*}(E)\}$.

§5　积分和微分

在黎曼积分中，计算黎曼积分的重要公式之一就是牛顿-莱布尼兹公式

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt,\tag{5.1}$$

其中 F 是 f 的一个原函数. 在那里，通常假定 f 是连续的，并且 $F'(t)=f(t)$. 在这一节中，我们将用勒贝格-斯蒂阶积分观念讨论类似的问题，即在怎样的条件下，在勒贝格-斯蒂阶积分中成立类似的公式，并且给出类似黎曼积分中的分部积分的定理，这些在具体应用中都是经常需要的.

1. 全连续函数

先从勒贝格积分谈起. 假设 f 是勒贝格可积函数，积分是勒贝格积分，现在问什么样的函数 F 能使

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\,dt,\ x\in(a, b],\tag{5.2}$$

成立？即怎样的 $[a, b]$ 上函数 F 能够写成 $[a, b]$ 上一个勒贝格可积函数 f 的不定积分形式.

如果 F 仅仅是 $[a, b]$ 上连续函数(甚至是连续的有界变差函数)也不能做到(5.2)成立. 事实上，由于勒贝格可积函数 f 以

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt\tag{5.3}$$

产生的 $[a, b]$ 上函数 Φ 比一般的连续函数有着更强的连续性. 为了说明这一点，我们引入

定义　设 F 是 $[a, b]$ 上有限实函数，如果对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，只要任何有限个互不相交的区间 $\{(a_\nu, b_\nu),\ \nu=1, 2, \cdots,$

$k\}$满足 $\sum_{\nu=1}^{k}(b_\nu - a_\nu) < \delta$ 时，必有

$$\sum_{\nu=1}^{k}|F(b_\nu) - F(a_\nu)| < \varepsilon, \tag{5.4}$$

就称 F 是$[a, b]$上全连续函数.

利用积分的全连续性，易知$[a, b]$上任何勒贝格可积函数 f 按(5.3)产生的 Φ 必是$[a, b]$上全连续函数. 事实上，对任何 $\varepsilon>0$，由积分的全连续性，必存在 $\delta>0$，只要勒贝格可测集 $e\subset[a, b]$，并且 $m(e)<\delta$ 时，必有

$$\int_e |f(t)|dt < \varepsilon. \tag{5.5}$$

特别，取 $e=\bigcup_{\nu=1}^{k}(a_\nu, b_\nu)$时，由(5.5)立即得到

$$\sum_{\nu=1}^{k}|\Phi(b_\nu) - \Phi(a_\nu)| = \sum_{\nu=1}^{k}\left|\int_{a_\nu}^{b_\nu} f(t)dt\right| \leqslant \int_{\bigcup_{\nu=1}^{k}(a_\nu, b_\nu)} |f(t)|dt < \varepsilon,$$

因此，Φ 是$[a, b]$上连续函数.

显然，全连续函数必是 $[a, b]$ 上连续函数. $[a, b]$ 上满足 Lipschitz 条件，即存在常数 M，使得

$$|F(x) - F(x')| \leqslant M|x - x'|, \ x, x'\in[a, b], \tag{5.6}$$

成立的函数 F 必是全连续函数.

关于全连续函数，有如下基本性质：

定理 1 (1) $[a, b]$上全连续函数必是 $[a, b]$上连续函数.

(2) $[a, b]$上全连续函数的线性组合仍是全连续函数.

(3) $[a, b]$ 上全连续函数必是有界变差函数，并且全变差函数也是全连续函数. 反之，如果一个有界变差函数的全变差函数全连续，那末函数本身以及正变差函数、负变差函数必都是全连续函数.

(4) F 是$[a, b]$上全连续函数的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当任何一列互不相交的区间$\{(a_\nu, b_\nu), \nu=1, 2, \cdots\}$满

足 $\sum_{\nu=1}^{\infty}(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时，必有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|F(b_\nu)-F(a_\nu)|<\varepsilon.$$

(5) F 是$[a, b]$上全连续函数的充要条件是由 $\bigvee_a^x(F)$ 产生的$[a, b]$上勒贝格–斯蒂阶测度具有如下性质：任何 m–零集 B 必是 $\bigvee_a^x(F)$–零集.

(6) F 是$[a, b]$ 上全连续函数的充要条件是存在$[a, b]$上勒贝格可积函数 f，使得

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\,dt. \tag{5.7}$$

当 F 是全连续时

$$\frac{dF}{dt}\underset{m}{\doteq}f. \tag{5.8}$$

(7) 设 F、G 是$[a, b]$上两个全连续函数，那末

$$\int_a^b FG'\,dt=F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b GF'\,dt. \tag{5.9}$$

证明　由定义知道，(1)、(2)是显然的.

(3) 对任何 $\varepsilon>0$，由 F 的全连续性，存在 $\delta>0$，当任何有限个互不相交的区间(a_ν, b_ν) $(\nu=1, 2, \cdots, k)$满足 $\sum_{\nu=1}^{k}(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时，

$$\sum_{\nu=1}^{k}|F(b_\nu)-F(a_\nu)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.10}$$

再在每个(a_ν, b_ν)中插入分点 $a_\nu=y_0^{(\nu)}<\cdots<y_{n_\nu}^{(\nu)}=b_\nu$，由全连续性，便有

$$\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_\nu}|F(y_j^{(\nu)})-F(y_{j-1}^{(\nu)})|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.11}$$

当 $\nu\neq\nu'$ 时，(a_ν, b_ν)中分点$\{y_i^{(\nu)}\}$与$(a_{\nu'}, b_{\nu'})$中分点$\{y_i^{(\nu')}\}$是互相独立选取的，因而对上式取上确界等于在每个(a_ν, b_ν)上分别取上确界，从而

$$\sum_{\nu=1}^{k}\bigvee_{a_\nu}^{b_\nu}(F)=\sum_{\nu=1}^{k}\sup_{\{y_i^{(\nu)}\}}\sum_i|F(y_i^{(\nu)})-F(y_{i-1}^{(\nu)})|$$

$$=\sup_{\{y_i^{(\nu)}\}}\sum_{\nu=1}^{k}\sum_i|F(y_i^{(\nu)})-F(y_{i-1}^{(\nu)})|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

这说明 F 在任何长度不超过 δ 的区间上为有界变差(从而 F 在 $[a, b]$ 上有界变差)并且 F 的全变差函数 $\bigvee_a^x(F)$ 也是 $[a, b]$ 上全连续函数. 反之, 由不等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{k}[p(b_\nu)-p(a_\nu)]\leqslant\sum_{\nu=1}^{k}[\bigvee_a^{b_\nu}(F)-\bigvee_a^{a_\nu}(F)],\\
&\sum_{\nu=1}^{k}[n(b_\nu)-n(a_\nu)]\leqslant\sum_{\nu=1}^{k}[\bigvee_a^{b_\nu}(F)-\bigvee_a^{a_\nu}(F)],\\
&\sum_{\nu=1}^{k}|F(b_\nu)-F(a_\nu)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{k}[\bigvee_a^{b_\nu}(F)-\bigvee_a^{a_\nu}(F)],
\end{aligned}\tag{5.12}$$

立即知道, 当全变差函数全连续时, 正变差函数、负变差函数和函数本身都是全连续的.

(4) 充分性是显然的, 因为只要在(5.4)中取 $(a_\nu, b_\nu)=\phi$ $(\nu=k+1, k+2, \cdots)$ 即可.

必要性 由 F 的全连续性, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 任何有限个互不相交的区间 (a_ν, b_ν) $(\nu=1, 2, \cdots, k)$, 当满足 $\sum_{\nu=1}^{k}(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时, 下式成立

$$\sum_{\nu=1}^{k}|F(b_\nu)-F(a_\nu)|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{5.13}$$

今设 $\{(a'_\nu, b'_\nu)\}$ 是任何一列互不相交的区间, 满足 $\sum_{\nu=1}^{\infty}(b'_\nu-a'_\nu)<\delta$. 利用 (5.13) 对有限个 (a'_ν, b'_ν) $(\nu=1, 2, \cdots, k)$ 成立, 然后令(5.13)中 $k\to\infty$, 便得到

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|F(b'_\nu)-F(a'_\nu)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

所以(4)是必要的.

(5) 必要性　由 F 全连续性的假设以及(3)，易知 $\bigvee_a^x(F)$ 是 $[a, b]$ 上全连续函数. 因而对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得任何有限或可列个互不相交区间 $\{(a_\nu, b_\nu)\}$, 只要满足 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时，必有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\bigvee_{a_\nu}^{b_\nu}(F)<\varepsilon. \tag{5.14}$$

设 B 是 m-零集，因而对上述 δ, 必存在开集 $O\supset B$, 并且 $m(O)<\delta$. 记 $O=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu, b_\nu)$ 是 O 的构成区间的分解. 显然，$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(b_\nu-a_\nu)=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}m((a_\nu, b_\nu))=m(O)<\delta$, 从而由(5.4)得到

$$\mu_g(O)=\sum_\nu\mu_g((a_\nu, b_\nu))=\sum_\nu g((a_\nu, b_\nu))<\varepsilon, \tag{5.15}$$

其中 $g(x)=\bigvee_a^x(F)$, 换言之，集 B 具有如下性质：对任何 $\varepsilon>0$, 必存在开集 $O\supset B$, 使得 $\mu_g(O)<\varepsilon$, 即 B 是 g-零集.

充分性　根据(3)，我们只要证明 $g(x)=\bigvee_a^x(F)$ 为全连续即可. 换言之，只要证明：如果 $[a, b]$ 上任何 m-零集必是 g-零集，那末 g 必是 $[a, b]$ 上全连续函数.

假如不对，就存在某个 $\varepsilon>0$, 对 $\delta=\frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, \cdots)$, 总存在有限个互不相交的区间 $(a_\nu^{(n)}, b_\nu^{(n)})$ $(\nu=1, 2, \cdots, i_n)$, 使得 $\sum\limits_{\nu=1}^{i_n}(b_\nu^{(n)}-a_\nu^{(n)})<\frac{1}{2^n}$, 但

$$\sum_{\nu=1}^{i_n}(g(b_\nu^{(n)})-g(a_\nu^{(n)}))\geqslant\varepsilon. \tag{5.16}$$

记 $E_n=\bigcup\limits_{\nu=1}^{i_n}(a_\nu^{(n)}, b_\nu^{(n)})$, 由于 $m(E_n)=\sum\limits_{\nu=1}^{i_n}(b_\nu^{(n)}-a_\nu^{(n)})<\frac{1}{2^n}$, 所以

$$m(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n)=0. \tag{5.17}$$

另一方面，由(5.16)易知

$$\mu_g(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_g(E_n)\geqslant\varepsilon. \tag{5.18}$$

显然，集 $B=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$ 不能同时适合 (5.17) 和 (5.18) 的，所以 (5) 是充分的.

关于 (6)，我们将在下一节中证明更一般的结果.

(7) 利用 (6) 很快可以得到 (7). 事实上，因为 FG 是 $[a, b]$ 上全连续函数，对它应用 (6) 的 (5.7)、(5.8)，并取 (5.7) 中上限 $x=b$，立即得到

$$F(b)G(b)-F(a)G(a)=\int_a^b FG'\,dt+\int_a^b GF'\,dt,$$

即 (5.9) 成立. 证毕.

2. 测度的全连续性

本小节中，将在更一般的意义下证明定理 1 的 (6). 为此引入：

定义 设 g_1、g_2 是 $(-\infty, \infty)$ 上两个单调增加右连续函数，μ_{g_1}、μ_{g_2} 分别是由 g_1、g_2 导出的勒贝格–斯蒂阶测度，如果任何 g_2–零集 B 必是 g_1–零集，称 μ_{g_1} 关于 μ_{g_2} 全连续，记为 $\mu_{g_1}\ll\mu_{g_2}$.

显然，一个测度关于另一个测度是全连续的概念，是第一小节中全连续函数（实际上是关于勒贝格测度全连续）概念的一般化.

定理 2 (Radon–Nikodym) 设 $\mu_{g_1}\ll\mu_{g_2}$，必存在 g_2–可测函数 f，使得对任何 $E\in \boldsymbol{L}_{g_2}$，

$$\mu_{g_1}(E)=\int_E f\,d\mu_{g_2}\text{[注]}. \tag{5.19}$$

并且，适合 (5.19) 的一切 f 关于 μ_{g_2} 必是彼此几乎处处相等.

证明 （初学者可暂不看这个证明，而看第三小节中定理 6 后的证明）分五步来证明上述定理.

(1) 因为 $\boldsymbol{L}_{g_2}$ 中任何集 E 有分解：$E=F\cup E_0$，其中 $F\cap E_0=\emptyset$，F 是 F_σ 型集（从而是 Borel 可测集），而 E_0 是 g_2–零集，由假设 $\mu_{g_1}(E_0)=0$，由此可知 $E\in\boldsymbol{L}_{g_1}$，即 $\boldsymbol{L}_{g_2}\subset\boldsymbol{L}_{g_1}$.

(2) 由于总可以做到 $(-\infty, \infty)=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}(\alpha_n, \alpha_{n+1}]$，其中 α_n 是 g_1、g_2 的连续点，且 $\alpha_n<\alpha_{n+1}$，因而我们只要在 E 含于有限区间

[注] 这里，积分值是允许取无限大的. 参见第二章 §3 附录中的第七小节.

$(\alpha, \beta]$（α、β 取为 g_1、g_2 的公共连续点）的情况下，证明适合(5.19)的 f 存在即可.

记 Φ 为一切非负的 g_2-可测函数中满足以下条件的 f 全体：对任何 $E\in \boldsymbol{L}_{g_1}\cap(\alpha, \beta]$,

$$\int_E f\, d\mu_{g_2} \leqslant \mu_{g_1}(E). \tag{5.20}$$

显然，$\Phi\neq\emptyset$，并且对 $f\in\Phi$,

$$\int_{(\alpha,\beta]} f\, d\mu_{g_2} \leqslant \mu_{g_1}((\alpha, \beta]) < \infty. \tag{5.21}$$

在 Φ 中任取一列$\{f_n\}$，使得

$$\int_{(\alpha,\beta]} f_n\, d\mu_{g_2} \to r = \sup\left\{\int_{(\alpha,\beta]} f\, d\mu_{g_2} \,\middle|\, f\in\Phi\right\}. \tag{5.22}$$

记 $f_0=\sup\limits_n f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\max(f_1, \cdots, f_n)$. 今证 $f_0\in\Phi$.

记 A_1、$\cdots$、A_m 分别是 f_1、$\cdots$、f_m取为最大值的点集，如果在点 x，有多个函数同时取最大值，将 x 放入下标最小的集中，这样，显然有 $A_i\cap A_j=\emptyset(i\neq j)$，且 $(\alpha, \beta]=\bigcup\limits_{i=1}^m A_i$. 因此，对任何 $E\in \boldsymbol{L}_{g_2}\cap(\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned}&\int_E \max(f_1, \cdots, f_m)\, d\mu_{g_2}\\ &=\sum_{i=1}^m \int_{E\cap A_i} f_i\, d\mu_{g_2} \leqslant \sum_{i=1}^m \mu_{g_1}(E\cap A_i) \leqslant \mu_{g_1}(E),\end{aligned}$$

即 $\max(f_1, \cdots, f_m)\in\Phi$. 由于 $f_0=\lim\limits_{n\to\infty}\max(f_1, \cdots, f_n)$，由 Levi 引理，容易知道 $f_0\in\Phi$.

(3) 今证 f_0 就能使得(5.19)对一切 $E\in \boldsymbol{L}_{g_1}\cap(\alpha, \beta]$成立：首先注意由(5.22)立即得到

$$\int_{(\alpha,\beta]} f_0\, d\mu_{g_2} = r. \tag{5.23}$$

如果 f_0 不满足(5.19)，那末必存在 $E_0\in \boldsymbol{L}_{g_1}\cap(\alpha, \beta]$，使得

$$\mu_{g_1}(E_0) - \int_{E_0} f_0\, d\mu_{g_2} > 0. \tag{5.24}$$

显然，由 $\mu_{g_1}\ll\mu_{g_2}$ 的假设，从 (5.24) 知道必有 $\mu_{g_1}(E_0)>0$. 记 $\mu_{f_0}(E)=\int_E f_0 d\mu_{g_2}$, 显然它是 $\boldsymbol{L}_{g_2}\cap(\alpha,\beta]$ 上的测度. 由(5.24)可知，取某个充分大的自然数 n, 能使符号测度(即在 $\boldsymbol{L}_{g_2}\cap(\alpha,\beta]$ 上可列可加，但取值可正、可负) $\mu_{g_1}-\mu_{f_0}-\frac{1}{n}\mu_{g_2}$ 至少在集 E_0 上取正值. 下面分两种情况来讨论.

(i) 如果 $\mu=\mu_{g_1}-\mu_{f_0}-\frac{1}{n}\mu_{g_2}$ 在 E_0 的一切 g_2-可测子集上都是非负的，由此易知 $f_0+\frac{1}{n}\chi_{E_0}$ 必属于 Φ, 但

$$\int_{(\alpha,\beta]}\left(f_0+\frac{1}{n}\chi_{E_0}\right)d\mu_{g_2}=r+\mu_{g_1}(E_0)>r, \tag{5.25}$$

这与 r 是 Φ 中函数的积分值上确界(5.22)相矛盾.

(ii) 一般情况是 μ 在 E_0 上为正值，但也有 E_0 的 g_2-可测子集为负值. 如果我们必能找出 E_0 的 g_2-可测子集 A, 使得 μ 在 A 的一切 g_2-可测子集上为非负，并且 $\mu_{g_2}(A)>0$, 那末就用 A 代替 (i) 中的 E_0 又得到矛盾，从而说明假设 (5.24) 不真，即 f_0 适合 (5.19).

(4) 找出(ii)中所要求的 A. 记

$$\tau=\inf_{E\in E_0\cap L_{g_2}}\mu(E). \tag{5.26}$$

取一列集 $\{A_n\}$, 使得 $\mu(A_n)\to\tau$. 对每个 m, 由 $A_1,\cdots,A_m$ 可以作出 2^m 个互不相交(可能有些是空集)的形为 $\bigcap_{k=1}^{m}B_k$ ($B_k=A_k$ 或 $B_k=E_0-A_k$) 的集 $A_{m,k}$ ($k=1,2,\cdots,2^m$). 记 C_m 为 $\mu(A_{m,k})\leqslant 0$ 的所有 $A_{m,k}$ 的和集. 显然

$$\mu(A_m)\geqslant\mu(C_m). \tag{5.27}$$

另一方面，当 $m'>m$ 时，$A_{m',k'}$ 或者包含在 C_m 中，或者与 C_m 互不相交，从而又有

$$\mu(C_m)\geqslant\mu(C_m\cup C_{m+1}\cup\cdots\cup C_{m+l}). \tag{5.28}$$

由于 μ_{g_1}、μ_{f_0}、μ_{g_2} 可列可加，且在 E_0 上都是有限的. 由(5.28)易

知

$$\mu(C_m)\geqslant\mu(\bigcup_{k=m}^{\infty}C_k).\tag{5.29}$$

记 $C=\lim\limits_{m\to\infty}\bigcup\limits_{k=m}^{\infty}C_k$，由(5.27)、(5.29)，以及 μ_{g_1}、μ_{f_0}、μ_{g_2} 的可列可加性，立即得到

$$\tau=\lim_{m\to\infty}\mu(A_m)\geqslant\varliminf_{m\to\infty}\mu(C_m)\geqslant\lim_{m\to\infty}\mu(\bigcup_{k=m}^{\infty}C_k)=\mu(C),\tag{5.30}$$

因为 τ 是下确界(见(5.26))，所以 $\tau=\mu(C)$. 取 $A=E_0-C$.

今证 A 为所求：事实上，μ 在 $E_0-A=C$ 中一切 g_2-可测子集上取值必为非正. 因为如果再有 $C'\subset C$, $\mu(C')>0$, 那末 $\mu(C-C')<\mu(C)=\tau$, 这将与 τ 是下确界相矛盾，从而 μ 对 A 中一切 g_2-可测集必是非负的. 事实上，如果有 $A'\subset A$, 使得 $\mu(A')<0$, 那末 $\mu(C\cup A')<\mu(C)=\tau$, 这又与 τ 是下确界的定义矛盾. 又显然，$\mu(A)=\mu(E_0)-\mu(C)\geqslant\mu(E_0)>0$.

(5) 最后再证明在关于 μ_{g_2} 几乎处处的意义下，适合(5.19)的 f 是唯一的：事实上，如果有两个 g_2-可测函数 f_1、f_2，使得

$$\int_E f_1\,d\mu_{g_1}=\int_E f_2\,d\mu_{g_2},\qquad E\in L_{g_2},$$

成立，特别取 E 分别为 $E_+=\{x|f_1>f_2\}$，或 $E_-=\{x|f_1<f_2\}$ 时，立即知道 $E_\pm$ 必都是 g_2-零集. 从而 $f_1\underset{\mu_{g_2}}{\doteq}f_2$. 证毕.

(读者如要学习本小节以下内容，最好先看第二章§3第九小节，以及本章§2的第三小节)如果将定理2证明中的第(4)步加以一般化，我们就得到如下的一般测度的 Hahn 分解定理.

定理3 (Hahn)　设 μ 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上任何一个带符号的测度(即 $\boldsymbol{R}$ 上空集取值为零，可列可加，但不取值 $-\infty$ 的函数)，必存在 X 中集 A[注]，使得对任何 $E\in\boldsymbol{R}$，必有 $E\cap A\in\boldsymbol{R}$，并且

$$\mu(E\cap A)\leqslant0,\ \mu(E\cap A^c)\geqslant0.$$

[注]　注意，因为 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-环，未必是 σ-代数，所以这里的 A 并不一定属于 $\boldsymbol{R}$.

利用 Hahn 分解定理，还可以将定理 2 推广到带符号的勒贝格–斯蒂阶测度的情况.

定义 设 μ_{g_1}、μ_{g_2} 分别是 $(-\infty, \infty)$ 上右连续局部有界变差函数 g_1、g_2（负变差有限）产生的带符号的勒贝格–斯蒂阶测度，$|\mu_{g_1}|$、$|\mu_{g_2}|$ 分别是 g_1、g_2 的全变差函数导出的测度. 如果 $|\mu_{g_1}| \ll |\mu_{g_2}|$，称 μ_{g_1} 关于 μ_{g_2} 全连续，仍记为 $\mu_{g_1} \ll \mu_{g_2}$.

显然，当 F 是 $[a, b]$ 上全连续函数时，如果在 $(-\infty, a)$、(b, ∞) 上分别补充规定 F 的值为 $F(a)$，$F(b)$，那末由定理 1 的(3)、(5)可知，这样的 F 产生的 μ_F 必关于 m 全连续.

由 Hahn 分解定理，对 μ_{g_2}，存在 A_2，使得

$$\mu_{g_2}(E \cap A_2) \leqslant 0, \ \mu_{g_2}(E \cap A_2^c) \geqslant 0.$$

我们把 μ_{g_2} 拆成两个测度，即分别限制在 $A \cap \boldsymbol{L}_{g_2}$ 和 $A^c \cap \boldsymbol{L}_{g_2}$ 上，这时，μ_{g_2}、$-\mu_{g_2}$ 分别就可视为 $A_2 \cap \boldsymbol{L}_{g_2}$ 和 $A_2^c \cap \boldsymbol{L}_{g_2}$ 上的普通测度. 同样把 μ_{g_1} 也分别视为 $A_2 \cap \boldsymbol{L}_{g_2}$ 和 $A_2^c \cap \boldsymbol{L}_{g_2}$ 上的测度，由假设，分别在 $A_2 \cap \boldsymbol{L}_{g_2}$ 和 $A_2^c \cap \boldsymbol{L}_{g_2}$ 上，仍有 $|\mu_{g_1}| \ll \pm\mu_{g_2}$，由此可见，在今后讨论中不妨假定 μ_{g_2} 是普通测度，而 μ_{g_1} 可以是带符号的测度. 如果对于 μ_{g_1}，再一次应用 Hahn 分解，即拆成两个普通测度考虑，而每一个都关于 μ_{g_2} 全连续，可以知道定理 2 下面的推广形式是显而易见的.

定理 2′ 设 μ_{g_1}、μ_{g_2} 是两个带符号的勒贝格–斯蒂阶测度. 如果 $\mu_{g_1} \ll \mu_{g_2}$，那末必存在关于 $|\mu_{g_2}|$ 唯一的可测函数 f，使得对任何 $|\mu_{g_2}|$–可测集 E，

$$\mu_{g_1}(E) = \int_E f \, d\mu_{g_2}.$$

下面，先利用这个事实来说明 Hahn 分解就是 Jordan 分解的推广.

当 μ_g 是由 $(-\infty, \infty)$ 上右连续局部有界变差函数 g 产生的带符号的勒贝格–斯蒂阶测度时（假定 g 在 $(-\infty, \infty)$ 上负变差有限，即 μ_g 不取 $-\infty$ 值），记 $|\mu_g|$ 为 g 的全变差函数产生的测度. 显然，$\mu_g \ll |\mu_g|$，并且对任何 E，$|\mu_g(E)| \leqslant |\mu_g|(E)$，因而存在唯

一的 f (关于 $|\mu_g|$ 几乎处处 $\leqslant 1$), 使得对任何 $|\mu_g|$-可测集 E,

$$\mu_g(E)=\int_E f d|\mu_g|.$$

这时, Hahn 分解中集 A 可取为 $\{x|f(x)<0\}$. 记 $f^+=f\chi_{A^c}$, $f^-=-f\chi_A$, 由此引入 $(-\infty, \infty)$ 上两个非负值测度和单调右连续函数

$$\mu_g^+(E)=\int_E f^+ d|\mu_g|,\ \mu_g^-(E)=\int_E -f^- d|\mu_g|,$$

$$p'(x)=\begin{cases}\mu_g^+((0, x]), & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ -\mu_g^+((x, 0]), & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases} \tag{5.31}$$

$$n'(x)=\begin{cases}\mu_g^-((0, x]), & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ -\mu_g^-((x, 0]), & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{5.32}$$

显然, $g(x)-g(0)=p'(x)-n'(x)$, 并且

$$p'(x)+n'(x)$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{(0,x]}(f^++f^-)d|\mu_g|=\int_{(0,x]}|f|d|\mu_g|\leqslant\bigvee_0^x(g), \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ \displaystyle -\int_{(x,0]}(f^++f^-)d|\mu_g|=-\int_{(x,0]}|f|d|\mu_g|\geqslant-\bigvee_x^0(g), \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases} \tag{5.33}$$

另一方面, 显然又有

$$\begin{aligned}&\bigvee_0^x(g)\leqslant n'(x)+p'(x), && \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ &\bigvee_x^0(g)\leqslant-(p'(x)+n'(x)), && \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{aligned} \tag{5.34}$$

由此可知, $p'(x)$, $n'(x)$ 就是 $g(x)$ 以 0 为参考点的 Jordan 分解, 所以 Hahn 分解是 Jordan 分解的推广.

现在回到微分和积分. 由定理 2 或 2′ 中所确定的 f, 称为 μ_{g_1} 关于 μ_{g_2} 的 Radon–Nikodym 导数, 简称为 R–N 导数. 通常记为

$$\frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}}=f.$$

下面是有关 R–N 导数的性质.

系 下列命题成立:

(1) 设 $\mu_{g_1}\ll\mu_g$, $\mu_{g_2}\ll\mu_g$, 那末 $\mu_{g_1}+\mu_{g_2}\ll\mu_g$, 并且

$$\frac{d(\mu_{g_1}+\mu_{g_2})}{d\mu_g} \underset{[\mu_g]}{\doteq} \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}+\frac{d\mu_{g_2}}{d\mu_g}. \tag{5.35}$$

(2) 设 $\mu_{g_1}\ll\mu_g$, k 是 g-可测函数, 那末 k 关于 μ_{g_1} 可积的充要条件是 $k\dfrac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}$ 关于 μ_g 可积. 当可积时, 有

$$\int k\,d\mu_{g_1}=\int k\,\frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}\,d\mu_g. \tag{5.36}$$

(3) 设 $\mu_{g_1}\ll\mu_{g_2}$, $\mu_{g_2}\ll\mu_{g_3}$, 那末 $\mu_{g_1}\ll\mu_{g_3}$, 并且

$$\frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_3}} \underset{[\mu_{g_3}]}{\doteq} \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}}\,\frac{d\mu_{g_2}}{d\mu_{g_3}}. \tag{5.37}$$

证明 (1) 是显然的.

(2) 不妨设 μ_{g_1}、μ_g 都是普通测度(如果它们有的是带符号测度, 可用 Hahn 分解分成正、负变差测度分别可以考虑即可). 因为 $\mu_{g_1}\ll\mu_g$, 由定理 2 证明中的(1), 得 $\boldsymbol{L}_g\subset\boldsymbol{L}_{g_1}$.

当 $k=\chi_A$ 时, 其中 $A\in\boldsymbol{L}_g$, 并且 $\mu_{g_1}(A)<\infty$. 显然, 此时 k、$k\dfrac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}$ 分别关于 μ_{g_1}、μ_g 都可积, 并且积分值是 $\mu_{g_1}(A)$, 即(5.36)成立. 因此, 对任何有限个互不相交的 g-可测集 A_1、$\cdots$、A_n, 如果 $\mu_{g_1}(A_i)<\infty$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 那末对任何数 α_1、$\cdots$、α_n, 函数

$$\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}(x) \tag{5.38}$$

必使(5.36)等式成立.

当 k 是非负的 g-可测函数时, 易知总存在一列形为(5.38)所确定的$\{\psi_n\}$, 使得 $\psi_n\geqslant0$, $\psi_1\leqslant\psi_2\leqslant\cdots\leqslant\psi_n\leqslant\cdots$, 并且在$(-\infty, \infty)$上

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=k(x), \tag{5.39}$$

从而 $0\leqslant\psi_1\dfrac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}\leqslant\psi_2\dfrac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}\leqslant\cdots\leqslant\psi_n\dfrac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}\leqslant\cdots$, 并且在$(-\infty, \infty)$上

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)\,\frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}(x)=k(x)\,\frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}(x). \tag{5.40}$$

因为(5.36)对 ψ_n 成立, 即

$$\int \psi_n d\mu_{g_1} = \int \psi_n \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g} d\mu_g$$

成立. 显然, 当 $n\to\infty$ 时, 上式任何一边趋向有限值时, 另一边也趋向有限值. 由 Levi 引理, 就可知道 k 关于 μ_{g_1} 可积的充要条件是 $k\dfrac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}$ 关于 μ_g 可积. 并且, 当 k 可积时, (5.36)成立.

最后, 对于一般的 k, $k=k^+-k^-$, 其中 $k^+(x)=\max(k(x), 0)$, $k^-(x)=\max(-k(x), 0)$. 而 k 关于 μ_{g_1} 可积的充要条件是 k^+、k^- 均关于 μ_{g_1} 可积, 而 k^+、k^- 是非负的 g-可测函数, 对于 k^+、k^- 已知命题(2)成立, 所以命题(2)对于 k 也成立.

(3) 类似于(2)中理由, 我们不妨假设 μ_{g_1}、μ_{g_2}、μ_{g_3} 均是普通测度. 注意(5.37)左边是 g_3-可测函数, 右边的 $\dfrac{d\mu_{g_2}}{d\mu_{g_3}}$ 是 g_3-可测函数, 而 $\dfrac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}}$ 是 g_2-可测函数. 但由于 $\boldsymbol{L}_{g_3}\subset\boldsymbol{L}_{g_2}(\subset\boldsymbol{L}_{g_1})$, 所以 $\dfrac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}}$ 也是 g_3-可测函数. 因而, 要证明(5.37), 只要证明对任何 $E\in\boldsymbol{L}_{g_3}$, 下式成立即可,

$$\int_E \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_3}} d\mu_{g_3} = \int_E \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}} \frac{d\mu_{g_2}}{d\mu_{g_3}} d\mu_{g_3}. \tag{5.41}$$

事实上, 先取 E 是有界集, 有

$$\int_E \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_3}} d\mu_{g_3} = \mu_{g_1}(E) = \int_E \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}} d\mu_{g_2} = \int \chi_E \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}} d\mu_{g_2},$$

即函数 $k(x)=\chi_E(x)\dfrac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}}(x)$ 关于 μ_{g_2} 可积, 并且是 g_3-可测函数, 由(2)可知

$$\int \chi_E \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_3}} d\mu_{g_3} = \int \chi_E \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}} \frac{d\mu_{g_2}}{d\mu_{g_3}} d\mu_{g_3} = \int_E \frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_{g_2}} \frac{d\mu_{g_2}}{d\mu_{g_3}} d\mu_{g_3},$$

即(5.41)成立.

对于一般的 $E\in\boldsymbol{L}_{g_3}$, 总有 $E=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} E_n$, $E_n=E\cap(n, n+1]$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$. 因为在每个 E_n 上(5.41)成立, 由 Levi 引理知道, (5.41)必在 E 上成立. 证毕.

在勒贝格测度的情况下, R-N 导数和普通的差商导数(即数

学分析中所学的导数)有密切的关系. 下面来讨论这一点.

3. Fubini 逐项求导定理

这里要介绍的是有关单调函数的一个深刻的求导定理. 下面这个深入的定理我们不去证明它了.

定理 4 设 f 是$[a, b]$上单调增加函数,那末 f 关于勒贝格测度必几乎处处有有限导数.

这个定理的证明可以参看纳唐松的《实变函数论》, 陈建功的《实函数论》或夏道行等编《实变函数论与泛函分析》.

由定理 4 以及有界变差函数的 Jordan 分解定理,可以知道任何$[a, b]$上有界变差函数也必关于勒贝格测度几乎处处有有限导数.

定理 5 (Fubini) 设$\{S_n\}$是$[a, b]$上一列单调增加函数,并且级数

$$\sum_n S_n(a),\ \sum_n S_n(b) \tag{5.42}$$

收敛, 那末函数项级数 $\sum_n S_n(x)$ 必收敛于一个单调增加函数 $S(x)$,并且除去一个 m-零集外,成立下式

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} S_n'(x). \tag{5.43}$$

证明 (1) 由于 $S_n(x)$ 是单调增加的, 由(5.32)的收敛性, 易知函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n(x)-S_n(a)) \tag{5.44}$$

在$[a, b]$上处处收敛, 从而 $\sum_n S_n(x)$ 处处收敛. 显然, $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)$ 也是单调增加函数,由定理 4 知存在一个 m-零集 E, 当 $x\bar{\in}E$ 时, $S'(x)$, $S_n'(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 都存在, 而且为有限值. 对任何数 h 以及自然数 k,

$$\begin{aligned}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h}\\&\geqslant\sum_{n=1}^{k}\frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h},\end{aligned}$$

所以当 $x \overline{\in} E$, $h \to 0$ 时

$$S'(x) \geqslant \sum_{n=1}^{k} S_n'(x) \tag{5.45}$$

对任何 k 成立，注意到 $S_n'(x)$ 是非负的，由(5.45)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n'(x)$ 在 $[a, b]-E$ 上处处收敛，且极限不超过 $S'(x)$.

总结上述结果得到：由单调增加函数构成的级数 $\sum\limits_{n} S_n(x)$ 只要在 $[a, b]$ 的两个端点收敛，必存在一个 m-零集 E，当 $x \in [a, b]-E$ 时，一切 $S_n'(x)$ 存在且有限，并且 $\sum\limits_{n} S_n'(x)$ 收敛于有限值.

(2) 由定理 5 的假设，$\sum\limits_{n}(S_n(x)-S_n(a))$ 处处收敛于 $S(x)-S(a)$. 因而对任何 ν，存在 n_ν，使得

$$|(S(b)-S(a))-(\sigma_{n_\nu}(b)-\sigma_{n_\nu}(a))|<\frac{1}{2^\nu},$$

其中 $\sigma_{n_\nu}=\sum\limits_{n=1}^{n_\nu} S_n$. 由此可知，单调增加函数列 $\Phi_\nu(x)=(S(x)-S(a))-(\sigma_{n_\nu}(x)-\sigma_{n_\nu}(a))$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ 中每个函数满足 $\Phi_\nu(a)=0$, $\Phi_\nu(b)<\frac{1}{2^\nu}$.

对于 $\{\Phi_\nu\}$，用已证明的部分(1)中的结论，立即得到除去在一个 m-零集 E 外，

$$\sum_{\nu} \Phi_\nu'(x)<\infty.$$

因而当 $x \in [a, b]-E$ 时，$\lim\limits_{\nu\to\infty} \Phi_\nu'(x)=0$，即 $\lim\limits_{\nu\to\infty}(S'(x)-\sigma_{n_\nu}'(x))=0$. 这说明

$$S'(x)=\lim_{\nu\to\infty} \sum_{n=1}^{n_\nu} S_n'(x). \tag{5.46}$$

注意到 $\sum\limits_{n} S_n'(x)$ 是正项级数，(5.46)就是(5.43). 证毕.

利用定理 4、5，我们来证明下面的定理.

定理 6　设 f 是 $[a, b]$ 上 m-可积函数，那末

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \underset{m}{=} f(x), \tag{5.47}$$

这里“$\frac{d}{dx}$”是普通的差商极限意义下的导数.

证明 当 $f\in C_0$ 类时,它只有有限个间断点,(5.47)显然成立(这是数学分析中已经证明了的). 当 $f\in C_1$ 时,存在$[a, b]$上 C_0 类序列$\{\varphi_n\}$,使得

$$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n \doteq_{m} f \tag{5.48}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n\,dt=\int_a^b f\,dt. \tag{5.49}$$

令 $S_n(x)=\int_a^x(\varphi_n-\varphi_{n-1})dt$, 由(5.38)易知 $S_n(x)$ 是$[a, b]$上单调增加函数,并且 $S_n(a)=0$,而 $S_n(b)=\int_a^b(\varphi_n-\varphi_{n-1})dt$,由(5.39)易知 $\sum S_n(b)$收敛于 $\int_a^b f\,dt-\int_a^b\varphi_1\,dt$. 对于$\{S_n\}$,利用定理5,立即知道存在一个 m-零集 E,当 $x\in[a, b]-E$ 时

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x f\,dt-\varphi_1&=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f\,dt-\int_a^x\varphi_1\,dt\right)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{d}{dx}\int_a^x(\varphi_n-\varphi_{n-1})dt\\&=\sum_{n=2}^{\infty}(\varphi_n-\varphi_{n-1}),\end{aligned}$$

由此得到(5.37)对 $f\in C_1$ 成立.

由于(5.37)对 C_1 类成立,显然,它对一般的 m-可积函数也成立. 证毕.

利用定理 2′ 和定理 6,很容易证明定理 1 中的(6).

定理 1 的(6)的证明 定理 6 就是定理 1 中(6)的充分性, 因此,只要证必要性. 设 F 是$[a, b]$上全连续函数, μ_F 为由 F 产生的带符号的测度. 因为 $\mu_F\ll m$,由定理 2′,存在$\frac{d\mu_F}{dm}$,使得对任何 $E\in\mathbf{L}\cap[a, b]$,

$$\mu_F(E)=\int_E\frac{d\mu_F}{dm}\,dt.$$

特别地，取 $E=[a, x]$，就有

$$F(x)-F(a)=\mu_F([a, x])=\int_a^x \frac{d\mu_F}{dm}dt.$$

根据定理 6，

$$\frac{dF}{dt}\underset{m}{\doteq}\frac{d\mu_F}{dm},$$

即差商导数 $\frac{dF}{dt}$ 与 R-N 导数 $\frac{d\mu_F}{dm}$ 一致（自然是指关于 m 几乎处处相等），即得

$$F(x)-F(a)=\int_a^x \frac{dF}{dt}dt,$$

这就是说，定理 1 的(6)成立。证毕。

下面再给出定理 1 的(6)的另一个直接证明。

定理 1 的(6)的另一个证明 同上述理由，我们只要证明它的必要性。

首先证明$[a, b]$上的任何单调函数（例如单调增加函数）F 的导函数 F' 必是$[a, b]$上勒贝格可积函数。事实上，对任何自然数 n，作$[a, b]$上函数

$$\varphi_n(x)=\frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)}{\frac{1}{n}}$$

$\left(当\ x+\frac{1}{n}>b\ 时，规定\ F\left(x+\frac{1}{n}\right)=F(b)\right)$。显然，

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\underset{m}{\doteq}F'.$$

由于

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi_n(x)dx&=n\int_a^b\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)\right)dx\\&=n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}}F(x)dx-\int_a^{a+\frac{1}{n}}F(x)dx\right)\leqslant F(b)-F(a)\end{aligned}$$

以及 $\varphi_n\underset{m}{\geqslant}0$，根据 Fatou 引理，

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx \leqslant F(b)-F(a). \quad (5.50)$$

因为全连续函数必是有界变差函数，从而必是两个单调增加函数的差，由上面可知 F' 必是勒贝格可积函数。

现在证(5.7)成立：作

$$\Phi(x)=\int_a^x F'(t)\,dt,$$

显然，Φ 是全连续函数，从而 $F-\Phi$ 也是全连续函数，并且

$$(F(x)-\Phi(x))' \underset{m}{\doteq} F'(x)-F'(x)=0. \quad (5.51)$$

如能证明 $F(x)-\Phi(x)$ 必是常数，则有 $F(x)-\Phi(x)=F(a)-\Phi(a)$. 注意到 $\Phi(a)=0$，就可得到 $F(x)-F(a)=\Phi(x)$，即(5.7)成立。

现在证明：一个全连续函数 $\Psi(x)$，如果 $\Psi'(x)\underset{m}{\doteq}0$，那末 $\Psi(x)$ 必是常数。

在 $[a, b]$ 中任取一点 y，因为 $\Psi(x)$ 作为 $[a, y]$ 上的函数是全连续的，所以对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当 $\{(a_i, b_i)\}$ 是互不相交的区间，并且 $\sum\limits_i (b_i-a_i)<\delta$ 时，

$$\sum_i |\Psi(b_i)-\Psi(a_i)|<\varepsilon. \quad (5.52)$$

按假设，存在 $[a, y]$ 中一个 m-零集 E（不妨设 $a, y\in E$），当 $x\in[a, y]-E$ 时，$\Psi'(x)=0$. 因而对任给的 ε，必存在 x 的开区间环境 $O(x)$，当 $x'\in O(x)$ 时，

$$\left|\frac{\Psi(x')-\Psi(x)}{x'-x}\right|<\varepsilon. \quad (5.53)$$

另一方面，由于 $m(E)=0$，所以存在可列个开区间 $\{I_i\}$，使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$，并且

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)<\varepsilon. \quad (5.54)$$

这样，开区间族 $\{I_i, O(x) \mid x\in[a, y]-E, i=1, 2, \cdots\}$ 覆盖 $[a, y]$，因而可以从它们中选出有限个，例如

$$O(x_j)=(\alpha_j,\ \beta_j),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k;$$
$$I_i=(a_i,\ b_i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l,$$

它们的并能覆盖 $[a,\ y]$. 不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_k$, 并且区间集 $\{O(x_j)\}$ 中没有一个是包含在其余的和集中(否则可去掉它). 在这个假设下, 易知在 $[a,\ y]$ 上可以作出分点组

$$a=y_0<y_1<\cdots<y_n=y,$$

使得 (i) $(y_i,\ y_{i+1})$ 包含在 $O(x_j)$ 中, 而 $y_i=x_j$ 或 $y_{i+1}=x_j$; 或者(ii) $(y_i,\ y_{i+1})$ 包含在 I_j 中. 这样, 利用(5.43)、(5.44)便有

$$\begin{aligned}|\Psi(y)-\Psi(a)|&\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|\Psi(y_{i+1})-\Psi(y_i)|\\&=\sum{}'|\Psi(y_{i+1})-\Psi(y_i)|+\sum{}''|\Psi(y_{i+1})-\Psi(y_i)|\\&\leqslant\varepsilon\sum(y_{i+1}-y_i)+\varepsilon\\&\leqslant\varepsilon(y-a+1),\end{aligned}\tag{5.55}$$

其中 $\sum'$ 是对 $(y_i,\ y_{i+1})$ 属于(i)的情况求和, $\sum''$ 是对 $(y_i,\ y_{i+1})$ 属于(ii)的情况求和. 在(5.55)中再令 $\varepsilon\to0$, 立即得到

$$\Psi(y)=\Psi(a),$$

而 y 是 $[a,\ b]$ 中任取的, 所以 $\Psi(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上为常数. 证毕.

习 题

1. 设 $F(x)$、$G(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上全连续函数, 证明 $F(x)\ G(x)$ 必是 $[a,\ b]$ 上全连续函数, 当 $F(x)$ 处处不为零时, $\dfrac{1}{F(x)}$ 也是全连续函数.

2. 在全连续函数定义中, 如果允许 $\{(a_\nu,\ b_\nu),\ \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$ 中区间可以重复(包括相交不空), 那末这种函数必满足 Lipschitz 条件.

3. 证明定理 3 和定理 2′.

4. 设 $\mu_{g_1}\ll\mu_g$, $\mu_{g_2}\ll\mu_g$, 证明对任何数 α、β,

$$\frac{d(\alpha\mu_{g_1}+\beta\mu_{g_2})}{d\mu_g}\underset{\mu_g}{\doteq}\alpha\frac{d\mu_{g_1}}{d\mu_g}+\beta\frac{d\mu_{g_2}}{d\mu_g}.$$

5. 设 $f(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上 L-可积函数, $x_0\in(a,\ b)$, 如果对于 $h_1\geqslant0$, $h_2\geqslant0$,

$$\lim_{h_1+h_2\to0}\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|dx=0,$$

就称 x_0 是 $f(x)$ 的勒贝格点. 证明:

(1) 当 x_0 是 f 的勒贝格点时

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt\Big|_{x=x_0}=f(x_0);$$

(2) $[a, b]$ 上(关于 m)几乎所有的点都是 f 的勒贝格点.

6. 设 E 是 $[a, b]$ 中的勒贝格可测集, $x_0\in E$, (α, β) 是包含 x_0 的开区间, 如果下述极限存在:

$$d(x_0)=\lim_{(\alpha,\beta)\to x_0}\frac{m((\alpha, \beta)\cap E)}{m((\alpha, \beta))},$$

称 $d(x_0)$ 为 E 在 x_0 点的密度. 特别, 当 $d(x_0)=1$ 时, 称 x_0 是 E 的全密点. 证明: (1)如果 E 是开集, 那末 E 中除构成区间的端点外, 都是 E 的全密点; (2)对任何勒贝格可测集 E, 它的全密点全体记为 H, 那末 $m(E-H)=0$.

7. (积分的变数变换)设 g_1、g_2 是 $(-\infty, \infty)$ 上单调增加右连续函数, φ 是 $(-\infty, \infty)$ 上 Borel 可测实函数, 如果对任何区间 $(\alpha, \beta]$, 满足

$$g_1((\alpha, \beta])=g_2(\varphi^{-1}((\alpha, \beta])),$$

这里 $\varphi^{-1}((\alpha, \beta])$ 是 $(\alpha, \beta]$ 关于 φ 的原象. 证明 $(-\infty, \infty)$ 上任何 Borel 可测函数 f 关于 μ_{g_1} 可积的充要条件是 $f(\varphi(t))$ 关于 μ_{g_2} 可积, 并且当可积时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,d\mu_{g_1}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(s))\,d\mu_{g_2}(s).$$

特别, 当 φ 是 $(-\infty, \infty)$ 到 $(-\infty, \infty)$ 上的严格单调增加的连续双射时, 上式便是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dg_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(s))dg_1(\varphi(s)).$$

8. 设 F、G 是 $[a, b]$ 上全连续函数. 证明:

$$F(b)G(b)-F(a)G(a)=\int_a^b G\,dF+\int_a^b F\,dG,$$

其中 dF、dG 分别是 $d\mu_F$、$d\mu_G$.

9. 设 F 是 $[a, b]$ 上全连续函数. 证明

$$\int_a^b |F'(x)|\,dx=\bigvee_a^b(F).$$

附　　录

§6 一般集上的测度和积分

在这一节中, 将把一般集上测度和积分的概念和结果系统但不加证明地

列出，以便今后的查考．当然，有兴趣的读者也可以在读好前面内容的基础上，自己逐一加以证明，其中有两三个定理的证明方法是前面未遇到过的．

要阅读本节内容，先要认真阅读第一章§1附录中有关重要的集类中谈到的环和 σ-环的内容．

1．环 $\boldsymbol{R}$ 上测度

设 X 是基本集，$\boldsymbol{R}$ 是 X 上某些子集所成的环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的函数．如果满足：

① μ 是非负的；

② $\mu(\phi)=0$；

③ μ 在 $\boldsymbol{R}$ 上可列可加，即如果 $\{E_i\}\subset\boldsymbol{R}$，$E_i\cap E_j=\emptyset\,(i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\boldsymbol{R}$ 时，$\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$；

就称 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度．

如果 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的函数，除满足①、②外，还满足

③′ μ 在 $\boldsymbol{R}$ 上有限可加，即对 $\boldsymbol{R}$ 中任何有限个互不相交的 E_1、…、E_k，$\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i)=\sum\limits_{i=1}^{k}\mu(E_i)$；

就称 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的非负有限可加集函数(或有限可加测度)．

如果 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上非平凡的测度(或有限可加测度)，即至少存在一个 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)<\infty$，那末由③(或③′)可以推出②．

注意，尽管将来用的是测度，但在很多场合下，有限可加集函数是不可避免要出现的．例如 $\boldsymbol{R}$ 上一列测度 $\{\mu_n\}$，如果对每个 $E\in\boldsymbol{R}$，$\{\mu_n(E)\}$ 都收敛，那末极限函数一般便是 $\boldsymbol{R}$ 上有限可加非负集函数，未必是 $\boldsymbol{R}$ 上测度．

下面是有限可加测度的性质(出现的集 E_1、…、E_k 等全属于 $\boldsymbol{R}$)．

定理1　(1)(单调性)　设 $E_1\subset E_2$，那末 $\mu(E_1)\leqslant\mu(E_2)$．

(2)(可减性)　设 $E_1\subset E_2$，且 $\mu(E_1)<\infty$，那末 $\mu(E_2-E_1)=\mu(E_2)-\mu(E_1)$．

(3)(次可加性)　$\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}\mu(E_i)$．

环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度除具有上面定理1的性质(1)～(3)而外，还具有下面的性质：

定理2　(4)(有限可加性)　当 $E_i\in\boldsymbol{R}\,(i=1,2,\cdots,k)$，且 $E_i\cap E_j=\emptyset\,(i\neq j)$ 时，

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{k}E_i)=\sum_{i=1}^{k}\mu(E_i).$$

(5)(次可列可加性)　当 $\{E_i\}\subset\boldsymbol{R}$，$E\in\boldsymbol{R}$，且 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 时，$\mu(E)\leqslant$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(E_i)$.

(6) 设 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$, $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\boldsymbol{R}$, 那末

$$\mu(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

(7) 设 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$, $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\boldsymbol{R}$, 并且至少有某个 E_k, 使得 $\mu(E_k)<\infty$, 那末

$$\mu(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

(8) 当 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$, 且 $\bigcap\limits_{k=m}^{\infty}E_k\in\boldsymbol{R}(m=1,\ 2,\ \cdots)$, $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}E_k\in\boldsymbol{R}$ 时,

$$\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}E_n)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

(9) 当 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$, $\bigcup\limits_{k=m}^{\infty}E_k\in\boldsymbol{R}(m=1,\ 2,\ \cdots)$, $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty}E_k\in\boldsymbol{R}$, 且存在自然数 m_0, 使得 $\mu\left(\bigcup\limits_{k=m_0}^{\infty}E_k\right)<\infty$ 时,

$$\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty}E_n)\geqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

(10) 在(8)、(9)的假设下, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n$ 存在, 那末

$$\mu(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

注意, 如果 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-环, 那末(6)中假设 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\boldsymbol{R}$, (7) 中假设 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\boldsymbol{R}$, (8) 中假设 $\bigcap\limits_{k=m}^{\infty}E_k\in\boldsymbol{R}$, (9) 中假设 $\bigcup\limits_{k=m}^{\infty}E_k\in\boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\boldsymbol{R}$ 等均自动满足, 从而(6)～(10)的结论在 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上成立. 但是, (7)中假设 $\mu(E_k)<\infty$, (9) 中假设 $\mu(\bigcup\limits_{k=m_0}^{\infty}E_k)<\infty$ 不能少, 否则, 有反例说明相应的结论不成立.

2. 环或 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上有限可加测度的可列可加性

正如前述, 有些场合不可避免会出现有限可加测度, 因此, 需要判断一个环或 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上的有限可加测度是否为可列可加的.

定义 设 $\boldsymbol{R}$ 是基本集 X 上的环或 σ-环, μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上有限可加测度或可列可加测度. 如果 $E\in\boldsymbol{R}$, $\mu(E)<\infty$, 称 E 是(关于 μ)**有限的**. 如果对一切 $E\in\boldsymbol{R}$, E 均是有限的, 称 μ 为 $\boldsymbol{R}$ **上有限的有限可加测度或有限的测度**. 如果 $X\in\boldsymbol{R}$, 且 X 是有限的, 称 μ 是 $\boldsymbol{R}$ **上全有限的有限可加测度或全有限的测度**. 如果 $E\in\boldsymbol{R}$, 并存在一列测度有限的集 $\{E_i\}$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\supset E$, 称 E 是(关于 μ)**σ-有限的**. 如果对一切 $E\in\boldsymbol{R}$, E 是 σ-有限的, 称 μ 是 $\boldsymbol{R}$ **上 σ-有限的有**

限可加测度或 σ-有限测度。如果 $X\in \boldsymbol{R}$，X 是 σ-有限的，称 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上全 σ-有限的有限可加测度或全 σ-有限的测度。

σ-有限的测度已足够广泛（当然不是最广泛的），在一般的分析数学中足够应用。甚至 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-代数(即 $X\in \boldsymbol{R}$)的情况，在一般分析数学中也足够了。

定义　设 $\boldsymbol{R}$ 是一个环或 σ-环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上有限可加测度或可列可加测度，对任何一列 $\{E_i\}\subset \boldsymbol{R}$，$E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$ 如果存在 n_0，$\mu(E_{n_0})<\infty$，且 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i=\emptyset$ 时，总有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$，称 μ 在 $\boldsymbol{R}$ 上是 ϕ 上连续。

定理 3　设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上一个代数或 σ-代数。

(1) 如果 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，则 μ 在 $\boldsymbol{R}$ 上是 ϕ 上连续的。

(2) 如果 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上有限的有限可加测度，则 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上测度的充要条件是 μ 在 $\boldsymbol{R}$ 上是 ϕ 上连续的。

注意，(2) 中有关 $\boldsymbol{R}$ 上有限可加测度 μ 是有限的这个假设不能去掉。另外，如果从要具体验证一个有限可加测度具有可列可加性(即成为一个测度)方面看，验证(2)中条件并不比直接验证可列可加性容易。从这个意义上说，它并没有本质上的好处。然而，在许多一般性讨论的场合，它仍是很有用的。

3．环上测度的扩张

设 $\boldsymbol{R}$ 是基本集 X 上的一个环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的一个测度。从积分方面考虑，需要的 $\boldsymbol{R}$ 至少是 σ-环。因此，就需要考虑环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度 μ 是否能延拓成某个 σ-环 $\boldsymbol{R}^*\supset\boldsymbol{R}$ 上的测度。下面就是通常采用的扩张方法。

定义　设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的一个环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上测度。$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 表示 X 中一切能用可列个 $\boldsymbol{R}$ 中集覆盖的集 E 全体，即

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})=\{E\,|\,E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ E_i\in\boldsymbol{R}(i=1,2,\cdots)\}.$$

对任何 $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$，称 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上集函数

$$\mu^*(E)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\,\Big|\,\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\supset E,\ E_i\in\boldsymbol{R},\ i=1,2,\cdots\}$$

为 $\boldsymbol{R}$ 上由 μ 导出的外测度。

定理 4　$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 具有如下性质：

(1)（可传性）　$E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$，那末 E 的任何子集 $E'\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$；

(2) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})\supset\boldsymbol{R}$；

(3) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 是 X 上的 σ-环。

定理 5　$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上 μ^* 具有如下性质：

(1)（非负性）　对一切 $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$，$\mu^*(E)\geqslant 0$；

(2) $\mu^*(\phi)=0$；

(3) (次可列可加性) 对任何一列 $\{E_i\}\subset \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$,

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i);$$

(4) 当 $E\in \boldsymbol{R}$ 时, $\mu^*(E)=\mu(E)$ (即 μ^* 是 $\boldsymbol{R}$ 上 μ 在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上的延拓, 但 μ^* 在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上不具有可列可加性, 甚至有限可加性也没有).

(5) (特殊的有限可加性) 如果 $E\in \boldsymbol{R}$, 那末对任何 $F\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$,

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E).$$

性质(5)表示: 用 $\boldsymbol{R}$ 中 E 把整个空间 X 分成两部分: E 和 $X-E$, 这时 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 中任何两个集, 如果一个在 E 内(即 $F\cap E$), 一个在 E 外(即 $F-E$), 那末对这两部分的集, μ^* 具有可加性.

定义 设 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上测度, μ^* 是由 μ 导出的外测度, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 中满足下面条件的 E: 对任何 $F\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$,

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E) \tag{6.1}$$

称之为 μ^*-可测集.

μ^*-可测集全体记为 $\boldsymbol{R}^*$.

(6.1) 称为 Carathéodory 条件.

定理 6 (1) $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R}^*$;

(2) $\boldsymbol{R}^*$ 是 σ 环;

(3) μ^* 在 $\boldsymbol{R}^*$ 上是测度.

由定理 5, $\mu^*|_{\boldsymbol{R}}=\mu$, 即 $\boldsymbol{R}^*$ 上测度 μ^* 是 μ 的延拓, 称 μ^* 为 μ 的 Carathéodory 扩张.

定义 设 μ 是 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度, 如果 $E\in \boldsymbol{R}$, $\mu(E)=0$, 那末 E 的任何子集 $E'\in \boldsymbol{R}$ (自然 $\mu(E')=0$), 称 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上完全测度.

例如, 设 $\boldsymbol{R}$ 是直线上勒贝格可测集全体(即 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}$), μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上勒贝格测度 m, m 便是 $\boldsymbol{R}$ 上的完全测度. 如果把 m 限制在直线上的 Borel 集类 $\boldsymbol{B}$ 上, m 在 $\boldsymbol{B}$ 上就不是完全测度.

有关 $\boldsymbol{R}^*$ 的结构有如下结果.

定理 7 (1) $\boldsymbol{R}^*\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ ($\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 是包含 $\boldsymbol{R}$ 的最小 σ-环);

(2) 如果 $E\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$, $\mu^*(E)=0$, 则 $E\in\boldsymbol{R}^*$ (即外测度为 0 的集必是 μ^*-可测集);

(3) μ^* 是 $\boldsymbol{R}^*$ 上完全测度;

(4) $E\in\boldsymbol{R}^*$ 的充要条件是 E 可以表示成下列三种形式中的任何一种:

$$E=F\cup N_1,\ E=G-N_2,\ E=(H\cup N_3)-N_4,$$

其中 $F, G, H\in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$, 而 N_1、N_2、N_3、N_4 等是 μ^*-零集(即 $\boldsymbol{R}^*$ 中的集除去一个 μ^*-零集差别外本质上是 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 中集);

(5)（扩张的封闭性）将 μ^* 限制于 $\boldsymbol{R}^*$（其实是 σ-环），再导出$(\mu^*)^*$，和相应的 $(\boldsymbol{R}^*)^*$，那末将有下面的事实：

$$H(\boldsymbol{R}^*)=H(\boldsymbol{R}),\ \mu^{**}=\mu^*,\ (\boldsymbol{R}^*)^*=\boldsymbol{R}^*.$$

（即环$\boldsymbol{R}$上测度经 Carathéodory 扩张方法扩张一次后即封闭.）

4．可测空间上可测集和可测函数

定义　设 X 是基本集，$\boldsymbol{R}$ 是 X 上的 σ-环，称$(X,\ \boldsymbol{R})$是**可测空间**（有的书上还多一个假定：$X=\bigcup\limits_{E\in\boldsymbol{R}}E$），称 $\boldsymbol{R}$ 中任何一个集 E 为$(X,\ \boldsymbol{R})$上的一个**可测集**.

定义　设$(X,\ \boldsymbol{R})$是可测空间，$E\subset X$，f 是定义在 E 上的有限实函数，如果对任何实数 c，$E(f>c)\in\boldsymbol{R}$，称 f 是 E 上**可测函数**.

有的书上，可测函数采用如下定义方式.

定义　设$(X,\ \boldsymbol{R})$是可测空间，f 是定义在 X 上的有限实函数.记 $N(f)=\{x|f(x)\neq0\}$．如果对任何实数 c，有 $X(f>c)\cap N(f)\in\boldsymbol{R}$，称 f 是$(X,\ \boldsymbol{R})$上**可测函数**.

两种定义，除了形式上有一种定义域是 $E(\subset X)$，另一种是 X 之外，还有就是后者特别强调 $X(f>c)$ 中点除去 $f=0$ 的点外是可测集，另一种并不强调这一点．这两种定义自然有区别，但不是根本原则性的．本书中采用前者.

另外，从定义可以看出：**可测集、可测函数的概念原则上不依赖于先存在测度.**

显然，如果 f 是 E 上可测函数，那末 $E\in\boldsymbol{R}$，即可测函数的定义域必是可测集．可测函数有如下等价定义.

定理 8　设$(X,\ \boldsymbol{R})$是可测空间，下面几件事是等价的.

(1) f 是 E 上可测函数；

(2) 对任何实数 c，$E(f\geqslant c)\in\boldsymbol{R}$；

(3) 对任何实数 c，$E(f<c)\in\boldsymbol{R}$；

(4) 对任何实数 c，$E(f\leqslant c)\in\boldsymbol{R}$；

(5) 对任何实数 $c<d$，$E(c<f\leqslant d)\in\boldsymbol{R}$；

(6) E 是可测集，并存在 E 的可测子集的特征函数线性组合的序列$\{\varphi_n\}$，在 E 上

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=f;$$

(7) 对直线上任何 Borel 集 M，$f^{-1}(M)\in\boldsymbol{R}$.

可测函数具有下列性质：

定理 9　设$(X,\ \boldsymbol{R})$是可测空间，E 是可测集，f、h 是 E 上可测函数，k 是 E 上有限实函数.

(1) $\alpha f+\beta h$ (α、β 是实数)、$\max(f, h)$、$\min(f, h)$、$|f|$、fh、$\frac{1}{f}$ (当处处 $f(x)\neq 0$) 等都是可测函数.

(2) g 是直线上 Borel 可测函数，那末 $g(f)$ 是 E 上可测函数.

(3) 设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数. 如果 $\sup\limits_n\{f_n\}$ 处处存在，并且是有限值，那末 $\sup\limits_n\{f_n\}$ 为 E 上可测函数; 如果 $\inf\limits_n\{f_n\}$ 处处存在，并且是有限值，那末 $\inf\limits_n\{f_n\}$ 为 E 上可测函数; 如果 $\lim f_n$ (或 $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$) 存在，并且是有限函数，那末 $\lim f_n$ (或 $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$) 为 E 上可测函数.

(4) 设 $E_1\subset E$, $E_1\in \boldsymbol{R}$, 则 h 在 E 上可测的充要条件是 h 作为 E_1、$E_2=E-E_1$ 上函数时都是可测的.

(5) 当 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-代数时，集 E 的特征函数 χ_E 在 X 上可测的充要条件是 $E\in\boldsymbol{R}$.

5. 测度空间上可测集和可测函数

设 $(X, \boldsymbol{R})$ 是可测空间，μ 是 $(X, \boldsymbol{R})$ 上一个测度，称 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间. 设 P 是与 E 中点有关的命题，如果存在一个 μ-零集 E_0，使得 P 不成立的 x 总包含在 E_0 中，称 P 在 E 上几乎处处成立.

定理 10 设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，f、$\{f_n\}$ 是 E 上可测函数.

(1) 如果 $\sup\limits_n\{f_n\}$ 几乎处处是有限值，那末存在 E 上可测函数 h，使得 $h\doteq\sup\{f_n\}$; 如果 $\inf\limits_n\{f_n\}$ 几乎处处是有限值，那末存在 E 上可测函数 h，使得 $h\doteq\inf\limits_n\{f_n\}$; 如果 $\lim f_n$ 或 $\overline{\lim} f_n$ 或 $\underline{\lim} f_n$ 几乎处处是有限值，那末存在 E 上可测函数 h，使得

$$\lim f_n\doteq h \quad (\text{或 } \overline{\lim}\, f_n=h, \text{ 或 } \underline{\lim}\, f_n=h).$$

(2) 如果 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是完全测度空间，并且 $h\doteq f$ 在 E 上成立，那末 h 必为 E 上可测函数(空间 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 不是完全测度空间时，结论不对).

(3) $(X, \boldsymbol{R}^*, \mu^*)$ 是 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 按 Carathéodory 扩张的完全测度空间，$E\in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，任何 E 上关于 $(X, \boldsymbol{R}^*, \mu^*)$ 的可测函数 f，必存在关于 $(X, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}), \mu^*)$ 的 E 上可测函数 h，使得在 E 上，

$$f\underset{\mu^*}{\doteq} h.$$

定理 11 (Егоров) 设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，$\mu(E)<\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数，且几乎处处收敛于 f，那末，对任何 $\delta>0$，必存在 $E_\delta\subset E$, $E_\delta\in\boldsymbol{R}$, $\mu(E-E_\delta)<\delta$，使得 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f.

定理 11 中 $\mu(E)<\infty$ 的条件不可去掉.

6. 度量收敛

定义 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，f、$\{f_n\}$都是E上可测函数. 如果对任何$\sigma>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E(|f_n-f|>\sigma))=0,$$

或等价地，如果对任何$\sigma>0$, $\varepsilon>0$, 存在自然数$N(\sigma, \varepsilon)$, 当$n\geqslant N(\sigma, \varepsilon)$时

$$\mu(E(|f_n-f|>\sigma))<\varepsilon,$$

称$\{f_n\}$在E上度量收敛于f.

定义 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，$\{f_n\}$是E上一列可测函数. 如果对任何$\sigma>0$,

$$\lim_{n, m\to\infty}\mu(E(|f_n-f_m|>\sigma))=0,$$

或等价地，对任何$\sigma>0$, $\varepsilon>0$, 存在自然数$N(\sigma, \varepsilon)$, 当$n, m\geqslant N(\sigma, \varepsilon)$时,

$$\mu(E(|f_n-f_m|>\sigma))<\varepsilon,$$

称$\{f_n\}$是E上的度量基本序列.

定理 12(勒贝格) 设$\{f_n\}$是测度空间$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$中集E上的可测函数序列，并且几乎处处收敛于可测函数f, 如果$\mu(E)<\infty$, 那末$\{f_n\}$必度量收敛于f.

定理 13 设$\{f_n\}$是测度空间$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$上集E上一列可测函数.

(1) 如果$\{f_n\}$是度量基本的，则$\{f_n\}$的任何子序列也是度量基本的.

(2) 如果$\{f_n\}$是度量基本的，则必存在子序列$\{f_{n_\nu}\}$在E上几乎处处收敛于E上可测函数.

(3) $\{f_n\}$在E上度量基本的充要条件是存在E上可测函数f, $\{f_n\}$度量收敛于f.

(4) 当$\mu(E)<\infty$时，$\{f_n\}$在E上度量收敛于某个可测函数f的充要条件是对$\{f_n\}$的任何一个子序列$\{f_{n_\nu}\}$, 必可从中再找到一个几乎处处收敛于f的子序列$\{f_{n_{\nu_k}}\}$.

定理 14 设E上的可测函数列$\{f_n\}$、$\{h_n\}$分别度量收敛于f、h, 那末

(1) 对任何常数α、β, $\{\alpha f_n+\beta h_n\}$在E上度量收敛于$\alpha f+\beta h$.

(2) 当$\mu(E)<\infty$时，$\{f_nh_n\}$度量收敛于fh(条件$\mu(E)<\infty$不可去掉).

(3) 当$\mu(E)<\infty$, $h_n(n=1, 2, \cdots)$、h几乎处处不等于零，$\{\frac{f_n}{h_n}\}$度量收敛于$\frac{f}{h}$(条件$\mu(E)<\infty$不可去掉).

7. 积分

定义 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，$E\in\boldsymbol{R}$, $\mu(E)<\infty$. 又设f是E上有

界可测函数，$f(E)\subset(u, v)$，在(u, v)上任取一组分点 $D: u=l_0<l_1<\cdots<l_n=v$，记 $\delta(D)=\max_i(l_i-l_{i-1})$，作和式

$$S(D)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mu(E(l_{i-1}<f\leqslant l_i)),\quad l_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant l_i.$$

如果存在 S，使得

$$\lim_{\delta(D)\to 0}|S(D)-S|=0,$$

称 f 在 E 上可积分，又称 S 为 f 在 E 上的积分，记为

$$S=\int_E f\,d\mu.$$

定理 15 （存在定理） 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，$E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)<\infty$，如果 f 是 E 上有界可测函数，那末 f 必在 E 上可积分.

定义 设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，E 是 σ-有限的可测集，如果 $\{E_i\}$ 是一列单调增加的可测集，即 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$，又对每个 n，$\mu(E_n)<\infty$，并且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\supset E$，称 $\{E_i\}$ 为 E 的测度有限单调覆盖（序列）.

设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，$E\in\boldsymbol{R}$，f 是 E 上的可测函数，M 是个正数. 分别引入记号

$$f^+=\max(f, 0),\ f^-=\max(-f, 0),$$
$$[f]_M=\max(\min(f, M), -M).$$

引理 1 设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，f 是 σ-有限集 E 上非负可测函数，$\{E_i\}$ 是 E 的任一测度有限单调覆盖，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[f]_n d\mu=A<\infty,$$

那末对 E 的任何另一个测度有限单调覆盖 $\{E_i'\}$，以及任何一列发散于 ∞ 的正数列 $\{M_i\}$，必有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n'}[f]_{M_n}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[f]_n d\mu.$$

定义 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，f 是 σ-有限集 E 上的非负可测函数，$\{E_i\}$ 是 E 的某一个测度有限单调覆盖，$\{M_i\}$ 是一列发散于 ∞ 的正数列，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[f]_{M_n}d\mu=A<\infty,$$

称 f 在 E 上可积分，并称 A 是 f 在 E 上的积分，记为

$$\int_E f\,d\mu.$$

如果 f 是 E 上一般的可测函数，但 f^+、f^-（$f=f^+-f^-$）在 E 上都是可积的，

那末称 f 在 E 上可积分，并称

$$\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

为 f 在 E 上的积分，记为

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

当 $f=f_1+if_2$ 是复函数，f_1、f_2 分别为 f 的实部和虚部，如果 f_1、f_2 在 E 上都可积时，称 f 在 E 上可积，并规定

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_1 d\mu + i\int_E f_2 d\mu.$$

从引理 1 知道，E 上非负可积函数的可积性以及积分的数值是不依赖于定义中测度有限单调覆盖 $\{E_i\}$ 以及发散于 ∞ 的正数列 $\{M_i\}$ 的选取的，即积分定义是确定的．而一般函数的分解 $f=f^+-f^-$ 是唯一的，所以 E 上的一般函数积分的定义也是恰当的．

下面是积分的基本性质．

定理 16　设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，E 是 σ-有限的可测集，f、h 是 E 上可积函数，k 是 E 上有限函数．

(1)（单调性）　当 $f\geqslant h$ 时

$$\int_E f\,d\mu \geqslant \int_E h\,d\mu.$$

(2)（线性）　α、β 是任意两个复数，

$$\int_E (\alpha f+\beta h)d\mu = \alpha\int_E f\,d\mu + \beta\int_E h\,d\mu.$$

(3) 如果 $k\doteq f$，k 是 E 上可测函数，那末 k 也是 E 上可积函数，并且

$$\int_E k\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

（如果 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是完全测度空间，由 $k\doteq f$ 的条件必可推出：k 是 E 上可测函数．）

(4)（绝对可积性）　$|f|$ 在 E 上可积，并且

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu.$$

(5)（唯一性）　如果 $f\geqslant 0$，并且 $\int_E f\,d\mu = 0$，那末 $f\doteq 0$．

(6)（控制可积性）　如果 k 是 E 上可测函数，并且存在 E 上可积函数 F，使得 $|k|\leqslant F$，则 k 必是 E 上可积函数．

(7)（可列可加性）　如果 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$，$E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j)$，并且 $E_i\in \boldsymbol{R}$ $(i=1, 2, \cdots)$，那末 k 在 E 上可积的充要条件是

① k 在每个 E_i 上是可积的;

② $\sum_n \int_{E_i} |k|\, d\mu < \infty$.

当 k 在 E 上可积时,有

$$\int_E k\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} k\, d\mu.$$

(8)(全连续性)　对任何 $\varepsilon>0$, 必存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 当 $e\subset E$, $e\in \mathbf{R}$, 而 $\mu(e)<\delta(\varepsilon)$ 时,

$$\int_e |f|\, d\mu < \varepsilon.$$

(9)(Levi 引理)　设 $\{f_n\}$ 是 σ-有限集 E 上一列实可积函数, 并且 $f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$,

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\, d\mu = A < \infty,$$

那末必存在 E 上可积函数 f, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n \doteq f$, 并且

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu.$$

(10)(Fatou 引理)　设$\{f_n\}$是 σ-有限集 E 上一列实可积函数,如果存在 E 上可积函数 f_0, 使得

① $f_0\leqslant f_n$ (或 $f_n\leqslant f_0$), $n=1, 2, \cdots$

② $\underline{\lim}\int_E f_n d\mu = A < \infty$ (或 $\overline{\lim}\int_E f_n\, d\mu = A > -\infty$),

那末必有

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\, d\mu$$

$$\left(\text{或} \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n\, d\mu \geqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\, d\mu\right).$$

(11)(Lebesgue 控制收敛定理)　设$\{f_n\}$是 σ-有限集 E 上一列可积函数,又存在 E 上非负可积函数 F, 使得

① $|f_n|\leqslant F$;

② $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于或度量收敛于 E 上可测函数 f, 那末 f 必是 E 上可积函数, 并且

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\, d\mu.$$

(12) 设 $\{f_n\}$ 是测度有限集 E 上一列非负可积函数, 并且度量收敛于 f, 那末, 可以逐项积分的充要条件是$\{f_n\}$的积分具有等度全连续性.

有关逐项积分性质(9)～(11)中条件缺少后的反例, 可以在本章和第二章有关的节中找到.

8. 乘积测度空间

定义　设 $(X, \boldsymbol{S})$、$(Y, \boldsymbol{T})$ 是两个可测空间，对任何 $A\in\boldsymbol{S}$, $B\in\boldsymbol{T}$, 称集 $A\times B$ 为可测矩形，可测矩形全体记为 $\boldsymbol{P}$, 由形为 $\boldsymbol{P}$ 中有限个互不相交集合的和集全体构成的环为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P})$. 由 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P})$（等价地由 $\boldsymbol{P}$）张成的 σ–环为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P}))$（也就是 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{P})$），记为 $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, 称 $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$ 为 $(X, \boldsymbol{S})$、$(Y, \boldsymbol{T})$的乘积可测空间.

乘积可测空间上可测集和可测函数的截口的可测性有如下基本结果.

定理 17　设$(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$为乘积可测空间.

(1) 如果 $E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, 那末 ① 对任何固定的 $x\in X$, $E_x=\{y\mid(x, y)\in E\}$ 是$(Y, \boldsymbol{T})$上可测集；② 对任何固定的 $y\in Y$, $E^y=\{x\mid(x, y)\in E\}$是 $(X, \boldsymbol{S})$ 上可测集.

(2) 如果 $E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, f 是 E 上关于$(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$的可测函数，那末 ① 对任何固定的 $x\in X$, $f_x(y)=f(x, y)$ 是 E_x 上关于 $(Y, \boldsymbol{T})$ 的可测函数；② 对任何固定的 $y\in Y$, $f^y(x)=f(x, y)$ 是 E^y 上关于$(X, \boldsymbol{S})$的可测函数.

为建立乘积测度空间，先建立下面的引理.

引理 2　设$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$ 是两个全有限测度空间，E 是乘积可测空间$(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$上可测集，那末 $\nu(E_x)$、$\mu(E^y)$分别是$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$上可测函数，并且

$$\int_X \nu(E_x)d\mu=\int_Y \mu(E^y)d\nu.$$

定义　设$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$是两个 σ–有限的测度空间，作乘积可测空间 $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$ 上集函数 λ 如下：如果 $E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, 并且有 $A\times B\in\boldsymbol{P}$, $\mu(A)<\infty$, $\nu(B)<\infty$, 使得 $E\subset A\times B$ 时，规定

$$\lambda(E)=\int_X \nu(E_x)d\mu\left(=\int_Y \mu(E^y)d\nu\right).$$

对于一般的 $E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, 必有一列矩形 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{P}$, $E_n=A_n\times B_n$ $(n=1, 2, \cdots)$, $\mu(A_n)<\infty$, $\nu(B_n)<\infty$, 而且 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$, 使得 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$.

这时就规定

$$\lambda(E)=\lim_{n\to\infty}\lambda(E\cap E_n),$$

这样引入的 λ 不仅是恰当的，而且是 $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$ 上 σ–有限测度，称 λ 为 μ 和 ν 的乘积测度，记为 $\mu\times\nu$. 并称$(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}, \mu\times\nu)$为$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$和$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$的乘积测度空间.

定理 18　设$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$是两个 σ–有限的测度空间. 那末，

(1) $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}, \mu\times\nu)$必是 σ–有限的测度空间.

(2) 对任何 $E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, 必分别存在 $(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$上 σ–有限的

可测集 A、B, 使得 $E\subset A\times B$.

定理 19(Fabini) 设 $(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$是两个σ-有限的测度空间, f是定义在 $A\times B$ $(A\in\boldsymbol{S}, B\in\boldsymbol{T})$上的可测函数, 那末:

(1) 如果f是在 $A\times B$ 上关于 $\mu\times\nu$ 可积的函数, 那末对关于μ几乎所有的$x\in A$, $f_x(y)$ 是 B 上关于 ν 可积的函数; 而对关于 ν 几乎所有的 $y\in B$, $f^y(x)$ 是 A 上关于μ 可积的函数, 并且

$$\int_{A\times B} f\,d\mu\times\nu=\int_A\int_B f\,d\nu d\mu=\int_B\int_A f\,d\mu d\nu.$$

(2) 如果$|f|$的二次积分

$$\int_A\int_B |f|\,d\nu\,d\mu,\quad \int_B\int_A |f|\,d\mu\,d\nu$$

中有一个存在, 那末f 必是 $A\times B$ 上关于 $\mu\times\nu$ 的可积函数 (从而由(1), 重积分可以化为二次积分).

有关定理 19 的(2)中, $|f|$是二次可积的假设这个条件是不可去掉的, 反例可参看第二章中有关的节.

9. 完全乘积测度空间

设$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$是两个σ-有限的测度空间, 一般说来, 即使它们是完全的测度空间, 但 $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}, \mu\times\nu)$ 也未必是完全的测度空间, 只有将 $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$ 上测度 $\mu\times\nu$ 再经过 Carathéodory 扩张(或增减 $\mu\times\nu$-零集的一切子集), 才得到完全的测度空间 $(X\times Y, (\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})^*, (\mu\times\nu)^*)$. 通常仍记 $(\mu\times\nu)^*$ 为 $\mu\times\nu$. 称 $(X\times Y, (\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})^*, \mu\times\nu)$ 为两个完全测度空间$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$的*完全乘积测度空间*.

相应于定理 17、18, 在完全乘积测度空间中成立下面的定理.

定理 20 设 $E\in(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})^*$,

(1) 如果 $\mu\times\nu(E)=0$, 那末关于 μ 几乎所有 $x\in X$, $E_x\in\boldsymbol{T}$, 且 $\nu(E_x)=0$, 而关于 ν 几乎所有 $y\in Y$, $E^y\in\boldsymbol{S}$, 且 $\mu(E^y)=0$.

(2) 对一般的$E\in(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})^*$, 关于 μ 几乎所有的$x\in X$, $E_x\in\boldsymbol{T}$; 而关于 ν 几乎所有的 $y\in Y$, $E^y\in\boldsymbol{S}$.

(3) 如果f是关于$(X\times Y, (\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})^*, \mu\times\nu)$的$E$上可测函数, 那末关于$\mu$几乎所有$x\in X$, $f_x(y)$ 是 E_x 上关于$(Y, \boldsymbol{T})$的可测函数; 而关于 ν 几乎所有的 $y\in Y$, $f^y(x)$ 是 E^y 上关于$(X, \boldsymbol{S})$的可测函数.

定理 20 和定理 17～18 的区别, 仅在于这时对某些 x、y, E_x、E_y; f_x、f_y 可能是不可测集和不可测函数. 但定理 20 说明这些使得发生不可测情况的点, 总是包含在相应空间$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$或$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$ 上的一个零集之中. 因而在不管这些零集的情况下(必要时修改一个零集上函数的定义), 不影响其可

积性．从而有：

定理 21(Fubini) 在完全乘积测度空间$(X\times Y,\ (\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})^*,\ \mu\times\nu)$上，Fubini 定理 19 仍成立．

10．带符号的测度和复值测度

定义 设$(X,\ \boldsymbol{R})$是可测空间，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上定义的集函数，但 $\pm\infty$ 中最多只能有一个被 μ 的值取到（下面总是假设 μ 不会取到值 $-\infty$）．如果 μ 具有

① $\mu(\phi)=0$;

② （可列可加性） 对任何 $\{E_i\}\subset\boldsymbol{R}$, $E_i\cap E_j=\phi(i\neq j)$, 成立 $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$,

就称 μ 是$(X,\ \boldsymbol{R})$上广义测度或带符号的测度．

例如，设$(X,\ \boldsymbol{R},\ \mu_0)$是测度空间，$f$ 是定义在 X 上的有限实函数，但在任何 $E\in\boldsymbol{R}$ 上，f 是 E 上可测函数，并且

$$\int_E f^-\,d\mu_0<\infty,\ E\in\boldsymbol{R}.$$

在$(X,\ \boldsymbol{R})$上定义 μ：对任何 $E\in\boldsymbol{R}$,

$$\mu(E)=\int_E f^+\,d\mu_0-\int_E f^-\,d\mu_0$$

（这里允许 f^+ 的积分值取无限大），μ 便是$(X,\ \boldsymbol{R})$上带符号的测度．

下面的 Hahn 分解定理就是把带符号的测度分解成两个普通测度之差，从而关于带符号测度的积分就化成两个测度的积分的差来讨论．

定理 22(Hahn) 设 μ 是$(X,\ \boldsymbol{R})$上带符号的测度，必存在 X 的子集 A，它具有如下性质：

① 对任何 $E\in\boldsymbol{R}$, $E\cap A\in\boldsymbol{R}$（从而 $E\cap A^c=E-E\cap A\in\boldsymbol{R}$）；

② 对任何 $E\in\boldsymbol{R}$, $\mu(E\cap A)\leqslant 0$;

③ 对任何 $E\in\boldsymbol{R}$, $\mu(E\cap A^c)\geqslant 0$.

通常称具有性质①、②的集 A 为 μ 的负集．Hahn 定理说明对于 μ，必存在一个负集 A．余集 A^c 称为 μ 的正集（即满足①、③）．

当 A 是 μ 的一个负集时，对任何 $E\in\boldsymbol{R}$,

$$\mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c).$$

如果在 $\boldsymbol{R}$ 上引入三个集函数：对任何 $E\in\boldsymbol{R}$

$$\mu_+(E)=\mu(E\cap A^c),\ \mu_-(E)=-\mu(E\cap A),$$

$$|\mu|(E)=\mu_+(E)+\mu_-(E)$$

（注意 $|\mu|(E)\neq|\mu(E)|$）．分别称 μ_+、μ_-、$|\mu|$ 为 μ 的正变差测度，负变差测度和全变差测度．显然

$$\mu=\mu_+-\mu_-.$$

根据假设，易知 μ_-是一个有限测度。

通常对于 E 上可积函数 f，如果 f 在 E 上关于 μ_+、μ_- 都可积(等价于 f 在 E 上关于 $|\mu|$ 可积)，那末，称 f 关于 μ 可积，并且规定积分

$$\int_E f\,d\mu=\int_E f\,d\mu_+-\int_E f\,d\mu_-.$$

显然，对于广义测度(带符号的测度)的积分，还有一种下面形式的线性性质。

设 μ_1、μ_2 是$(X, \boldsymbol{R})$上两个带符号的测度，α、β 是两个实数，那末，当 f 在 E 上关于 μ_1、μ_2 可积分时，f 必在 E 上关于 $\alpha\mu_1+\beta\mu_2$ 可积，并且

$$\int_E f d(\alpha\mu_1+\beta\mu_2)=\alpha\int_E f\,d\mu_1+\beta\int_E f\,d\mu_2.$$

由于带符号测度 μ 失去了普通测度所具有的非负性，因而所有积分的不等式性质不再成立，以及应用到不等式的积分的极限性质是否成立都要当心。通常对于带符号测度 μ 运用"几乎处处"的概念都是对测度 $|\mu|$ 而言。下面以 Lebesgue 控制收敛定理为例，说明条件应如何叙述。

控制收敛定理　设$\{f_n\}$是 E 上可测函数，并且

$$\lim_{n\to\infty} f_n \underset{|\mu|}{\doteq} f,$$

又如果存在 E 上关于 μ 可积的非负函数 F，使得

$$|f_n| \underset{|\mu|}{\leqslant} F,$$

那末，f 在 E 上关于 μ 必可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu=\int_E f\,d\mu.$$

如果 μ 是$(X, \boldsymbol{R})$上复值集函数，$\mu=\mu_1+i\mu_2$，μ_1、μ_2 分别是 μ 的实部、虚部。如果 μ_1、μ_2 都是$(X, \boldsymbol{R})$上带符号测度，就称 μ 为$(X, \boldsymbol{R})$上复值测度。对于复值测度也有积分概念，这里不拟赘述。

11. 测度的全连续和奇异

定义　设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，μ_1、μ_2 是$(X, \boldsymbol{R})$上两个带符号测度。如果对任何 $E\in\boldsymbol{R}$，且 $|\mu_2|(E)=0$ 都能推出 $\mu_1(E)=0$，称 μ_1 关于 μ_2 全连续，记为 $\mu_1\ll\mu_2$。如果存在 $E\in\boldsymbol{R}$，且 $|\mu_2|(E)=0$，使得任何 $F\in\boldsymbol{R}$，$\mu_1(F-E)=0$，称 μ_1 关于 μ_2 是奇异的。如果 $\mu_1\ll\mu_2$，$\mu_2\ll\mu_1$ 同时成立，称 μ_1 与 μ_2 等价，记为 $\mu_1\sim\mu_2$。

引理 3　(1) 如果 $\mu_1\ll\mu_2$，那末 $|\mu_1|\ll\mu_2$。

(2) 如果 μ_1 关于 μ_2 奇异，那末 $|\mu_1|$ 关于 μ_2 也奇异。

(3) 如果 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-代数，μ_1 关于 μ_2 奇异，那末，μ_2 关于 μ_1 也奇异.

定理 23(勒贝格)　设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，μ_1、μ_2 是$(X, \boldsymbol{R})$上带符号的测度，则 μ_1 必可分解为 $\mu_1=\mu_c+\mu_s$，其中 $\mu_c \ll \mu_2$ 而 μ_s 关于 μ_2 奇异.

定理 24(Radon-Nikodym)　设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，μ_1、μ_2 是两个带符号的 σ-有限测度(指 $|\mu_1|$、$|\mu_2|$ 均为 σ-有限测度)．如果 $\mu_1 \ll \mu_2$，那末必存在 X 上的有限实函数 f，对任何 $E \in \boldsymbol{R}$，f 是 E 上可测函数，并使得

$$\mu_1(E)=\int_E f\,d\mu_2,$$

而且，f 关于 $|\mu_2|$ 是几乎处处被唯一确定的，即如果又有 h 使上式成立，那末 $f \underset{|\mu_2|}{=} h$ 在任何 $E \in \boldsymbol{R}$ 上成立.

称定理 24 中的 f 是 μ_1 关于 μ_2 的 Radon-Nikodym 导数，记为

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2}=f.$$

下　　篇

概　述

下篇部分将介绍泛函分析．泛函分析是近代分析数学的基础性分支．它起源于经典数学物理中的变分问题，概括了经典分析、函数论中某些重要概念和成果，特别是这些领域中的代数方法．后来又受到量子物理、现代工程技术和现代力学的有力推动．它综合性地运用分析的、代数的和几何的观点与方法，研究分析数学、现代物理和现代工程技术中提出的许多问题．偏微分方程论、概率论（特别是随机过程理论）以及计算数学的某些方面，由于运用了泛函分析，从本世纪中叶开始获得较大发展．现在，泛函分析的概念和方法已经渗透到现代纯粹与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，如微分方程、积分方程、概率论、计算数学、量子场论、统计物理、抽象调和分析、现代控制论、大范围微分几何、最优化等．泛函分析是一门具有很强的综合性的学科，它对纯粹和应用数学的影响，好象本世纪初叶集论对后来数学的影响那样．

泛函分析分为线性泛函分析和非线性泛函分析两大部分．线性泛函分析比起非线性泛函分析来说要成熟得多，也更基本一些．这是因为数学中的线性问题要比非线性问题容易研究，人们已经获得大量的研究线性问题的成果和经验，而不少非线性问题可以先做一次近似把它"线性化"，从所获得的线性问题的结果中，能够得到原来非线性问题许多重要的知识和信息．这就很自然地使得线性泛函分析先取得成功并得到广泛的应用．线性泛函分析中已经形成了许多既在理论上也在应用上重要的分支，如拓扑线性空间理论、算子理论、算子代数理论、广义函数论及算子半群等．但是，非线性问题和线性问题有着本质的区别，随着认识的深入，开展非线性问题的研究在数学中已显得越来越重要，相信非线性泛函分析定将会得到充分地发展．

本篇将主要介绍线性泛函分析中最基本的一些知识，同时，对非线性泛函分析的初等内容也将作一介绍．

第四章 度量空间

§1 度量空间中的极限

1. 引言

极限是分析中的基本概念，熟知的例子如数列的收敛，函数列的一致收敛和(积分)平方平均收敛，复函数序列在平面上某个区域中内闭一致收敛等等．其实，这些重要的收敛都可以用度量空间中按距离收敛的概念加以统一．

2. 距离

定义 设 X 是一个非空的集，$\rho(\cdot,\ \cdot)$是定义在 X 上的二元函数，如果满足

(i) $\rho(x,\ y)\geqslant 0$, $\rho(x,\ y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) 三角不等式：对任何 $x,\ y,\ z\in X$,

$$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ z)+\rho(y,\ z), \tag{1.1}$$

那末称 ρ 是 X 上的距离，$\rho(x,\ y)$是 x 和 y 的距离．又称$(X,\ \rho)$是度量空间或距离空间．X 中的元素称为点．

由距离的性质(i)、(ii)可以推出距离还具有对称性：

(iii) (对称性)对任何 $x,\ y\in X$, $\rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$.

事实上，在(ii)中特别取 $z=x$,并利用(i)就得到

$$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(y,\ x); \tag{1.2}$$

但 $x,\ y$ 都是任意的，在(1.2)中互换 x、y 的地位，又得到

$$\rho(y,\ x)\leqslant\rho(x,\ y), \tag{1.3}$$

结合(1.2)、(1.3)两式，就得到(iii).

距离的性质(ii)相当于平面几何中的三角形两边之和大于第三边．类似地，在距离空间中还有两边之差小于第三边的不等式：

(iv) 对任何 $x, y, z\in X$, $|\rho(x, y)-\rho(x, z)|\leqslant\rho(y, z)$.

事实上, 由(1.1)得到

$$\rho(x, y)-\rho(x, z)\leqslant\rho(y, z), \tag{1.4}$$

再将上式中的 y、z 互换, 又得到

$$\rho(x, z)-\rho(x, y)\leqslant\rho(z, y), \tag{1.4'}$$

但 $\rho(z, y)=\rho(y, z)$, 从(1.4)、(1.4′)立即得到(iv).

例 1 设 $X=\mathbb{R}$[注], 对任何两个实数 $x, y\in\mathbb{R}$, 规定 $\rho(x, y)=|x-y|$, 易知 ρ 是 X 上的距离, 它就是通常的两个实数 x、y 之间的距离.

例 2 仍设 $X=\mathbb{R}$, 对任何两个实数 $x, y\in\mathbb{R}$, 当 $x=y$ 时, 规定 $\rho_1(x, y)=0$; 当 $x\neq y$ 时, 规定 $\rho_1(x, y)=1$, 也容易验证 ρ_1 是 X 上的距离.

例 1 和例 2 中的度量空间 (X, ρ)、(X, ρ_1) 中, 尽管它们的 X 都是同一个集, 但距离不同, 所以它们是不同的度量空间.

3. 极限

定义 设 (X, ρ) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中一列点, 如果存在 $x\in X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x)=0, \tag{1.5}$$

那末称 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 或 $x_n\to x$. 分别称 $\{x_n\}$ 是收敛点列, x 是 $\{x_n\}$ 的极限.

定理 1 设 (x, ρ) 是度量空间. 下列命题成立:

(1) (极限的唯一性) 收敛点列的极限是唯一的.

(2) (距离的二元连续性) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$, 那末

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=\rho(x, y). \tag{1.6}$$

证明 (1) 设 $\{x_n\}$ 是一个点列, 对任何 $x, y\in X$, 由距离的性质(ii)和(iii)立即得到

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x_n, x)+\rho(x_n, y). \tag{1.7}$$

[注] $\mathbb{R}$ 表示实数域.

如果 $\{x_n\}$ 既收敛于 x，又收敛于 y，那末在(1.7)中令 $n\to\infty$，立即得到 $\rho(x, y)\leqslant 0$. 再根据距离的性质(i)就得到 $x=y$.

(2) 根据距离的性质(iv)，

$$\begin{aligned}|\rho(x_n, y_n)-\rho(x, y)| &\leqslant |\rho(x_n, y_n)-\rho(x_n, y)| \\ &\quad +|\rho(x_n, y)-\rho(x, y)| \\ &\leqslant \rho(y_n, y)+\rho(x_n, x),\end{aligned} \tag{1.8}$$

再令 $n\to\infty$，由(1.8)立即就得到(1.6). 证毕.

4. 子空间

设 (X, ρ) 是度量空间，M 是 X 的非空子集. 显然，把 ρ 限制在 M 上，ρ 也是 M 上的一个距离，因而 (M, ρ) 是度量空间，称 (M, ρ) 是 (X, ρ) 的子空间.

5. 例

举几个常见的度量空间的例子.

例 3 (空间 C^n 和 E^n)　设 n 是自然数，$C^n=\{(x_1, \cdots, x_n)|x_i\in\mathbb{C}$[注]，$i=1, 2, \cdots, n\}$. 对 C^n 中任何两点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$，规定

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.9}$$

显然，ρ 满足距离的性质(i)，因此，要证明 ρ 是 C^n 上距离，只要证明 ρ 满足性质(ii)即可. 事实上，利用 Cauchy 不等式：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

立即得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2+\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_ib_i+\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2 \\ &\leqslant\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

即 $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 特别，对 $x=(x_1, \cdots, x_n)$、$y=(y_1, \cdots, y_n)$、$z=(z_1, \cdots, z_n)$，取 $a_i=x_i-y_i$，$b_i=z_i-y_i$，就

[注]　$\mathbb{C}$ 表示复数域.

有

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\rho(x, z)+\rho(y, z).$$

称(C^n, ρ)为n维复 Euclid 空间，简记为C^n.

同样，在$E^n=\{(x_1, \cdots, x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}, i=1, 2, \cdots, n\}$中仍按(1.9)式规定$\rho$，易知$(E^n, \rho)$是度量空间，称为$n$维实 Euclid 空间，简记为$E^n$.

设$\{x^{(k)}=(x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})\}$是$n$维(实或复) Euclid 空间中一列点，$x=(x_1, \cdots, x_n)$是另一个点，因为对任何$k=1, 2, \cdots$,

$$|x_i^{(k)}-x_i|\leqslant\rho(x^{(k)}, x)\leqslant\sqrt{n}\max_j|x_j^{(k)}-x_j|, \ i=1, 2, \cdots, n,$$

由此可知$\{x^{(k)}\}$按距离收敛于x的充要条件就是通常的点列$\{x^{(k)}\}$按每个坐标收敛于x.

例 4 (空间 R_1) 在实数域$\mathbb{R}$上，对任何$x, y\in\mathbb{R}$，规定

$$\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}. \tag{1.10}$$

显然，ρ满足距离的性质(i). 今证ρ满足距离的性质(ii). 事实上，因为$[0, \infty)$上的函数$\varphi(x)=\frac{x}{1+x}$是单调增加的，所以对任何$a, b\in\mathbb{R}$，由$|a+b|\leqslant|a|+|b|$而得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}, \tag{1.11}$$

因此，对任何$x, y, z\in\mathbb{R}$，取$a=x-z$, $b=z-y$，由(1.11)就得到

$$\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}\leqslant\frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

$$=\rho(x, z)+\rho(y, z),$$

即$(\mathbb{R}, \rho)$是度量空间，简记为R_1.

显然，R_1中一列点$\{x_n\}$按距离收敛于x的充要条件就是通常的实数列$\{x_n\}$收敛于x. 但R_1和E^1是两个不同的度量空间. 应注意，在R_1中任何两点x、y的距离$\rho(x, y)<1$.

例 5 （空间$C^k[a, b]$） 设k是非负整数，$C^k[a, b]$是$[a, b]$上具有k阶连续导函数的函数全体，对任何$x(t), y(t)\in C^k[a, b]$，规定

$$\rho(x, y)=\max_{0\leq j\leq k}\max_{a\leq t\leq b}|x^j(t)-y^j(t)|.$$

容易证明ρ是$C^k[a, b]$上的距离. 简记度量空间$(C^k[a, b], \rho)$为$C^k[a, b]$. 特别，度量空间$C^0[a, b]$常进一步简记为$C[a, b]$.

显然，$C^k[a, b]$上点列$\{x_n(t)\}$按距离收敛于$x(t)$的充要条件是$\{x_n(t)\}$以及它们的前k阶导函数序列分别一致收敛于$x(t)$以及相应的前k阶导函数.

例 6 （空间S） 设S是实数列(或复数列)$\{x_n\}$全体，称x_n是S空间中点$x=\{x_n\}$的第n个坐标. 对任何$x=\{x_n\}$, $y=\{y_n\}\in S$，规定

$$\rho(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}.$$

易知ρ满足距离的性质(i). 今证ρ满足距离性质(ii). 事实上，仿例 4 有

$$\begin{aligned}\rho(x, y)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i+z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i+z_i-y_i|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|y_i-z_i|}{1+|y_i-z_i|}\\&=\rho(x, z)+\rho(y, z).\end{aligned}$$

简记度量空间(S, ρ)为S.

现在证明S中点列按距离收敛的充要条件是每个坐标收敛：设S中点列$\{x^{(k)}\}$收敛于x，记$x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}(k=1, 2, \cdots)$，$x=\{x_n\}$，因此

$$\rho(x^{(k)}, x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(k)}-x_i|}{1+|x_i^{(k)}-x_i|}.$$

显然，对每个给定的自然数 i,

$$\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|x_i^{(k)}-x_i|}{1+|x_i^{(k)}-x_i|}\leqslant\rho(x^{(k)},\ x),\tag{1.12}$$

因此，如果 $\{x^{(k)}\}$ 按距离收敛于 x，那末从 (1.12) 立即可以推出 $x^{(k)}$ 的第 i 个坐标收敛于 x 的第 i 个坐标. 反之，假设 $x^{(k)}$ 的每个坐标都收敛于 x 的相应坐标，即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i(i=1,\ 2,\ \cdots)$. 这时，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N_0，使得

$$\sum_{i=N_0}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而对于每个 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N_0-1$，必存在 N_i，当 $k>N_i$ 时，

$$|x_i^{(k)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N=\max(N_1,\ \cdots,\ N_{N_0-1})$，那末当 $k>N$ 时，

$$\sum_{i=1}^{N_0-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(k)}-x_i|}{1+|x_i^{(k)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{N_0-1}\frac{1}{2^i}\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此，当 $k>N$ 时，

$$\rho(x^{(k)},\ x)=\left(\sum_{i=1}^{N_0-1}+\sum_{i=N_0}^{\infty}\right)\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(k)}-x_i|}{1+|x_i^{(k)}-x_i|}<\varepsilon,$$

此即 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x^{(k)},\ x)=0$.

例 7 （空间 $\mathscr{A}$） 设 $\mathscr{A}$ 是单位圆 $|z|<1$ 内解析函数全体，对任何 $f(z),\ g(z)\in\mathscr{A}$，规定

$$\rho(f,\ g)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{|z|\leqslant1-\frac{1}{i}}\frac{|f(z)-g(z)|}{1+|f(z)-g(z)|}.$$

类似于例 6，可以证明$(\mathscr{A},\ \rho)$是度量空间，简记它为 $\mathscr{A}$.

利用解析函数的最大模原理以及 $\frac{x}{1+x}$ 在 $[0,\ \infty)$ 上单调增加，易知 $\mathscr{A}$ 中点列 $\{f_k(z)\}$ 按距离收敛于 $f(z)$ 的充要条件就是通常的解析函数序列 $\{f_k(z)\}$ 在 $|z|<1$ 中内闭一致收敛于 $f(z)$.

例 8 （空间 $C^\infty[a,\ b]$） 设 $C^\infty[a,\ b]$ 是 $[a,\ b]$ 上无限次可微函数全体. 对任何 $f(t),\ g(t)\in C^\infty[a,\ b]$，规定

$$\rho(f, g)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{a\leq t\leq b}\frac{|f^{(i)}(t)-g^{(i)}(t)|}{1+|f^{(i)}(t)-g^{(i)}(t)|},$$

易知$(C^\infty[a, b], \rho)$是度量空间,简记为$C^\infty[a, b]$. $C^\infty[a, b]$中点列$\{f_n(t)\}$按距离收敛于$f(t)$的充要条件是对任何非负整数p, $\{f_n^{(p)}(t)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f^{(p)}(t)$.

例 9 (空间$S(E, \mu)$) 设μ是n维空间上的Lebesgue-Stieltjes测度, E是可测集, $\mu(E)<\infty$. $S(E, \mu)$是E上可测函数全体(当两个函数关于μ几乎处处相等时,视为同一个函数),对任何$f, g\in S(E, \mu)$,规定

$$\rho(f, g)=\int_E\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}d\mu(x).$$

$\left(\text{由于}\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\leq 1, \mu(E)<\infty, \text{所以上面积分是存在的.}\right)$易知$(S(E, \mu), \rho)$是度量空间,简记为$S(E, \mu)$.

现在来证明$S(E, \mu)$上点列$\{f_n(x)\}$按距离收敛于$f(x)$的充要条件是通常的$\{f_n(t)\}$在E上关于μ度量收敛于$f(t)$. 事实上,如果$\{f_n\}$在E上度量收敛于f,那末$\{|f_n-f|\}$度量收敛于0. 利用$\frac{x}{1+x}$在$[0, \infty)$上严格单调增加,易知对任何$\sigma>0$,

$$\{x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geq\sigma\}=\left\{x\,\middle|\,\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\geq\frac{\sigma}{1+\sigma}\right\},$$

从而$\left\{\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\right\}$度量收敛于0,又由于$\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}\leq 1$,由度量收敛的有界控制收敛定理立即知道$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n, f)=0$. 反之,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n, f)=0$,那末对任何$\sigma>0$,由于

$$\rho(f_n, f)\geq\int_{E(|f_n-f|\geq\sigma)}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}d\mu(x)$$

$$\geq\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(E(|f_n-f|\geq\sigma)),$$

由上式立即得到$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E(|f_n-f|\geq\sigma))=0$,即$\{f_n\}$在$E$上度量收敛于$f$.

例 10 （空间 $L^p(E,\ \mu)(0<p\leqslant 1)$） 设 $(X,\ \boldsymbol{R},\ \mu)$ 是测度空间，E 是可测集，$L^p(E,\ \mu)=\{f|f$ 在 E 上可测，$|f|^p$ 可积$\}$（在 $L^p(E,\ \mu)$ 中关于 μ 两个几乎处处相等的函数视为同一个函数），对任何 $f,\ g\in L^p(E,\ \mu)$，规定

$$\rho(f,\ g)=\int_E|f(x)-g(x)|^p\,d\mu(x). \tag{1.13}$$

首先说明上式右边积分存在：事实上，对任何两个不同时为零的数 a、b（并且不妨假设 $|b|\geqslant|a|$）以及 $1\geqslant p>0$，

$$\begin{aligned}|a+b|^p&\leqslant(|a|+|b|)^p=|b|^p\left(1+\frac{|a|}{|b|}\right)^p\\&\leqslant|b|^p\left(1+\frac{|a|}{|b|}\right)\leqslant|b|^p\left(1+\frac{|a|^p}{|b|^p}\right)\\&=|b|^p+|a|^p,\end{aligned}$$

因此对任何 $f(x)$、$g(x)$，总有

$$|f(x)-g(x)|^p\leqslant|f(x)|^p+|g(x)|^p. \tag{1.14}$$

（当 $f(x)=g(x)=0$ 时，显然上式仍成立），由假设 $|f(x)|^p+|g(x)|^p$ 是 E 上可积函数，而 $f(x)-g(x)$ 是可测函数，所以 $|f(x)-g(x)|$ 是 E 上可积函数。

显然，(1.13) 所规定的 ρ 满足距离的性质(i)． 而对任何 $f,\ g,\ h\in L^p(E,\ \mu)$，分别用 $f-h,\ g-h$ 代替(1.14)中 $f,\ g$，立即得到

$$\begin{aligned}\rho(f,\ g)&=\int_E|(f(x)-h(x))-(g(x)-h(x))|^p\,d\mu(x)\\&\leqslant\int_E|f(x)-h(x)|^p\,d\mu(x)\\&\quad+\int_E|h(x)-g(x)|^p\,d\mu(x)\\&=\rho(f,\ h)+\rho(g,\ h),\end{aligned}$$

因此，$(L^p(E,\ \mu),\ \rho)\ (0<p\leqslant 1)$ 是度量空间，简记为 $L^p(E,\ \mu)\ (0<p\leqslant 1)$．

作为本节的结束，我们指出：对于一个非空的集 X，从原则上说，在 X 上可随心所欲地引入距离 ρ（只要满足距离的性质 (i)，

(ii)), 就能使得(α, ρ)成为度量空间. 但这样做不见得有什么意义, 有意义的是根据所研究的问题的需要, 在适当选取的集 X 上引入适当的距离, 这样才能有的放矢.

今后, 为叙述简单起见, 常用"X 是度量空间"来代替"(X,ρ)是度量空间".

习 题

1. 设(X, ρ)是度量空间, $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 分别收敛于 x、y, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\rho(x_n, y_k)=\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_k)=\rho(x, y).$$

2. 设 X 是非空有限集, ρ_1、ρ_2 是 X 上的两个距离. 证明: $\{x_n\}$ 按 ρ_1 收敛于 x 的充要条件是 $\{x_n\}$ 按 ρ_2 收敛于 x.

3. 设 X 是非空的集, ρ_1、ρ_2 是 X 上的两个距离, 并且存在两个正数 α_1、α_2, 使得对任何 $x, y\in X, x\neq y$, $\rho_i(x, y)\geqslant\alpha_i(i=1, 2)$, 证明 $\{x_n\}$ 按 ρ_1 收敛于 x 的充要条件是 $\{x_n\}$ 按 ρ_2 收敛于 x.

4. 设(X, ρ)是度量空间, 证明(X, ρ_1)也是度量空间, 其中 $\rho_1(x, y)=\dfrac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}(x, y\in X)$. 并证明 $\{x_n\}$ 按 ρ_1 收敛于 x 的充要条件是 $\{x_n\}$ 按 ρ 收敛于 x.

5. 设 X 是三维 Euclid 空间上的一个球面, 规定 $x, y\in X$ 的 $\rho(x, y)$是通过 x、y 两点的大圆上以 x、y 为端点的劣弧的弧长. 证明(X, ρ)是度量空间, 并且

$$\rho_0(x, y)\leqslant\rho(x, y)\leqslant\frac{\pi}{2}\rho_0(x, y),$$

其中 ρ_0 是 E^3(见例 3)上的距离.

6. 设 X 是非空集, ρ_1、$\cdots$、ρ_n 都是 X 上的距离. 对任何 $x, y\in X$, 规定

$$\tilde{\rho}_1(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\rho_i(x, y),$$

$$\tilde{\rho}_2(x, y)=\max_i\rho_i(x, y),$$

$$\tilde{\rho}_3(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\rho_i(x, y)\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 α_1、$\cdots$、α_n 都是正常数. 证明 $\tilde{\rho}_i(i=1, 2, 3)$都是 X 上的距离, 并且 X 中点列 $\{x_n\}$ 按 $\tilde{\rho}_1$、$\tilde{\rho}_2$、$\tilde{\rho}_3$ 中之一收敛于 x 时, 必按另外两个收敛于 x.

7. 设 X 是度量空间, 对每个 $k(k=1, 2, \cdots)$, X 中点列 $\{x_{k,n}\}$(当 $n\to\infty$ 时)收敛于 x_k, 如果 $\{x_k\}$收敛于 x, 那末$\{x_{k,n}|k=1, 2, \cdots; n=1, 2, \cdots\}$中必有一个收敛于 x 的子点列.

§2 度量线性空间和赋范线性空间

在§1中引入了度量空间的概念，用度量空间中按距离收敛统一了过去熟知的许多收敛．但对分析数学的各个分支来说，度量空间这个概念还是太广泛．在通常的情况下，所考察的问题中除了有收敛、极限外，在所研究的对象之间还有某种代数关系，即 X 中的元素之间还存在一些代数结构，例如 X 或许是一个群、一个环、一个域、也或许是线性空间．对线性泛函分析来说，最关心的当然是 X 为线性空间的情况．下面先对线性空间作一扼要回顾，然后再谈在线性空间上如何引入距离．

1．线性空间

用 $\mathbb{A}$ 表示实数域或复数域．

定义 设 X 是一非空集，如果 X 中任何两个元素之间可定义加法运算"+"，$\mathbb{A}$ 中任何元素和 X 中任何元素之间可定义数乘运算"·"，并且满足下列条件：

I．X 关于+成为交换群，即满足：

(1) 对任何 $x, y\in X$，$x+y\in X$．

(2) (交换律) $x+y=y+x$ $(x, y\in X)$．

(3) (结合律) $(x+y)+z=x+(y+z)$ $(x, y, z\in X)$．

(4) 存在唯一的元素 0 (称它是零元素)，使得 $x+0=x$ 对一切 $x\in X$ 成立．

(5) 对任何 $x\in X$，存在唯一的元素 x'，使得 $x'+x=0$ (称 x' 是 x 的负元素，记为 $-x$)．

II．数乘运算满足

(6) 对任何 $a\in\mathbb{A}$ 以及任何 $x\in X$，$a\cdot x\in X$．

(7) $1\cdot x=x$．

(8) $a\cdot(b\cdot x)=(ab)\cdot x$．

(9) $(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x$，$a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y$，

那末称 $(X, +, \cdot)$ 是数域 $\mathbb{A}$ 上线性空间或向量空间，线性空间中

的元素称为点，有时也称为向量．如果 $\mathbb{K}$ 是实数域(复数域)，则称 $(X, +, \cdot)$ 是实线性空间(复线性空间)．显然，每个复线性空间必是实线性空间．

为了简单起见，今后常用"X 是线性空间"代替"$(X, +, \cdot)$ 是线性空间"，并且简记数乘 $a\cdot x$ 为 ax．

下面将举一些实例(下面出现的专用符号可见§1例3～10)．

例1　在 $C^n(E^n)$ 上规定加法、数乘如下：对任何 $(x_1, \cdots, x_n)$、$(y_1, \cdots, y_n)\in C^n(E^n)$，$a\in\mathbb{C}(\mathbb{R})$，

$$\begin{aligned}&(x_1, \cdots, x_n)+(y_1, \cdots, y_n)=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n),\\&a(x_1, \cdots, x_n)=(ax_1, \cdots, ax_n).\end{aligned}\tag{2.1}$$

易知 $C^n(E^n)$ 是线性空间，并且 C^n 是复线性空间，E^n 是实线性空间．

在 S 上规定加法和数乘如下：对任何 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\in S$，$a\in\mathbb{K}$，

$$\begin{aligned}&\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\},\\&a\{x_n\}=\{ax_n\},\end{aligned}\tag{2.2}$$

易知 S 是线性空间．

今后如无特殊申明，$C^n(E^n)$、S 作为线性空间时，它们上面的加法、数乘运算总是分别按(2.1)、(2.2)来规定．

例2　设 X 是非空的集，$F(X)$ 是 X 上一切有限函数全体．在 $F(X)$ 上规定加法和数乘运算如下：对任何 f，$g\in F(X)$ 以及 $a\in\mathbb{K}$，

$$\begin{aligned}&(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ x\in X,\\&(af)(x)=af(x),\ x\in X.\end{aligned}\tag{2.3}$$

易知 $F(X)$ 成为线性空间．对于定义在 X 上由某些函数构成的线性空间，通常都是用(2.3)来规定它上面的加法和数乘运算．据此，§1例5中的 $C^k[a, b]$，例7中的 $\mathscr{A}$ 和例8中的 $C^\infty[a, b]$ 等都是线性空间．

如果 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是一个测度空间，E 是可测集，$M(E, \mu)$ 是定义在 E 上的可测函数全体，但两个可测函数几乎处处相等时就视为同一个函数．在 $M(E, \mu)$ 上规定加法和数乘运算如下：对任

何 f、$g\in M(E,\mu)$ 以及 $a\in \mathbb{\Lambda}$,

$$(f+g)(x) \underset{\mu}{\doteq} f(x)+g(x),$$
$$(af)(x) \underset{\mu}{\doteq} af(x), \tag{2.4}$$

易知 $M(E,\mu)$ 成为线性空间($M(E,\mu)$ 按(2.4)成为线性空间的严格的叙述可参见本节例 8). 由某些可测函数所成的线性空间中的加法和数乘运算通常都用(2.4). 据此, §1 的例 9 中的 $S(E,\mu)$ 以及例 10 中的 $L^p(E,\mu)$ $(0<p\leqslant 1)$ 等都是线性空间.

注意, 在例 1、2 中所提到的 §1 中例 3~10 的各类线性空间, 如 C^n, E^n, $\mathscr{A}$, $C^k[a,b]$, $C^\infty[a,b]$, $S(E,\mu)$, $L^p(E,\mu)$ $(0<p\leqslant 1)$ 等, 当我们把它们视为线性空间时, 总是暂时撇开它们上面的距离而谈的.

线性子空间 设 L 是线性空间 X 的子集, 如果 L 对 X 上的线性运算封闭, 也就是说, 对任何 x, $y\in L$ 以及 α, $\beta\in\mathbb{\Lambda}$, 必有 $\alpha x+\beta y\in L$, 则称 L 是 X 的线性子空间, 简称为子空间.

显然, 线性空间的任何线性子空间本身也是一个线性空间. 另外, 线性空间 X 本身以及仅含零向量的集 $\{0\}$ 都是 X 的线性子空间. 这两个子空间称为 X 的平凡子空间.

设 M 是线性空间 X 的子集, 显然集

$$M=\left\{y \,\middle|\, y=\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\in\mathbb{\Lambda},\ x_1,\ \cdots,\ x_n\in A,\ n=1,\ 2\cdots\right\}$$

是 X 的线性子空间, 称 M 是由 A 张成的线性子空间, 也称为 M 的线性包. 记 M 为 $\operatorname{span} A$. 读者可以证明 $\operatorname{span} A$ 就是一切包含 A 的线性子空间的交集(或者说是包含 A 的最小线性子空间).

线性相关和线性无关 设 X 是线性空间, 对一组向量 x_1、$\cdots$、x_n, 如果存在 $\mathbb{\Lambda}$ 中不全为零的 n 个数 α_1、$\cdots$、α_n, 使得

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n=0,$$

那末称 x_1、$\cdots$、x_n 线性相关; 如果 x_1、$\cdots$、x_n 不是线性相关的, 就称 x_1、$\cdots$、x_n 线性无关.

易知, 如果 x_1、$\cdots$、x_n 中含有一个零向量, 那末它们必线性相

关. 而 x_1、…、x_n 线性无关的充要条件是使得 $\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n=0$ 成立的数 α_1、…、α_n 必定是 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.

线性基(Hamel 基) 设 X 是线性空间, A 是 X 的一个子集, 如果 A 中任何有限个向量都是线性无关的, 就称 A 是线性无关集. 如果 A 是 X 的一个线性无关集, 并且对任何非零向量 $x\in X$, 必存在 A 中有限个向量 x_1、…、x_n 以及 Λ 中有限个数 α_1、…、α_n, 使得

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,$$

那末称 A 是 X 的线性基, 又称为 Hamel 基.

显然, 如果 A 是 X 的线性基, 则对任何 $x\in X$, 必唯一地存在 $x_1, \cdots, x_n\in A$ 和全不为零的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n\in\Lambda$, 使得 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$. 即每个 $x\in X$, 必可用 A 中有限个向量的线性组合来表示.

用 Zorn 引理可以证明: 任何线性空间中必存在线性基. (泛函分析中有些定理要用 Zorn 引理来证明, 用的方式本质上是一样的. 在第五章 § 2 的泛函延拓定理的证明中将完整地给出应用 Zorn 引理的方法, 它可以视为一个典型.)

维数 在集的势论中有如下一个基本结果: 设 $\{A_n\}$ 是有限个或可列个集, 如果其中每个集的势不超过无限势 α, 则 $\overline{\overline{\bigcup_i A_i}}\leqslant\alpha$. 利用这个事实, 可以引入线性空间的维数概念. 为此先证明:

定理 1 设 X 是线性空间, A、B 都是 X 的线性基, 那末 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证明 (1) 先假设 A 是有限的, 即有自然数 n, $\overline{\overline{A}}=n$, 因而 $A=\{x_1, \cdots, x_n\}$, 今证 $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$. 在 B 中任取 k 个向量 y_1、…、y_k, 因为 A 是线性基, 所以

$$y_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}x_i,\ \alpha_{ji}\in\Lambda,\ i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, k.$$

假设 $k>n$, 由于 $k\times n$ 矩阵 (α_{ji}) 的秩最多是 n, 因而存在不全为零的数 $\lambda_j\in\Lambda\,(j=1, 2, \cdots, k)$, 使得 $\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j y_j=0$, 这与 B 是基(从而

是线性无关集)相矛盾．所以只有 $k\leqslant n$．但是 $y_1, \cdots, y_k$ 是在 B 中任意取的，因而 $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$．

对调 A、B 的地位，又可得到 $\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{A}}$，从而 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}}$．

(2) 假设 A 是无限集，即 $\overline{\overline{A}}\geqslant\aleph_0$．令 $A=\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，$B=\{y_\mu|\mu\in\Lambda'\}$，其中 Λ、Λ' 都是指标集，$\overline{\overline{A}}=\Lambda$，$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{\Lambda'}}$．今证 $\overline{\overline{\Lambda}}=\overline{\overline{\Lambda'}}$：如果不对，不妨设 $\overline{\overline{\Lambda'}}>\overline{\overline{\Lambda}}\geqslant\aleph_0$．因为 B 是基，所以对任何 $x_\lambda\in A$，唯一地存在 $\mu_1(\lambda), \cdots, \mu_k(\lambda)\in\Lambda'$ 和全不为零的数 $\alpha_{\mu_1(\lambda)}, \cdots, \alpha_{\mu_k(\lambda)}\in\mathbb{\Lambda}$，使得

$$x_\lambda=\sum_{i=1}^{k}\alpha_{\mu_i(\lambda)}y_{\mu_i(\lambda)}, \tag{2.5}$$

称 $\mu_1(\lambda)$、…、$\mu_k(\lambda)$ 是 x_λ 所涉及的指标．对任何自然数 k，A 中仅涉及 Λ' 中 k 个指标的 x_λ 的全体记为 A_k（对某些 k，有可能是空集），显然，$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，并且 $\overline{\overline{A_k}}\leqslant\overline{\overline{A}}(k=1, 2, \cdots)$．令 Λ'_k 是一切 A_k 中向量 x_λ 所涉及的指标全体，记 $\Lambda_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Lambda'_k$．$\Lambda'_k$ 便是 k 个与 A_k 等势的集的和集的子集，由上面关于势的结果，$\overline{\overline{\Lambda'_k}}\leqslant\overline{\overline{\Lambda}}$，再对 $\Lambda_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Lambda'_k$ 用势的结果，就得到 $\overline{\overline{\Lambda_0}}\leqslant\overline{\overline{\Lambda}}$．

显然，为了证明 $\overline{\overline{\Lambda'}}\leqslant\overline{\overline{\Lambda}}$，只需证明 $\Lambda_0=\Lambda'$ 即可．如果 $\Lambda_0\neq\Lambda'$，则必存在 $\mu\in\Lambda'$，$\mu\overline{\in}\Lambda_0$．因为 A 是线性基，所以唯一地存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l\in\Lambda$ 以及全不为零的数 $\beta_1, \cdots\beta_l\in\mathbb{\Lambda}$，使得

$$y_\mu=\sum_{j=1}^{l}\beta_jx_{\lambda_j}. \tag{2.6}$$

根据 (2.5)，每个 x_{λ_j} 又必可用指标落在 Λ_0 中的 B 中某有限个 $y_{\mu(\lambda_j)}$ 表示，从(2.6)可知 y_μ 也可以用指标落在 Λ_0 中的某有限个 B 中向量表示，这与 B 是线性无关集相矛盾．

由此得到 $\overline{\overline{\Lambda}}=\overline{\overline{\Lambda'}}$．证毕．

线性空间 X 中线性基的势称为 X 的维数，记为 $\dim X$．

线性同态与线性同构 设 X、Y 是数域 $\mathbb{\Lambda}$ 上两个线性空间，φ 是 $X\to Y$ 的映射．如果对任何 $x_1, x_2\in X$，$\lambda, \mu\in\mathbb{\Lambda}$，都有

$$\varphi(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda\varphi(x_1)+\mu\varphi(x_2)\text{[注]},$$

称 φ 是 X 到 Y 的线性同态，并且称集 $\mathscr{N}(\varphi)=\{x|\varphi(x)=0\}$ 是 φ 的零空间，或者称为 φ 的核，有时 $\mathscr{N}(\varphi)$ 也记为 $\ker\varphi$. 显然，$\mathscr{N}(\varphi)$ 是 X 的线性子空间. 特别，如果 φ 还是 $X\to Y$ 上的双射，那末称 φ 是 $X\to Y$ 的线性同构(映射).

显然，$X\to Y$ 的线性同态 φ 是线性同构的充要条件是 $\mathscr{R}(\varphi)=Y$，并且 $\ker\varphi=\{0\}$. 当 φ 是 $X\to Y$ 的线性同构时，逆映射 φ^{-1} 必是 $Y\to X$ 的线性同构.

设 X、Y 是数域 $\mathbb{\Lambda}$ 上两个线性空间，如果存在一个 $X\to Y$ 的线性同构 φ，那末称 X、Y **线性同构**. 从代数的观点来看，两个线性同构的线性空间实质上具有相同的代数结构，因此在很多场合，常把线性同构的两个线性空间视为同一线性空间.

定理2　两个同为实或复的线性空间 X 和 Y 是线性同构的充要条件是它们的维数相同.

证明　必要性　假设 X 和 Y 是线性同构的，φ 是实现 $X\to Y$ 的一个线性同构. 令 A 是 X 的线性基，$B=\varphi(A)$ ($\varphi(A)=\{\varphi(x)|x\in A\}$)，显然 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{\varphi(A)}}=\overline{\overline{B}}$，因此只要证明 B 是 Y 的线性基即可. 事实上，对任何 $y\in Y$，记 $\varphi^{-1}(y)=x$，于是，存在 $x_1,\cdots,x_n\in A$; $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{\Lambda}$，使得

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i. \tag{2.7}$$

由(2.7)易知

$$y=\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(x_i)$$

但 $\varphi(x_i)\in B(i=1,2,\cdots,n)$，即 y 可用 B 中有限个向量的线性组合来表示. 又因 A 是 X 的线性无关集，易知 B 是 Y 的线性无关集，因而 B 是 Y 的线性基.

充分性　设 A、B 分别是 X、Y 的线性基，因为 $\overline{\overline{A}}=\dim X=\dim Y=\overline{\overline{B}}$，所以存在 A 到 B 的双射 ψ_0. 现将 ψ_0 线性地延拓到

[注]　严格地说，$\lambda\varphi(x_1)+\mu\varphi(x_2)$ 中的数乘运算和加法运算是指空间 Y 上的运算，这里我们仍用了和空间 X 上的数乘和加法一样的符号，相信不致引起读者的混淆.

X 上：对任何 $x\in X$，必唯一地存在 $x_1, \cdots, x_k\in A$ 以及全不为零的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k\in \mathbb{K}$，使得 $x=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i x_i$，规定

$$\psi(x)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\psi_0(x_i), \tag{2.8}$$

显然，$\mathscr{D}(\psi)=X$，ψ 是 ψ_0 的延拓，并且容易证明 ψ 就是 $X\to Y$ 的线性同构。证毕。

有限维线性空间 设 M_n 是 n 维线性空间，$\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是 M_n 的一个线性基，易知每个 $x\in M_n$，必可唯一地表示成

$$x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n,\ \lambda_i\in \mathbb{K}\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

(其中可能某些 $\lambda_i=0$)，称数组 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为 x 关于基 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的坐标。引入映射

$$\varphi: x\mapsto(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

易知 φ 是 M_n 到 n 维空间 C^n（当 M_n 是复空间）或 E^n（当 M_n 是实空间）的线性同构。

根据线性同构的两个线性空间可视为同一线性空间的道理，可以将任何 n 维实(或复)线性空间视为线性空间 E^n(或 C^n)。

在 C^n 或 E^n 中，向量族

$$e_1=(1, 0, 0, \cdots, 0),$$
$$e_2=(0, 1, 0, \cdots, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0, 0, 0, \cdots, 1)$$

是一个线性基、常称为标准基。

例 3 设 P 是多项式 $p(x)$ 全体按照通常的线性运算所成的线性空间，如果 A 表示函数集 $\{x^n|n=0, 1, 2, \cdots\}$，那末 A 是 P 的线性基。

例 4 区间 $[a, b]$ 上有界函数全体 $B[a, b]$ 按照通常的函数的加法以及函数与数的乘法成为线性空间。令 M 表示区间 $[a, \xi]$，$a\leqslant\xi\leqslant b$ 的特征函数 $\chi_{[a,\xi]}(\cdot)$ 全体。显然 $M\subset B[a, b]$。令 A 是区间 $[a, b]$ 上的左方连续的阶梯函数全体，那末 $\operatorname{span} A=M$。

例 5 设 $L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ 是一个常系数线性常微分方程．设 M 是方程 $L[y]=0$ 的解全体，易知 M 是线性空间，而且是 n 维空间．

设 $\{y_\nu\}$, $\nu=1, 2, \cdots, n$ 是适合初始条件

$$y_\nu^{(k)}(0)=\delta_{k,\nu},\quad k=0, 1, \cdots, n-1$$
$$(y_\nu^{(0)}=y_\nu)$$

的基本解组(其中当 $k=\nu$ 时 $\delta_{k,\nu}=1$，否则 $\delta_{k,\nu}=0$)，那末 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 成为 M 的一组线性基．

例 6 在线性空间 S(见例 1 后面)中，令 S_0 表示所有第一个分量为 0 的向量全体：

$$S_0=\{x\,|\,x=(0, x_1, x_2, \cdots)\}.$$

不难验证 S_0 是 S 的一个线性子空间．

固定自然数 k，S 中形如

$$(x_1, \cdots, x_k, 0, 0, \cdots)$$

(自第 $k+1$ 个分量起以后一切分量都是零)的向量全体构成 S 的线性子空间，并且它和 k 维线性空间 C^k 或 E^k(视 S 是复或实空间而定)线性同构．我们可以用这种办法把有限维线性空间“安装”到可列无限维空间 S 中去．

将来还将涉及到线性空间中一些其它概念，这里不拟一一叙述．

2. 度量线性空间

线性空间无疑是线性泛函分析的代数基础出发点．但是，还必须在线性空间上加入拓扑结构(极限结构)，并且使得代数结构中的加法运算和数乘运算在极限结构下是连续的，这样才真正成为线性泛函分析的出发点．如果极限是用距离给出的，即是所谓度量线性空间．这里不拟给出一般的度量线性空间(因为在本章中还要介绍更为一般的拓扑线性空间概念)，而只给出常用的两个特殊的度量线性空间，即赋准范线性空间和赋范线性空间．

3. 赋准范线性空间和赋范线性空间

今后我们总根据数域 Λ 是实的或复的，视 Λ 为度量空间 E^1

或 C^1.

定义 设 X 是数域 $\mathbb{A}$ 上线性空间，$\|\cdot\|$ 是 X 到实数域 $\mathbb{R}$ 的映射. 对任何 $x_n(n=1, 2, \cdots)$, y, $x\in X$, $\alpha_n(n=1, 2, \cdots)$, $\alpha\in\mathbb{A}$，如果满足

(1) $\|x\|\geqslant 0$，而 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) (三角不等式) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

(3) $\|-x\|=\|x\|$，并且 $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0$, $\lim\limits_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0$，那末称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的准范数，$\|x\|$ 是 x 的准范数. 如果条件(3)换成对任何 $x\in X$, $\alpha\in\mathbb{A}$：

(4) (绝对一次齐性) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$，

那末称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数，$\|x\|$ 是 x 的范数.

如果线性空间 X 上赋以准范数(或范数) $\|\cdot\|$，那末称 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋准范线性空间(或赋范线性空间).

显然，条件(4)成立时，条件(3)也必成立. 因而范数必是准范数.

定理 3 设 X 是赋准范 $\|\cdot\|$ 的线性空间，那末对任何 $x, y\in X$，规定 $\rho(x, y)=\|x-y\|$ 时，ρ 是 X 上的距离，并且满足

(v)[注] (平移不变性) 对任何 $x,y\in X$, $\rho(x,y)=\rho(x-y,0)$.

(vi) (连续性) 对任何 $\alpha_n(n=1,2,\cdots)$, $\alpha\in\mathbb{A}$, $x_n(n=1, 2, \cdots)$, $x\in X$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$，那末 $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\rho(\alpha_n x, 0)=0$, $\lim\limits_{\|x_n\|\to 0}\rho(\alpha x_n, 0)=0$.

反之，设 ρ 是线性空间 X 上的距离，并且满足(v), (vi)，如果对任何 $x\in X$，规定 $\|x\|=\rho(x, 0)$，那末 $\|\cdot\|$ 必是 X 上的准范数.

证明 设 $\|\cdot\|$ 是 X 上的准范数，当规定 $\rho(x, y)=\|x-y\|$ 时，显然由准范数的性质(1)可推出 ρ 满足距离的性质(i). 而对任何 $x, y, z\in X$，由准范数的性质(2)和(3)立即可知

[注] 因为对于 ρ 来说，它必具有距离的性质(i)～(iv)，为了统一起见，所以这里用了编号(v)、(vi).

$$\rho(x,\ y)=\|x-y\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|$$
$$=\|x-z\|+\|y-z\|=\rho(x,\ z)+\rho(y,\ z),$$

即 ρ 满足距离的性质(ii)，因而 ρ 是 X 上的距离. 显然，

$$\rho(x,\ y)=\|x-y\|=\|(x-y)-0\|=\rho(x-y,\ 0),$$
$$\rho(\alpha_n x,\ 0)=\|\alpha_n x\|,\ \rho(\alpha x_n,\ 0)=\|\alpha x_n\|,$$

由(3)可知，ρ 还满足(v)，(vi).

反之，假设 ρ 是 X 上满足(v)、(vi)的距离，当规定 $\|x\|=\rho(x,\ 0)$ 时，显然由距离的性质(i)可推出 $\|\cdot\|$ 满足(1). 由距离的三角不等式、对称性和(v)可推出

$$\|x+y\|=\rho(x+y,\ 0)=\rho(x,\ -y)$$
$$\leqslant\rho(x,\ 0)+\rho(0,\ -y)=\|x\|+\|y\|,$$

即 $\|\cdot\|$ 满足(2). 再由距离的对称性和平移不变性(v)可以推出

$$\|-x\|=\rho(-x,\ 0)=\rho(0,\ -x)=\rho(x,\ 0)=\|x\|.$$

显然，从(vi)可以推出 $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0,\ \lim\limits_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0$，从而 $\|\cdot\|$ 满足(3). 证毕.

下面是重要的推论.

系　设 ρ 是线性空间 X 上的距离，如果规定 $\|x\|=\rho(x,\ 0)$，那末 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数的充要条件是 ρ 在 X 上满足平移不变性(v)及

(vii)（一次绝对齐性）　对任何 $\alpha\in\mathbb{K}$ 和 $x\in X$，$\rho(\alpha x,\ 0)=|\alpha|\rho(x,\ 0)$.

这个推论是显然的，证明从略.

如果$(X,\ \|\cdot\|)$是赋准范(或赋范)线性空间，今后如无特别申明，总以 $\rho(x,\ y)=\|x-y\|$ 作为 X 上的距离，称 ρ 是由 $\|\cdot\|$ 导出的距离. 反之，如果线性空间上距离 ρ 满足(v)、(vi)(或(v)、(vii))，总以 $\|x\|=\rho(x,\ 0)$ 作为 X 上的准范数(或范数)，称 $\|\cdot\|$ 是由 ρ 导出的准范数(或导出的范数).

赋准范(或赋范)线性空间 X 上点列 $\{x_n\}$ 按距离收敛于 x，即 $\rho(x_n,\ x)=\|x_n-x\|\to 0$，也称作为 $\{x_n\}$ 按准范数(或范数)收敛

于 x.

在赋准范线性空间中，线性运算具有如下的连续性.

定理 4 设 X 是赋准范线性空间，如果点列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 分别收敛于 x、y，数列 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 分别收敛于 α、β，那末 $\{\alpha_n x_n+\beta_n y_n\}$ 必收敛于 $\alpha x+\beta y$.

证明 第一步先证 $\{x_n+y_n\}$ 收敛于 $x+y$. 由于

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|, \tag{2.9}$$

由此可知 $\{x_n+y_n\}$ 收敛于 $x+y$，即加法运算具有两元连续性.

第二步再证 $\{\alpha_n x_n\}$ 收敛于 αx，即证数乘运算具有两元连续性. 注意

$$\|\alpha x-\alpha_n x_n\|\leqslant\|\alpha x-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha_n x_n\|, \tag{2.10}$$

显然，如果 $\|\cdot\|$ 是范数，那末由一次绝对齐性立即可得 $\|\alpha x-\alpha_n x\|=|\alpha-\alpha_n|\,\|x\|\to 0$，$\|\alpha_n x-\alpha_n x_n\|=|\alpha_n|\,\|x-x_n\|\to 0$，从而 $\{\alpha_n x_n\}$ 收敛于 αx.

对于准范数 $\|\cdot\|$，证明要复杂一些. 根据准范数的性质(3)，显然 $\|\alpha x-\alpha_n x\|=\|(\alpha-\alpha_n)x\|\to 0$. 为了证明(2.10)中另一项 $\|\alpha_n x-\alpha_n x_n\|$ 也收敛于零，只要证明：对给定的 $x_n\to 0$ 的点列，和任何正数 M，$\|\alpha x_n\|\to 0$ 必对 $|\alpha|\leqslant M$ 一致地成立. 为此，令 $f_n(\alpha)=\|\alpha x_n\|$，由三角不等式，易知

$$|\|\alpha x_n\|-\|\alpha' x_n\||\leqslant\|(\alpha-\alpha')x_n\|,$$

从而对每个 n，$f_n(\alpha)$ 是 α 的连续函数. 然而固定每个 $\alpha\in\Lambda$，由假设 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=0$，即 $\{f_n(\alpha)\}$ 在 Λ 上处处收敛于零. 由 Егоров 定理，必存在一个具有正 Lebesgue 测度的集 A，使得 $\{f_n(\alpha)\}$ 在 A 上一致收敛于零. 利用 Lebesgue 测度对平移的连续性，必存在 $a_0>0$，当 $|a|\leqslant a_0$ 时，集 $A+a$ 与 A 的交集不空. 从而存在 α、$\alpha'\in A$，使得 $a=\alpha-\alpha'$. 又因为

$$f_n(a)=\|(\alpha-\alpha')x_n\|\leqslant\|\alpha x_n\|+\|\alpha' x_n\|=f_n(\alpha)+f_n(\alpha'),$$

由此可知 $\{f_n(a)\}$ 在 $|a|\leqslant a_0$ 上一致收敛于零. 取自然数 k，使得 $ka_0\geqslant M$，注意

$$f_n(ka)=\|kax_n\|\leqslant k\|ax_n\|=kf_n(a),$$

利用 $\{f_n(a)\}$ 在 $|a|\leqslant\alpha_0$ 上一致收敛于零，从上式可知 $\{f_n(a)\}$ 在 $|\alpha|\leqslant M$ 上也一致收敛于零.

先用第二步所证明的事实，然后再用第一步所证明的事实，立即知道 $\{\alpha_n x_n+\beta_n y_n\}$ 收敛于 $\alpha x+\beta y$. 证毕.

由定理 4 的证明可知有下面的系.

系 设 X 是赋准范线性空间，M 是给定的正数，则对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当 $\|x\|<\delta$ 时，对一切 $|\alpha|\leqslant M$，有 $\|\alpha x\|<\varepsilon$.

例 7 现在说明(证明是很容易的) §1 例 3～10 中的度量空间是赋准范或赋范空间的情况.

度量空间 C^n 或 E^n 上的

$$\|x\|=\rho(x,\ 0)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in C^n \text{ 或 } E^n$$

是范数，因而 C^n 或 E^n 都是赋范线性空间.

度量空间 R_1 上的

$$\|x\|=\rho(x,\ 0)=\frac{|x|}{1+|x|},\quad x\in R_1$$

是准范数(不是范数)，因而 R_1 是赋准范线性空间.

度量空间 $C^k[a,\ b]$ 上的

$$\|x\|=\rho(x,\ 0)=\max_{0\leqslant j\leqslant k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(j)}(t)|,\ x(t)\in C^k[a,\ b]$$

是范数，因而 $C^k[a,\ b]$ 是赋范线性空间.

度量空间 S 上的

$$\|x\|=\rho(x,\ 0)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i|}{1+|x_i|},$$

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)\in S,$$

是准范数(不是范数)，因而 S 是赋准范线性空间.

同样，$\mathscr{A}$, $C^\infty[a,\ b]$ 和 $S(E,\ \mu)$ 上的

$$\|f\|=\rho(f,\ 0)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{|z|\leqslant 1-\frac{1}{i}}\frac{|f(z)|}{1+|f(z)|},\quad f(z)\in\mathscr{A},$$

$$\|f\|=\rho(f,\ 0)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f^{(i)}(t)|}{1+|f^{(i)}(t)|},\ f(t)\in C^{\infty}[a,\ b],$$

$$\|f\|=\rho(f,\ 0)=\int_E\frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}d\mu(x),\ f(x)\in S(E,\ \mu),$$

都是准范数(不是范数)，因而 $\mathscr{A}$, $C^{\infty}[a,\ b]$和 $S(E,\ \mu)$等都是赋准范线性空间.

度量空间 $L^p(E,\ \mu)\ (0<p\leqslant 1)$上的

$$\|f\|=\rho(f,\ 0)=\int_E|f(x)|^p d\mu(x),\ f(x)\in L^p(E,\ \mu),$$

是准范数(而且具有 p 次绝对齐性，即对任何 $\alpha\in\mathbb{K}$, $f\in L^p(E,\ \mu)$, $\|\alpha f\|=|\alpha|^p\|f\|$)，因而 $L^p(E,\ \mu)$是赋准范线性空间. 当 $p=1$ 时，$L^p(E,\ \mu)$是赋范线性空间.

4. 次可加泛函和拟范数

再介绍两个与范数有关，并且在今后要用到的概念.

次可加泛函 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间，$p(\cdot)$是定义在 X 上的有限实函数. 如果对任何 $x,\ y\in X$，都有 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，那末称 $p(\cdot)$是 X 上的次可加泛函.

例如，由准范数和范数的三角不等式，易知它们都是次可加泛函.

拟范数 设X是线性空间，$p(\cdot)$是定义在 X 上的有限实函数，如果满足

(1) (非负性) 对任何 $x\in X$, $p(x)\geqslant 0$;

(2) (次可加性) 对任何 $x,\ y\in X$, $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$;

(3) (一次绝对齐性) 对任何 $x\in X$ 和 $\alpha\in\mathbb{K}$, $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$，那末称 $p(\cdot)$是 X 上的拟范数或半范数.

显然，X 上的拟范数 $p(\cdot)$成为 X 上的范数的充要条件是 $p(x)=0$ 等价于 $x=0$.

例如 X 是非空集，$F(X)$是定义在 X 上的有限函数全体. 任取 $x_0\in X$，规定

$$p(f)=|f(x_0)|,\ f\in F(X),$$

$p(\cdot)$便是 $F(X)$上的拟范数，但不是范数.

5. 商空间

设 X 是线性空间，L 是 X 的一个线性子空间. 在 X 中，任何两个向量 x 和 y，如果 $x-y\in L$[注]，那末规定 $x\sim y$，易知"$\sim$"是 X 上一个等价关系，我们在商集（见第一章 § 2）$X/\sim$ 上引入"线性运算"如下：

$$\begin{aligned}&\tilde{x}+\tilde{y}=\widetilde{x+y},\quad \tilde{x},\ \tilde{y}\in X/\sim,\\&\alpha\tilde{x}=\widetilde{\alpha x},\ \tilde{x}\in X/\sim,\ \alpha\in \mathbb{K}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

易知 $X/\sim$ 在运算(2.11)下成为线性空间，记为 X/L，称 X/L 是 X 关于 L 的商空间，作 $X\to X/L$ 的映射 $\tau: x\mapsto\tilde{x}$，称 τ 是自然映射.

显然，X/L 中的零向量 $\tilde{0}$ 所表示的等价类就是集 L，即 $\tilde{0}=L$. 直观地说，L 在商空间 X/L 中缩成了一点 $\tilde{0}$.

而自然映射 τ 是 $X\to X/L$ 的同态，并且核 $\ker\tau=L$.

例 8 设 $(X,\ \boldsymbol{R},\ \mu)$ 是测度空间，E 是可测集. $M'(E,\ \mu)$ 是 E 上可测函数全体，显然按通常的函数加法和数乘（即按例 2 中 (2.3) 式所规定的运算），$M'(E,\ \mu)$ 成为线性空间，令

$$L=\{f\mid f\in M'(E,\ \mu),\ f\underset{\mu}{=}0\},$$

易知 L 是 $M'(E,\ \mu)$ 的线性子空间. $M'(E,\ \mu)/L$ 是这样的线性空间：$M'(E,\ \mu)$ 中关于 μ 几乎处处相等的函数所成的等价类全体. 由于 $M'(E,\ \mu)$ 中两个关于 μ 几乎处处相等的函数 f 和 g 属于同一个等价类，即 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 在 $M'(E,\ \mu)/L$ 中是同一个向量，因此由(2.4)式所定义的线性空间 $M(E,\ \mu)$ 实际上就是 $M'(E,\ \mu)/L$.

例 9 设 $F(X)$ 是非空集 X 上所有有限函数全体所成的线性空间（见例 2），E 是 X 的任一非空真子集，$L=\{f\mid f(x)=0,\ x\in E\}$. 显然，$L$ 是 $F(X)$ 的线性子空间. 令 $F(E)$、$F(X-E)$ 分别是 E 和 $X-E$ 上有限函数全体，对任何 $f\in F(X)$，分别作 E、$X-E$ 上函数

[注] 当 $x-y\in L$ 时，有时也记为 $x\equiv y(\mathrm{mod}\,L)$.

$$
\begin{aligned}
&f_1(x)=f(x),\ x\in E,\\
&f_2(x)=f(x),\ x\in X-E.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

显然，$f_1\in F(E)$，$f_2\in F(X-E)$，并且

$$\varphi_2: f\mapsto f_2,\ f\in L, \tag{2.13}$$

是 $L\to F(X-E)$ 的线性同构，因而 L 与 $F(X-E)$ 线性同构. 又作

$$\varphi_1: f\mapsto f_1,\ f\in F(X), \tag{2.14}$$

显然，φ_1 是 $F(X)\to F(E)$ 的线性同态，而且 $\mathscr{R}(\varphi_1)=F(E)$，$\ker\varphi_1=L$，$F(X)/L$ 到 $F(E)=\mathscr{R}(\varphi_1)$ 的映射

$$\psi: \tilde{f}\mapsto f_1,\ f\in\tilde{f}\in F(X)/L, \tag{2.15}$$

易知 ψ 是 $F(X)/L\to F(E)$ 的线性同构. 因此在两个线性同构的线性空间可以视为同一的意义下，$F(X)/L=F(E)$.

当 $E=X$ 时，$L=\{0\}$，显然 $F(X)/L=F(E)$ 仍成立，而当 $E=\emptyset$ 时，如果规定 $L=F(X)$，$F(\phi)=0$，那末 $F(X)/L=F(E)$ 也成立.

定理 5 设 X 是赋范线性空间，L 是 X 的线性子空间，在商空间 X/L 上引入

$$p(\tilde{f})=\inf\{\|f\|\,|\,f\in\tilde{f}\in X/L\}, \tag{2.16}$$

那末 $p(\cdot)$ 必是 X/L 上的拟范数.

证明 $p(\cdot)$ 的非负性是显然的. 而对任何 $\alpha\in\Lambda$，$\tilde{f}\in X/L$，由于 $\widetilde{\alpha f}=\alpha\tilde{f}$，所以

$$
\begin{aligned}
p(\alpha\tilde{f})&=\inf\{\|g\|\,|\,g\in\widetilde{\alpha f}\}=\inf\{\|g\|\,|\,g\in\alpha\tilde{f}\}\\
&=\inf\{\|\alpha f\|\,|\,f\in\tilde{f}\}=|\alpha|\inf\{\|f\|\,|\,f\in\tilde{f}\}\\
&=|\alpha|p(\tilde{f}).
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

现在再证明 $p(\cdot)$ 满足次可加性：设 $\tilde{f}$、$\tilde{g}\in X/L$，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $f\in\tilde{f}$，$g\in\tilde{g}$，使得

$$p(\tilde{f})>\|f\|-\frac{\varepsilon}{2},\quad p(\tilde{g})>\|g\|-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.18}$$

因为 $f+g\in\tilde{f}+\tilde{g}$，所以

$$p(\tilde{f}+\tilde{g})\leqslant\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|<p(\tilde{f})+p(\tilde{g})+\varepsilon, \tag{2.19}$$

再令 $\varepsilon\to 0$, 立即得 $p(\tilde{f}+\tilde{g})\leqslant p(\tilde{f})+p(\tilde{g})$, 即 $p(\cdot)$是次可加的. 证毕.

称定理5中的$p(\cdot)$是$\|\cdot\|$在 X/L 上的诱导拟范数.

定理 6 设 X 是线性空间, $p(\cdot)$是 X 上的拟范数. 令 $L=\{x\,|\,p(x)=0\}$, 在商空间 X/L 上定义

$$\tilde{p}(\tilde{x})=p(x),\ x\in\tilde{x}\in X/L, \tag{2.20}$$

那末 $\tilde{p}(\cdot)$必是 X/L 上的范数.

证明 首先注意: 当 $p(x)=p(y)=0$ 时, 由一次绝对齐性和次可加性, 立即得到

$$0\leqslant p(\alpha x+\beta y)\leqslant p(\alpha x)+p(\beta y)\leqslant|\alpha|p(x)+|\beta|p(y)=0,$$

即 L 是线性空间. 当 x_1, $x_2\in\tilde{x}$ 时, $x_1-x_2\in L$, 因而

$$p(x_1)=p(x_2+(x_1-x_2))\leqslant p(x_2)+p(x_1-x_2)=p(x_2),$$

同样可得 $p(x_2)\leqslant p(x_1)$, 从而 $p(x_1)=p(x_2)$, 即由(2.20)式定义的 $\tilde{p}(\cdot)$的意义是确定的.

显然, $\tilde{p}(\cdot)$是非负的, 并且对任何 $\alpha\in\Lambda$, $x\in X$,

$$\tilde{p}(\alpha\tilde{x})=\tilde{p}(\widetilde{\alpha x})=p(\alpha x)=|\alpha|p(x)=|\alpha|\tilde{p}(\tilde{x}),$$

即 $\tilde{p}(\cdot)$具有一次绝对齐性. 而对任何 $\tilde{x}$, $\tilde{y}\in X/L$,

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\tilde{x}+\tilde{y})&=\tilde{p}(\widetilde{x+y})=p(x+y)\\&\leqslant p(x)+p(y)=\tilde{p}(\tilde{x})+\tilde{p}(\tilde{y}),\end{aligned}$$

即 $\tilde{p}(\cdot)$是次可加的, 因而 $\tilde{p}(\cdot)$是 X/L 上的拟范数. 如果 $\tilde{p}(\tilde{x})=0$, 那末

$$p(x)=\tilde{p}(\tilde{x})=0,$$

因而 $x\in L$, 即 $\tilde{x}=\tilde{0}$, 即 $\tilde{p}(\cdot)$还是 X/L 上的范数, 证毕.

称定理6中的 $\tilde{p}(\cdot)$是 X 上拟范数$p(\cdot)$在 $X/L(L=\{x\,|\,p(x)=0\})$上的诱导范数.

习 题

1. 在 E^n(或 C^n)中, 对任何 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 规定

$$\|x\|=\max(|x_1|,\cdots,|x_n|)\ \left(\text{或}=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right),$$

证明$\|\cdot\|$是E^n(或C^n)上的范数，并且$\{x^{(k)}\}$按$\|\cdot\|$收敛于x等价于$x^{(k)}$的每个坐标收敛于x的相应坐标.

又问：在标准基下，E^n(或C^n)中的集$\{x|\|x\|<1\}$是由哪些点构成的集合.

2．设$C(0, 1]$是$(0, 1]$上处处连续的有界函数全体，并按通常的函数加法和数乘成为线性空间，在$C(0, 1]$上规定

$$\|x\|=\sup_{0<t\leq 1}|x(t)|,\ x(t)\in C(0, 1].$$

证明：(i) $\|\cdot\|$是$C(0, 1]$上范数．(ii) $C(0, 1]$中点列$\{x_n(t)\}$按$\|\cdot\|$收敛于$x(t)$的充要条件是$\{x_n(t)\}$在$(0, 1]$上一致收敛于$x(t)$.

3．设L是线性空间X的线性子空间，证明：

$$\dim L+\dim X/L=\dim X\text{[注]}$$

4．设L_1、L_2是线性空间X的两个子空间，如果对任何$x\in X$，必存在$x_i\in L_i(i=1, 2)$使得$x=x_1+x_2$，那末称X是L_1和L_2的**线性和**，记为$X=L_1+L_2$．如果不仅$X=L_1+L_2$，并且$L_1\cap L_2=\{0\}$，那末称X是L_1、L_2的**直接和**，记为$X=L_1\dotplus L_2$.

证明：(i) 当$X=L_1+L_2$时，$\dim X\leq\dim L_1+\dim L_2$．(ii) 当$X=L_1\dotplus L_2$时，对于任何$x\in L$，必有唯一的$x_1\in L_1$，$x_2\in L_2$，使得$x=x_1+x_2$，并且还有$\dim X=\dim L_1+\dim L_2$.

5．设L_1、L_2是线性空间X的两个子空间，并且$X=L_1\dotplus L_2$，又设$\|\cdot\|_i(i=1, 2)$是L_i上的准范数(或拟范数，或范数)，对X中任何的$x=x_1+x_2$，其中$x_i\in L_i(i=1, 2)$，规定

$$\|x\|=\|x_1\|+\|x_2\|.$$

证明$\|\cdot\|$必是X上的准范数(或拟范数，或范数).

6．设X是线性空间，$\|\cdot\|_i(i=1, 2, \cdots, n)$都是$X$上准范数(或拟范数，或范数)，对任何$x\in X$，规定

$$\|x\|=\max(\|x\|_1, \cdots, \|x\|_n)$$

$$\left(\text{或}=\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

证明$\|\cdot\|$是X的准范数(或拟范数，或范数).

7．设$p(\cdot)$是范数$\|\cdot\|$在X/L上的诱导拟范数，证明：$p(x)=0$的充要条件是对任何$x\in X$，必存在L中点列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

[注] 势α、β的“和”$\alpha+\beta$表示和集$C=A\cup B$的势，其中$\overline{\overline{A}}=\alpha$，$\overline{\overline{B}}=\beta$，而且$A\cap B=\emptyset$.

§3 常用的赋范线性空间

这一节主要是给出在分析数学领域中较常用到的一些赋范线性空间。为系统起见，也将§2中两个重要的赋范线性空间一并列入.

1. n 维实(或复)欧几里德空间 E^n(或 C^n)

设 $E^n=\{x\,|\,x=(x_1, \cdots, x_n),\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1, 2, \cdots, n\}$(或 $C^n=\{x\,|\,x=(x_1, \cdots, x_n),\ x_i\in\mathbb{C},\ i=1, 2, \cdots, n\}$). 对任何 x, 规定

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1}$$

$\|\cdot\|$ 是范数. 点列 $\{x^{(k)}\}$ 按 $\|\cdot\|$ 收敛于 x 的充要条件是 $\{x^{(k)}\}$ 的每个坐标收敛于 x 的相应坐标. 今后分别简记 $(E^n, \|\cdot\|)$、$(C^n, \|\cdot\|)$ 为 E^n、C^n.

2. 赋范线性空间 $C^k[a, b]$

$C^k[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上具有 k 阶连续导函数的函数全体按通常函数加法和数乘所成的线性空间, 对任何 $f\in C^k[a, b]$, 规定

$$\|f\|=\max_{0\leq j\leq k}\max_{a\leq t\leq b}|f^{(j)}(t)|, \tag{3.2}$$

$\|\cdot\|$ 是范数. 点列 $\{f_n\}$ 按 $\|\cdot\|$ 收敛于 f 的充要条件是对任何 j, $\{f_n^{(j)}(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f^{(j)}(x)$.

3. 赋范线性空间 $C^k(\Omega)$ 和 $C_0^k(\Omega)$

设 Ω 是 n 维实欧几里德空间上一区域, $C^k(\Omega)$ 是 Ω 上具有有界连续的 k 阶各类偏导数的函数全体按通常函数加法和数乘所成的线性空间. 用 $p=(p_1, \cdots, p_n)$ 表示非负整数组, $|p|=\sum_{i=1}^{n}p_i$. 对任何 $f\in C^k(\Omega)$, 规定

$$\|f\|=\sum_{|p|\leq k}\sup_{x\in\Omega}|D^pf(x)| \tag{3.3}$$

其中 $D^p=\dfrac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}}$, $x=(x_1, \cdots, x_n)$. 易知 $\|\cdot\|$ 是 $C^k(\Omega)$ 上范数. $C^k(\Omega)$ 中点列 $\{f_n\}$ 按 $\|\cdot\|$ 收敛于 f 的充要条件是对任

何 $|p|\leqslant k$, $\{D^p f_n(x)\}$ 在 Ω 上一致收敛于 $D^p f(x)$. 今后简记 $(C^k(\Omega), \|\cdot\|)$ 为 $C^k(\Omega)$.

特别, $C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\Omega)$ 中对一切 $|p|\leqslant k$ 满足条件

$$\lim_{x\to\partial\Omega}|D^p f(x)|=0$$

的函数全体. 显然 $C_0^k(\Omega)$ 是 $C^k(\Omega)$ 的线性子空间, 因而 $(C_0^k(\Omega), \|\cdot\|)$ 也是赋范线性空间. 今后简记为 $C_0^k(\Omega)$.

4. 赋范线性空间 $C^{k+\alpha}(\Omega)$

设 Ω 是 n 维实欧几里德空间上一个区域, k 是非负整数, 并且 $0<\alpha<1$. $C^{k+\alpha}(\Omega)$ 是 Ω 上具有有界的并且有 α 次 Holder 连续性的 k 阶各类偏导数的函数全体, 即当 $f\in C^{k+\alpha}(\Omega)$ 时, 存在常数 $K(f)$, 使得对任何 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, \cdots, y_n)\in\Omega$,

$$|D^p f(x_1, \cdots, x_n)-D^p f(y_1, \cdots, y_n)|$$
$$\leqslant K(f)\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \ |p|\leqslant k. \tag{3.4}$$

易知 $C^{k+\alpha}(\Omega)$ 中函数全体按通常函数加法和数乘成为线性空间. 令 $H_{\alpha,k}(f)$ 表示适合 (3.4) 的 $K(f)$ 的最小值, 对任何 $f\in C^{k+\alpha}(\Omega)$, 规定

$$\|f\|=\sum_{|p|\leqslant k}\sup_{x\in\Omega}|D^p f(x)|+H_{\alpha,k}(f), \tag{3.5}$$

不难验证 $(C^{k+\alpha}(\Omega), \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 今后简记为 $C^{k+\alpha}(\Omega)$.

如令 $\beta=k+\alpha$, 那末 $C^k(\Omega)$ 和 $C^{k+\alpha}(\Omega)$ 就可统一地写成 $C^\beta(\Omega)$. 当 β 是非负整数时, 范数取为 (3.3); 当 β 不是整数时, 范数取为 (3.5).

5. 赋范线性空间 $B(X)$

设 X 是非空集, $B(X)$ 是 X 上有界函数全体按通常的函数加法和数乘所成的线性空间. 对任何 $f\in B(X)$, 规定

$$\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|, \tag{3.6}$$

易知 $\|\cdot\|$ 是 $B(X)$ 上的范数. 并且 $B(X)$ 中点列 $\{f_n\}$ 按 $\|\cdot\|$ 收敛于 f 的充要条件是函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$. 今后简记 $(B(X), \|\cdot\|)$ 为 $B(X)$.

6. 赋范线性空间 $V[a, b]$ 和 $V_0[a, b]$

$V[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上有界变差函数全体按通常函数加法和数乘所成的线性空间，对任何 $f\in V[a, b]$，规定

$$\|f\|=|f(a)|+\bigvee_a^b(f) \tag{3.7}$$

易知 $\|\cdot\|$ 是 $V[a, b]$ 上范数，并且 $\{f_n\}$ 按 $\|\cdot\|$ 收敛于 f 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)=f(a)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\bigvee_a^b(f_n-f)=0$. 今后简记 $(V[a, b], \|\cdot\|)$ 为 $V[a, b]$.

如令 $V_0[a, b]=\{f\,|\,f(a)=0, f$ 在 (a, b) 上右连续, $f\in V[a, b]\}$，显然，$V_0[a, b]$ 是 $V[a, b]$ 的线性子空间，因而 $(V_0[a, b], \|\cdot\|)$ 也是赋范线性空间，简记为 $V_0[a, b]$.

为了下面的需要，我们先介绍几个重要的不等式.

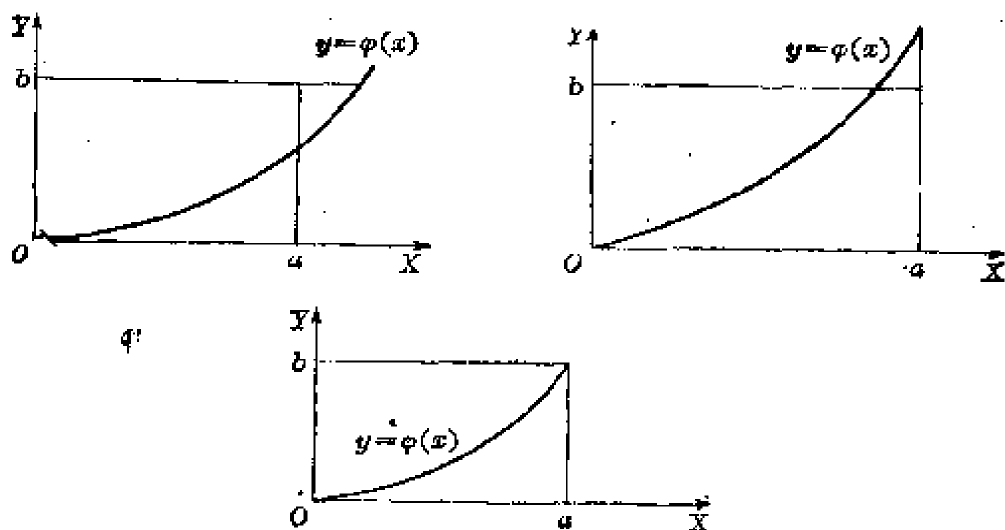
7. Young 不等式

设 φ 是 $[0, \infty)$ 上严格单调增加的连续函数，而且 $\varphi(0)=0$. 从下图可以看出，下述不等式成立：

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx+\int_0^b \varphi^{-1}(y)dy\geqslant ab,\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0). \tag{3.8}$$

不等式(3.8)称为 **Young** 不等式. (3.8)式中等号成立的充要条件是 $b=\varphi(a)$.

利用 Young 不等式可以得到许多其它的重要不等式. 例如,



取 $\varphi(x)=x^{p-1}(p>1)$，此时 $\varphi^{-1}(y)=y^{q-1}$，此地 $q=\dfrac{p}{p-1}$，由(3.8)得到

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q};\ \ a\geqslant 0,\ \ b\geqslant 0,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{3.9}$$

(3.9)中等号成立的充要条件是 $a^p=b^q$.

8. Hölder 不等式

设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，E 是可测集，f、g 是 E 上两个可测函数，如果 f 在 E 上 $p(p>1)$ 次可积，g 在 E 上 $q\left(q>1,\right.$ 并且 $\left.\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$ 次可积，则 fg 必在 E 上可积，并且

$$\left|\int_E f(x)g(x)d\mu(x)\right|\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.10}$$

(3.10)称为 Hölder 不等式.

如记 $f(x)g(x)=e^{i\theta(x)}|f(x)||g(x)|$，那末(3.10)中等号成立的充要条件是 $\theta(x)$ 在 E 上几乎处处等于一个常数 θ_0，并且 $|f(x)|^p$ 与 $|g(x)|^q$ 之比在 E 上几乎处处是常数.

事实上，当 $\|f\|_p=\left(\int_E|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$、$\|g\|_q=\left(\int_E|g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$ 中有一个为零时，易知必有 $f(x)g(x)\doteq 0$，从而(3.10)成立. 所以不妨设 $\|f\|_p\neq 0$, $\|g\|_q\neq 0$. 令 $\varphi=f/\|f\|_p$, $\psi=g/\|g\|_q$, 利用(3.9)就得到

$$\begin{aligned}\left|\int_E\varphi(x)\psi(x)d\mu(x)\right|&\leqslant\int_E|\varphi(x)||\psi(x)|d\mu(x)\\&\leqslant\int_E\left(\frac{|\varphi(x)|^p}{p}+\frac{|\psi(x)|^q}{q}\right)d\mu(x)\\&=1.\end{aligned} \tag{3.11}$$

由(3.11)立即得到(3.10).

显然，使(3.10)中等号成立的充要条件是(3.11)的前两式中等号都成立，而第一个等号成立的充要条件是 $\theta(x)$ 在 $E(fg\neq 0)$

上几乎处处等于一个常数，当 $\theta(x)$ 在 E 上几乎处处是常数（见[注]）时，根据 (3.9)，第二个等号成立的充要条件是 $|\varphi(x)|^p$、$|\psi(x)|^q$ 在 E 上几乎处处相等．而 $|\varphi(x)|^p \doteq |\psi(x)|^q$ 的充要条件是 $|f(x)|^p$ 与 $|g(x)|^q$ 之比几乎处处等于一个常数（其实这个常数就是 $\|f\|_p^p$ 与 $\|g\|_q^q$ 的比值）．

由积分形式的 Hölder 不等式，立即可以推出序列形式的 Hölder 不等式．

序列形式的 Hölder 不等式 设 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 分别满足 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q<\infty$，并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n$ 必绝对收敛，并且

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n\right|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.10$'$}$$

如记 $x_ny_n=e^{i\theta_n}|x_n||y_n|$，则(3.10)′中等号成立的充要条件是 $\theta_1=\theta_n(n\geqslant2)$，并且对一切 n，$|x_n|$ 与 $|y_n|$ 之比是同一个常数．

9．Schwarz(或 Cauchy)不等式

$p=q=2$ 时的 Hölder 不等式特别称为Schwarz(或 Cauchy)不等式．

10．Minkowski 不等式

设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，E 是可测集，f、g 都是 E 上 p 次 $(p\geqslant1)$可积函数，则 $f+g$ 必在 E 上 p 次可积，并且

$$\left(\int_E|f(x)+g(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.12}$$

称(3.12)为 Minkowski 不等式．当 $p>1$ 时，(3.12)中等号成立的充要条件是存在两个不全为零的非负常数 c_1、c_2，使得 $c_1f(x)\doteq c_2g(x)$．当 $p=1$ 时，等号成立的充要条件是 $\arg f(x)\doteq\arg g(x)$．

事实上，当 $p=1$ 时，(3.12)显然成立，所以不妨设 $p>1$

[注] 对于使得 $f(x)g(x)=0$ 的点 x，$\theta(x)$ 允许任意取适当值．

由于 $|f(x)|^p$，$|g(x)|^p$ 可积，并且

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant (|f(x)|+|g(x)|)^p \leqslant 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p),\ (p\geqslant 1),$$

所以 $f+g$ 在 E 上仍是 p 次可积．注意到 $|f(x)+g(x)|^{p/q}$ 是 E 上 q 次可积函数，利用 Hölder 不等式和 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，得到

$$\begin{aligned}
&\int_E |f(x)+g(x)|^p\, d\mu(x) \\
&=\int_E |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\, d\mu(x) \\
&\leqslant \int_E (|f(x)|+|g(x)|)\,|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\, d\mu(x) \\
&\leqslant \left[\left(\int_E |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E |g(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&\quad\times\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

如果 $\|f+g\|=\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}=0$，显然(3.12)成立．今不妨设 $\|f+g\|\neq 0$，这时，在(3.13)两边除以 $\|f+g\|^{p/q}$ 后，立即得到(3.12)．

显然，(3.12) 中等号成立的充要条件是 (3.13) 的后两个不等式中等号都成立．由 Hölder 不等式中等号成立的充要条件知道，当 $p>1$ 时，(3.13) 的后一不等式中等号成立的充要条件是 $|f(x)|^p$、$|g(x)|^p$ 与 $|f(x)+g(x)|^p$ 之比分别都为常数，从而 $|f(x)|^p$ 与 $|g(x)|^p$ 之比为常数，即 $|f(x)|$ 与 $|g(x)|$ 之比为常数，再考虑到 (3.13) 中第一个不等式成为等式的条件，可以知道当 $p>1$ 时，(3.12) 中等号成立的充要条件是存在两个不全为零的非负常数 c_1、c_2，使得 $c_1 f(x)=c_2 g(x)$．

当 $p=1$ 时，易知等号成立的充要条件是 $\arg f(x) \doteq \arg g(x)$．

同样，由积分形式的 Minkowski 不等式立即可以推出序列形式的不等式．

序列形式的 Minkowski 不等式　设 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p<\infty(p\geqslant1)$，则 $\{x_n+y_n\}$ 必也满足 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p<\infty$，并且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.12$'$}$$

当 $p>1$ 时，(3.12)′ 中等号成立的充要条件是存在两个不全为零的非负常数 c_1、c_2，使得 $c_1x_n=c_2y_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$。当 $p=1$ 时，等号成立的充要条件是 $\arg x_n=\arg y_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$。

11．赋范线性空间 $L^p(E,\ \mu)(p\geqslant1)$

设 $(X,\ \boldsymbol{R},\ \mu)$ 是测度空间，E 是可测集．$L^p(E,\ \mu)$ 表示 E 上可测并且 p 次可积的函数全体，显然，它按通常的函数加法和数乘成为线性空间(两个几乎处处相等的函数视为同一函数)．对任何 $f\in L^p(E,\ \mu)(p\geqslant1)$，规定

$$\|f\|=\left(\int_E|f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.14}$$

那末 $(L^p(E,\ \mu),\ \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间．

事实上，$\|\cdot\|$ 的非负性，$\|f\|=0$ 等价于 $f=0$[注] 以及 $\|\cdot\|$ 满足一次绝对齐性等都是明显的．而 Minkowski 不等式保证了 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式．今后简记 $(L^p(E,\ \mu),\ \|\cdot\|)(p\geqslant1)$ 为 $L^p(E,\ \mu)$，特别，用 $L(E,\ \mu)$ 表示 $L^1(E,\ \mu)$．

注意，$L^p(E,\ \mu)(0<p<1)$(见§1 例 10)只是赋准范线性空间，不是赋范线性空间，而 $L^p(E,\ \mu)(p\geqslant1)$ 才是赋范线性空间(自然也是赋准范线性空间)．如果 E 上一列可测函数 $\{f_n\}$ 按 $L^p(E,\ \mu)(p>0)$ 中距离收敛于 f，那末称 $\{f_n\}$ p 次平均收敛于 f．

12．赋范线性空间 $l^p(p\geqslant1)$

l^p 是满足条件 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty$ 的数列 $\{x_n\}$ 全体，按通常的数列

[注]　$f=0$ 并不是指 $f(x)$ 处处等于 0，而是指向量 f 是零向量 0，即 $f(x)\doteq0$．

加法和数乘所成的线性空间. 对 l^p 中任何 $x=\{x_n\}$, 规定

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.15}$$

由 Minkowski 不等式, 易知$(l^p, \|\cdot\|)(p\geqslant 1)$是赋范线性空间, 今后简记为 $l^p(p\geqslant 1)$, 特别, 用 l 表示 l^1, 并常将 l^p 中向量 $x=\{x_n\}$ 表示成 $x=(x_1, \cdots, x_n, \cdots)$.

同样, 在 n 维空间 $M^n=\{x|x=(x_1, \cdots, x_n), x_i\in\mathbb{A}, i=1, \cdots, n\}$ 上, 对任何 x, 规定

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, (p\geqslant 1),$$

称 $\|\cdot\|$ 是 n 维空间上的 Minkowski 范数 (或 Minkowski 距离), 而称$(M^n, \|\cdot\|)$为 Minkowski 空间, 简记为 M^n, M^n 上点列 $\{x^{(k)}\}$ 按 $\|\cdot\|$ 收敛于 x 的充要条件是 $x^{(k)}$ 的每个坐标收敛于 x 的相应坐标.

13. 赋范线性空间 $L^\infty(E, \mu)$

设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间, E 是可测集, $L^\infty(E, \mu)$是 E 上具有下列性质的可测函数全体: 除去 E 中一个零测度子集 E_f, 可测函数 f 在 $E-E_f$ 上是有界的. 我们称这种函数为本质有界函数, 而称 $L^\infty(E, \mu)$为本质有界可测函数空间. 如果 $f, g\in L^\infty(E,\mu)$, $\alpha, \beta\in\mathbb{A}$, 显然, 除去零集 $E_f\cup E_g$ 外, $\alpha f+\beta g$ 在 $E-(E_f\cup E_g)$ 上是有界函数, 即 $\alpha f+\beta g\in L^\infty(E, \mu)$, 所以 $L^\infty(E, \mu)$按普通函数加法和数乘成为线性空间($L^\infty(E, \mu)$中两个几乎处处相等的函数视为同一函数), 对任何 $f\in L^\infty(E, \mu)$, 规定

$$\|f\|=\inf_{\substack{\mu(E_f)=0\\E_f\subset E}}\sup_{x\in E-E_f}|f(x)| \tag{3.16}$$

称 $\|f\|$ 是 f 的本质最大模, 它又常记为 $\operatorname*{ess\,sup}_x|f(x)|$. 不难证明, f 的本质最大模 $\|f\|$ 是这样的一个数(即它的特征): 集$\{x||f(x)|>\|f\|, x\in E\}$ 是零测度集, 而对任何 $\varepsilon>0$, 集 $\{x||f(x)|>\|f\|-\varepsilon, x\in E\}$ 是正测度集. 因而如记 $E_0=\{x||f(x)|>\|f\|, x\in E\}$, 则 $\|f\|=\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|$. 显然, $\|\cdot\|$ 是非负的, $\|f\|=0$ 等价于 $f\doteq 0$

(即 $f(x)\doteq 0$)，并且 $\|\cdot\|$ 具有一次绝对齐性．再利用本质最大模的特征，易证 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式．因此 $(L^{\infty}(E,\mu),\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，今后简记为 $L^{\infty}(E,\mu)$．

注意，当 $\mu(E)<\infty$，$f\in L^{\infty}(E,\mu)$ 时，容易证明：对任何 $p>0$，$|f|^p$ 是可积函数，并且

$$\|f\|=\lim_{p\to\infty}\left(\int_E|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.\tag{3.17}$$

如果 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(E,\mu)$ 上范数，$\|\cdot\|_\infty$ 表示 $L^{\infty}(E,\mu)$ 上的范数，(3.17)便是 $\|f\|_\infty=\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p$．

14．赋范线性空间 l^{∞}

设 l^{∞} 是有界数列 $\{x_n\}$ 全体按通常数列加法和数乘所成的线性空间，对任何 $x=\{x_n\}\in l^{\infty}$，规定

$$\|x\|=\sup_n|x_n|.\tag{3.18}$$

可由 $L^{\infty}(E,\mu)$ 的结论推出(也可直接证明) $\|\cdot\|$ 是 l^{∞} 上的范数．简记 $(l^{\infty},\|\cdot\|)$ 为 l^{∞}．

今后将 $L^{\infty}(E,\mu)$、l^{∞} 分别统一地写成 $L^p(E,\mu)$，$l^p(p=\infty)$．

15．赋范线性空间 C 和 C_0

设 C 是一切收敛数列 $\{x_n\}$ 全体按通常数列的加法和数乘所成的线性空间，对任何 $x=\{x_n\}\in C$，规定

$$\|x\|=\sup_n|x_n|.\tag{3.19}$$

易证 $\|\cdot\|$ 是 C 上范数，今后简记 $(C,\|\cdot\|)$ 为 C．

特别，C_0 是 C 中一切收敛于零的数列 $\{x_n\}$ 全体，显然，C_0 是 C 的子空间，因而 $(C_0,\|\cdot\|)$ 也是赋范线性空间，简记为 C_0．

16．赋范线性空间 $V[a,b]$、$V_0[a,b]$

设 $V[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上有界变差函数全按通常函数的线性运算所成的线性空间．对每个 $f\in V[a,b]$，规定

$$\|f\|=|f(a)|+\bigvee_a^b(f).$$

易知 $V[a, b]$ 按 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间，简记为 $V[a, b]$.

$V_0[a, b]$ 是 $V[a, b]$ 的满足 $f(a)=0$, f 在 (a, b) 上右连续的函数全体，易知 $V_0[a, b]$ 是 $V[a, b]$ 的线性子空间，因而按上述范数也成为赋范线性空间.

在微分方程理论中，还常用到一个重要的赋范线性空间——Соболев 空间，我们将在 §5 中介绍. 下面我们再讨论 p 方平均收敛和度量收敛的关系.

17. p 方平均收敛与度量收敛

定理 1 设 $\{f_n\}$ 是 $L^p(E,\mu)$ $(\infty>p>0)$ 中点列，按 $L^p(E,\mu)$ 中距离收敛于 f，那末函数列 $\{f_n(x)\}$ 必在 E 上度量收敛于 $f(x)$.

证明 对任何 $\sigma>0$,

$$\begin{aligned}&\int_E |f_n(x)-f(x)|^p d\mu(x)\\ \geqslant &\int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)} |f_n(x)-f(x)|^p d\mu(x)\\ \geqslant &\sigma^p\mu(E(|f_n-f|\geqslant\sigma)),\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，就有 $\mu(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))\to 0$. 证毕.

系 设 $\{f_n\}$ 是 $L^p(E, \mu)$ $(\infty>p>0)$ 中点列，按 $L^p(E, \mu)$ 中距离收敛于 f，那末必有子点列 $\{f_{n_\nu}(x)\}$ 在 E 上(关于 μ)几乎处处收敛于 $f(x)$.

由定理 1 和 Riesz 定理(见第三章 §4)，立即可得本推论. 注意，定理 1 的逆命题不成立. 下面是一例.

例 取 $[0, 1]$ 上一列函数 $\{f_n(x)\}$ 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1 \text{ 或 } x=0,\\[2ex] e^n, & \text{当 } 0<x<\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

显然，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上处处收敛于零，然而对任何 $p>0$,

$$\int_0^1 |f_n(x)|^p dx=\int_0^{\frac{1}{n}} e^{pn} dx=\frac{1}{n}e^{pn}\to\infty,\ (n\to\infty).$$

所以 $\{f_n(x)\}$ 关于 Lebesgue 测度并不在 $[0, 1]$ 上 p 方平均收敛

于 0.

习　题

1. 设 n 是自然数，$p=(p_1,\cdots,p_n)$ 是自然数组，$C(p)$ 是仅依赖于 p 的正数. 对任何 $f\in C^k(\Omega)$，规定

$$\|f\|_{C(p)}=\sum_{|p|\leqslant k}\sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega}C(p)\,|D^pf(x_1,\cdots,x_n)|.$$

证明 $\|\cdot\|_{C(p)}$ 是 $C^k(\Omega)$ 上的范数.

2. 给出 $L^p(E,\mu)$ $(1>p>0)$ 中两个向量 f、g 满足

$$\|f+g\|=\|f\|+\|g\|$$

的充要条件.

3. 利用积分形式的 Hölder 不等式，Minkowski 不等式直接推出序列形式的 Hölder 不等式，Minkowski 不等式.

4. 设 $\{f_n\}$ 是 $L^\infty(E,\mu)$ 中一列向量，证明 $\{f_n\}$ 按 $L^\infty(E,\mu)$ 中范数收敛（即本质一致收敛）于 f 的充要条件是存在 E 的测度为零的子集 E_1，$\{f_n(x)\}$ 在 $E-E_1$ 上一致收敛于 $f(x)$.

5. 设 D_r 是平面上的圆：$D_r=\{z\,|\,|z|<r\}$，$\mathscr{A}(D_r)$ 是 D_r 上解析函数全体按通常的函数加法和数乘所成的线性空间，对任何 $f\in\mathscr{A}(D_r)$，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

是 f 在 D_r 上的 Taylor 展开，当 $r>1$ 时，规定

$$\|f\|=\sup_n|a_n|$$

证明 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{A}(D_r)$ 上范数，并且 $\mathscr{A}(D_r)$ 中 $\{f_n(z)\}$ 在 D_r 上内闭一致收敛于 $f(z)$ 时，必按 $\|\cdot\|$ 收敛.

6. 设 P^n 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的不超过 n 阶的多项式全体，按通常函数加法和数乘成为线性空间，对任何 $p\in P^n$，$p(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_it^i$，规定

$$\|p\|_1=\max_i|a_i|,$$

$$\|p\|_2=\sum_{i=0}^{n}|a_i|.$$

证明 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 都是 P^n 上的范数，并且 $\{p_k\}$ 按 $\|\cdot\|_1$ 或 $\|\cdot\|_2$ 收敛于 p 的充要条件是 $\{p_k(t)\}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上内闭一致收敛于 $p(t)$.

又在 P^n 上规定两个元 p、q 的乘法运算如下：$p\cdot q$ 是去掉多项式 $p(t)q(t)$ 中高于 n 阶的项（即只保留 $p(t)q(t)$ 中不超过 n 阶的项）. 证明 $p\cdot q=q\cdot p$；对任何 $\alpha\in\mathbb{K}$，$(\alpha f)\cdot g=\alpha(f\cdot g)$；$f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h$，并且 $\|p\cdot q\|_2\leqslant\|p\|_2\|q\|_2$，

但是 $\|p\cdot q\|_1\leqslant\|p\|_1\|q\|_1$ 不成立.

7. 证明 Minkowski 空间 M^n 中点列 $\{x^{(k)}\}$ 按范数收敛于 x 的充要条件是 $x^{(k)}$ 的每个坐标收敛于 x 相应的坐标.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列同为实或复的赋范线性空间, $x=\{x_n\}$ 是一列元, $x_n\in X_n(n=1, 2, \cdots)$, 令 X 是满足下列条件的序列全体: $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<\infty$. 如果对 X 中任何两个元 $x=\{x_n\}$, $y=\{y_n\}$ 以及 $\alpha, \beta\in\mathbb{K}$, 规定

$$\alpha x+\beta y=\{\alpha x_n+\beta y_n\},$$

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明 X 是线性空间, $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.

9. 证明(3.17)式.

10. 对任何 $f\in L^\infty(E, \mu)$, 证明必存在 E_0, $\mu(E_0)=0$, 使得

$$\|f\|=\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|.$$

§4 度量空间中点集和连续映射

现在我们回过来再讨论度量空间的一般性质, 主要是将直线上有界集、极限点、环境、开集、闭集以及连续函数等最基本的概念推广到度量空间. 这里许多结果的证明和直线的情形差不多是一样的, 因此绝大多数的证明都被略去, 但希读者逐一加以补全, 这对今后能熟练地运用这些概念和结论是必不可少的.

为书写简单起见, 今后常用"X 是度量空间"代替"(X, ρ)是度量空间", 即不再明显地写出距离 ρ.

1. 有界集

定义 设 X 是度量空间, A 是 X 的子集, 如果存在数 M 和点 x_0, 使得任何 $x\in A$, $\rho(x, x_0)\leqslant M$, 称 A 是 X 上的有界集.

定理 1 下列命题成立:

(1) A 是度量空间 X 上的有界集的充要条件是对任何 $x_1\in X$, 必存在数 M_1, 使得任何 $x\in A$, $\rho(x, x_1)\leqslant M_1$.

(2) 如果 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 上收敛点列, 那末由点列 $\{x_n\}$ 中元素全体所成的集必是有界集.

证明　(1) 充分性是显然的. 今证必要性如下: 因为 A 是有界集, 所以存在 $x_0\in X$ 和数 M, 使得 $\rho(x, x_0)\leqslant M$ 对一切 $x\in A$ 成立, 从而对任何 $x_1\in X$,

$$\rho(x, x_1)\leqslant\rho(x, x_0)+\rho(x_0, x_1),\ x\in A. \tag{4.1}$$

因而只要取 $M_1=M+\rho(x_0, x_1)$ 即可得到 $\rho(x, x_1)\leqslant M_1$ 对一切 $x\in A$ 成立.

(2) 设 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 因而对 $\varepsilon=1$, 存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时,

$$\rho(x_n, x)\leqslant 1, \tag{4.2}$$

从而只要取 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(1, \rho(x_i, x))$, 易知对一切 $x_k(k=1, 2, \cdots)$ 都有 $\rho(x_k, x)\leqslant M$, 即 A 是有界集. 证毕.

例如在度量空间 E^1 中, 集 $[0, 1]$ 是有界集, 但 $(-\infty, \infty)$ 并不是 E^1 上的有界集 (即全空间不是有界集). 然而在度量空间 R_1 上, $(-\infty, \infty)$ 是有界集, 即全空间是有界集.

2. 内点、开集

定义　设 X 是度量空间, $x_0\in X$, $r>0$, 分别称集 $O(x_0, r)=\{x|\rho(x, x_0)<r\}$ 为 X 的以 x_0 为球心, r 为半径的开球. 设 A 是 X 中的点集, $x_0\in A$, 并且存在 $\alpha>0$, 使得 $O(x_0, \alpha)\subset A$, 称 x_0 是 A 的内点. 设 G 是度量空间 X 中的点集, 如果 G 中每点都是 G 的内点, 那末称 G 是开集. 规定空集 $\emptyset$ 是开集.

显然, 开球必是开集. 事实上, 设 $O(x_0, r)$ 是 X 的一个开球, 对任何 $x_1\in O(x_0, r)$, 因为 $\rho(x_1, x_0)<r$, 所以有正数 $\varepsilon<r-\rho(x_1, x_0)$, 当 $z\in O(x_1, \varepsilon)$ 时, 总有

$$\rho(z, x_0)\leqslant\rho(z, x_1)+\rho(x_1, x_0)<\varepsilon+\rho(x_1, x_0)<r,$$

因而 $O(x_1, \varepsilon)\subset O(x_0, r)$, 即 z 是 $O(x_0, r)$ 的内点. 但 z 是任取的, 从而 $O(x_0, r)$ 是开集.

例如, 在 E^1 中的 $O(x_0, r)$ 就是 (x_0-r, x_0+r); 而在 $C[a, b]$ 中, $O(x_0, r)$ 就是 $\{x(t)\,|\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-x_0(t)|<r\}$; 又如在 R_1 中, $O(x_0, 1)=R_1$.

和直线一样, 对度量空间上的开集有下列定理.

定理 2 设 X 是度量空间，那末

(1) 空集和全空间是开集；

(2) 任意个开集的和是开集；

(3) 有限个开集的交是开集.

定理 2 的证明和直线上情况相仿，这里从略.

3. 邻域(环境)

定义 设 X 是度量空间，$x_0\in X$，称包含 x_0 的任何开集 G 为 x_0 的一个环境，也称作 x_0 的一个邻域. 特别，对任何 $\alpha>0$，称 $O(x_0, \alpha)$ 为 x_0 的 α-环境(或 α-邻域).

可以用环境概念来描述点列的收敛.

引理 1 设 $\{x_n\}$ 是度量空间中一列点，那末 $\{x_n\}$ 收敛于 x 的充要条件是对于 x 的任何环境 $O(x)$，必存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$x_n\in O(x)$.

证明 必要性 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$，$O(x)$ 是 x 的任一环境. 由于 x 是 $O(x)$ 的内点，所以存在 $\varepsilon>0$，使得 $O(x, \varepsilon)\subset O(x)$，对于这个 ε，必有 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\rho(x_n, x)<\varepsilon$，因而 $x_n\in O(x, \varepsilon)\subset O(x)$ $(n\geqslant N)$.

充分性 对任何 $\varepsilon>0$，$O(x, \varepsilon)$ 便是 x_0 的一个环境，按假设必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，$x_n\in O(x, \varepsilon)$，即 $\rho(x_n, x)<\varepsilon$. 因而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. 证毕.

显然，引理 1 中"任何环境 $O(x)$"换成"任何 α-环境 $O(x, \alpha)$"仍成立.

4. 极限点、闭集

定义 设 X 是度量空间，A 是 X 中的点集，$x_0\in X$. 如果 x_0 的任何环境 $O(x_0)$ 中总含有 A 中无限个点，称 x_0 是 A 的极限点. 如果 $x_0\in A$，并且存在 x_0 的一个环境 $O(x_0)$，$O(x_0)$ 中不再含有除 x_0 外的 A 中的点，称 x_0 是 A 的孤立点. 如果 A 中每个点都是 A 的孤立点，称 A 是孤立集. 特别，当 $A=X$，A 是孤立集时，称 X 是离散的度量空间.

显然，x_0 是 A 的孤立点时，x_0 就不可能是 A 的极限点．而 x_0 是 A 的极限点等价于 x_0 的任何 α-环境 $O(x_0, \alpha)$ 含有 A 中无限个点．$x_0\in A$，x_0 是 A 的孤立点等价于存在一个 x_0 的 α-环境 $O(x_0, \alpha)$，$O(x_0, \alpha)$ 中不再含有除 x_0 外的 A 中的点．由此可知，如果存在数 $\beta>0$，使得度量空间 X 中任何两点 x、y 都有 $\rho(x, y)\geqslant\beta$，X 便是离散的度量空间．具有这种性质的离散度量空间称为绝对离散度量空间．

例如在一维实欧几里德空间 E^1 中的点集 $A=\left\{\frac{1}{n}\mid n=1,2,\cdots\right\}$ 便是 E^1 中的离散集．同样，集 $B=\{n\mid n=1, 2, \cdots\}$ 也是 E^1 中的离散集．如果用 E^1 上的距离作为 A、B 上的距离，这时作为度量空间的 A 便是离散的，作为度量空间的 B 便是绝对离散的(可取 $0<\beta\leqslant1$)．

定理 3 度量空间 X 具有 Hausdorff 分离性，即对任何 $x, y\in X$，如果 $x\neq y$，那末必存在 x 的环境 $O(x)$，y 的环境 $O(y)$，使得 $O(x)\cap O(y)=\emptyset$．

证明 因为 $x\neq y$，所以 $\rho(x, y)\neq 0$，取 $\varepsilon=\frac{1}{3}\rho(x, y)$，$O(x)=O(x, \varepsilon)$，$O(y)=O(y, \varepsilon)$ 即可．事实上，如果有点 $z\in O(x)\subset O(y)$，那末就发生下面的矛盾：

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)<2\varepsilon=\frac{2}{3}\rho(x, y),$$

所以 $O(x)\cap O(y)=\emptyset$．证毕．

下面是描述集 A 的极限点的等价形式．

定理 4 设 A 是度量空间 X 中的点集．下面四件事是彼此等价的：

(1) x_0 是 A 的极限点．

(2) x_0 的任何环境 $O(x_0)$(或任何 α-环境 $O(x_0, \alpha)$)中必含有 A 中异于 x_0 的点，即 $(O(x_0)-\{x_0\})\cap A\neq\emptyset$ (或者 $(O(x_0, \alpha)-\{x_0\})\cap A\neq\emptyset$)．

(3) 在 A 中存在一列点 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0(n=1, 2, \cdots)$，使得

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

(4) 在 A 中存在一列彼此不相同的点 $\{x_n\}$ (即当 $n\neq m$ 时 $x_n \neq x_m$), 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

本定理的证明和直线情况下相应定理 (见第一章 § 3) 的证明相同, 从略.

由于上述四种形式等价, 所以今后可根据不同场合的需要适当地采用某种形式.

定义 设 A 是度量空间中的点集, A 的极限点全体所成的集称为 A 的导集, 记做 A', 而称集 $\bar{A} = A \cup A'$ 是 A 的闭包. 如果 $A' \subset A$, 称 A 是闭集; 如果 $A \subset A'$, 称 A 是自密集; 如果 $A = A'$, 称 A 是完全集.

显然, A 是孤立集的充要条件是 $A \cap A' = \emptyset$. 闭包、闭集是今后常用到的集.

闭集

定理 5 设 A 是度量空间 X 中的点集, 下面三件事是等价的:

(1) A 是闭集.

(2) 由 A 中的点构成的收敛点列 $\{x_n\}$ 的极限必仍在 A 中.

(3) A 的余集 $X-A$ 是开集.

本定理的证明和直线上相应定理(见第一章 § 3)的证明相同. 证略.

例如, 由三角不等式易证 $G = \{x \mid \rho(x_0, x) > r\}$ 是开集, 根据定理 5 的 (3), $S(x_0, r) = X - G = \{x \mid \rho(x, x_0) \leqslant r\}$ 是闭集, 称 $S(x_0, r)$ 是以 x_0 为球心, 半径为 r 的闭球.

和直线情况一样, 由定理 5 的 (3) 以及和通公式可得下列定理.

定理 6 设 X 是度量空间, 那末

(1) 空集及全空间是闭集;

(2) 任意个闭集的交是闭集;

(3) 有限个闭集的和是闭集.

定理 7 在度量空间中,闭集减开集的差是闭集,开集减闭集的差是开集.

定理 8 设 A 是度量空间 X 中的点集,那末

(1) $\overline{A}$ 必是闭集,并且是包含 A 的最小闭集(即对任何一个包含 A 的闭集 F,总有 $F\supset\overline{A}$).

(2) A 是闭集的充要条件是 $A=\overline{A}$.

定理 9 求闭包的运算具有下列性质:

(1) $\overline{\emptyset}=\emptyset$;

(2) $\overline{A}\supset A$;

(3) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$;

(4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

定理 8, 9 均可仿直线情况加以证明.

A' 中点有序列的描述方式(即定理 4). 和直线上一样可以证明 $\overline{A}$ 中点有如下描述方式.

定理 10 设 A 是度量空间 X 的点集. 那末下面三件事等价:

(1) $x_0\in\overline{A}$.

(2) x_0 的任何邻域 $O(x_0)$ 中含有 A 中的点.

(3) 在 A 中存在一列点 $\{x_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

注意, 定理 10 的 (2) 中"任何邻域 $O(x_0)$"可换为"任何邻域 $O(x_0, \alpha)$". 另外,用 A 中的序列的描述方式(即定理 10 的(3))在今后是常用的一种形式.

5. 相对开、闭集

定义 设 A、B 是度量空间 X 的两个点集, $A\subset B$, 又设 $x_0\in A$, 如果存在 x_0 的环境 $O(x_0)$, 使得 $O(x_0)\cap B\subset A$, 称 x_0 是 A 的相对 B 的内点. 如果 A 中一切点都是相对 B 的内点, 称 A 是相对于 B 的开集. 如果 $A'\cap B\subset A$, 称 A 是相对于 B 的闭集.

例如 E^1 上集$[a, b]$是 E^1 的闭集, 但因为 a、b 不是内点, 所

以不是 E^1 的开集，然而对任何 $a\leqslant c\leqslant b$，集 $[a, c)$ 却是相对于 $[a, b]$ 的开集，自然，$[a, c]$ 是相对于 $[a, b]$ 的闭集。

和直线上情况一样地可以证明下面的定理。

定理 11 设 A、B 是度量空间 X 上的两个点集，$A\subset B$，那末

(1) A 是相对于 B 的闭集的充要条件是存在 X 的闭集 F，使得 $A=B\cap F$。

(2) A 是相对于 B 的闭集的充要条件是集 $B-A$ 是相对于 B 的开集。

(3) A 是相对于 B 的开集的充要条件是存在 X 的开集 G，使得 $A=B\cap G$。

6．境界与核

定义 设 A 是度量空间 X 上的点集。A 的内点全体所成的集 $K(A)$ 称为 A 的核，而称集 $\Gamma(A)=\bar{A}\cap\overline{(X-A)}$ 为 A 的境界，$\Gamma(A)$ 中的点称为 A 的境界点。

定理 12 设 A 是度量空间 X 上的点集。那末

(1) $K(A)$ 是开集。

(2) A 的任何开子集 G 必是 $K(A)$ 的子集（即 $K(A)$ 是 A 的最大开子集）。

(3) A 是开集的充要条件是 $A=K(A)$。

(4) $\Gamma(A)$ 是闭集，并且 $\Gamma(A)=\Gamma(X-A)$。

(5) $x\in\Gamma(A)$ 的充要条件是 x 的任何环境 $O(x)$ 中，必既含有 A 中的点，又含有 $X-A$ 中的点。

(6) $\Gamma(A)\cap K(A)=\emptyset$，$\bar{A}=\Gamma(A)\cup K(A)$。

本定理的证明和直线上情况一样。证略。

7．联络集与区域

和直线上情况一样，可引入联络集和区域的概念。

定义 设 X 是度量空间，如果 X 不能分解成两个非空的互不相交的闭集的和，那末称 X 是**联络的度量空间**。反之，称 X 是**不联络的度量空间**。设 A 是度量空间 X 上的点集，如果 A 作为 X 的子空间而成为联络的度量空间，那末称 A 是 X 上的**联络集**。

联络的开集称为区域. 至少含有两点的联络闭集称为连续点集.

显然,联络空间又可定义成是 X 不能分解成两个非空的互不相交的开集的和,或者是 X 不能分解成两个互不相交的既开又闭的集的和. 此外,含有不止一点的联络集 A 中决不能含有相对于 A 的孤立点,由此可知,含有不止一点的联络集必是自密集,从而连续点集必是完全集.

8. 闭子空间,闭线性子空间

定义 设 X 是度量空间, A 是 X 的子空间, 如果 A 又是 X 的闭集,那末称 A 是 X 的闭子空间. 特别, 当 X 是赋准范(或赋范)线性空间, 而 L 既是 X 的线性子空间, 同时又是 X 的闭集, 那末称 L 是 X 的闭线性子空间.

闭集的基本特征在于它对极限运算封闭, 因而闭线性子空间概念在泛函分析中具有重要的地位.

定理 13 设 X 是赋准范(或赋范)线性空间, L 是 X 的线性子空间, 那末 $\overline{L}$ 必是 X 的闭线性子空间. 特别, 当 A 是 X 的子集时, $\overline{\operatorname{span} A}$ 必是包含 A 的最小闭线性子空间.

证明 显然, $\overline{L}$ 是闭集, 因而只要证明 $\overline{L}$ 仍是线性子空间即可.

设 $x, y\in\overline{L}$, $\alpha, \beta\in\mathbb{K}$. 根据定理 10 的(3), 存在 L 中的点列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$: $x_n\to x$, $y_n\to y$. 再根据 § 2 定理 3, 便有 $\alpha x_n+\beta y_n\to\alpha x+\beta y$. 但 L 是线性空间, 所以 $\alpha x_n+\beta y_n\in L$, 从而 $\alpha x+\beta y\in\overline{L}$, 即 $\overline{L}$ 对线性运算封闭.

特别, A 是 X 的子集, 显然 $\operatorname{span} A$ 是包含 A 的最小线性子空间(即任何包含 A 的线性子空间都包含线性子空间 $\operatorname{span} A$). 而 $\overline{\operatorname{span} A}$ 是包含 $\operatorname{span} A$ 的最小闭集, 所以 $\overline{\operatorname{span} A}$ 是包含 A 的最小闭线性子空间. 证毕.

称 $\overline{\operatorname{span} A}$ 是 A 的闭线性包.

如果 L 是赋准范(或赋范) 线性空间 X 的线性子空间, 并且 $\dim L<\infty$, 可以证明 L 必是闭子空间(在 § 5 中我们将进一步证明 L 必是完备子空间). 当然, 当 $\dim L=\infty$ 时 L 就未必是闭的

了.

例如取 L 是 $C[a, b]$ 中多项式全体，显然 L 是线性子空间. 因为 $\{x^n | n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是 L 的线性集，所以 $\dim L=\infty$，但 L 不是 $C[a, b]$ 中的闭集. 事实上，根据 Weierstrass 定理，任何 $f\in C[a, b]$，必存在 L 中一列点 $\{p_n\}$，$\{p_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(t)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|p_n-f\|=0$，所以 $\bar{L}=C[a, b]$，由此可知，L 不是闭集.

9. 点集间的距离

定义 设 E 和 F 是度量空间 X 中的点集，称

$$\inf_{x\in E, y\in F}\rho(x, y)$$

是 E 与 F 间的距离，记做 $\rho(E, F)$. 特别，当 E 中只有一点 x_0 时，称单点集 $\{x_0\}$ 与 F 的距离是点 x_0 与 F 间的距离，记为

$$\rho(x_0, F)=\inf_{y\in F}\rho(x_0, y).$$

例如，X 是 $C[a, b]$，F 是阶数不超过 n 的多项式 $p_n(t)$ 全体，$x(t)\in C[a, b]$，那末

$$\inf_{p_n(t)\in F}\rho(x, p_n)=\inf_{p_n(t)\in F}\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-p_n(t)|,$$

它就是用 n 阶多项式均匀逼近 $x(t)$ 的最佳值.

$x\in\bar{F}$ 的充要条件是 $\rho(x, F)=0$.

事实上，如果 $x\in\bar{F}$，那末必有 $\{x_n\}\subset F$，使得 $\rho(x_n, x)\to 0$. 由 $\rho(x, F)\leqslant\rho(x, x_n)$ 得到 $\rho(x, F)=0$.

反过来，如果 $\rho(x, F)=0$，必有 $\{x_n\}\subset F$，使得 $\rho(x_n, x)\to\rho(x, F)=0$，因此 $x_n\to x$，所以有 $x\in\bar{F}$. 证毕.

10. 连续映射

仿函数的连续性，可引入度量空间上映射的连续性.

设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的连续函数，$x_0\in[a, b]$. 在数学分析中，"f 在 x_0 点连续"是这样定义的：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 如果改用环境的语言来说，就是对任何 $f(x_0)$ 的 ε-环境 $O(f(x_0), \varepsilon)$，必存在 x_0 的 δ-环境 $O(x_0,$

$\delta)$，使得 $f(O(x_0, \delta))$[注]$\subset O(f(x_0), \varepsilon)$.

度量空间中映射的连续性可以相仿地引入.

定义　设 X、Y 是两个度量空间，A 是 X 的子集，f 是 $A\to Y$ 的映射，$x_0\in A$. 如果对任何 $f(x_0)$ 的环境 $O(f(x_0))$ (Y 中的开集)，必有 x_0 的环境 $O(x_0)$ (X 中的开集)，使得 $f(O(x_0)\cap A)\subset O(f(x_0))$，那末称 x_0 是映射 f 的连续点. 如果 A 中每点都是 f 的连续点，那末称 f 是 $A\to Y$ 的连续映射. 当 Y 是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 时，称连续映射 f 是 A 上实或复的连续函数.

定理 14　设 X，Y 是两个度量空间，$A\subset X$，f 是 $A\to Y$ 的映射，$x_0\in A$，那末下面三件事等价：

(1) x_0 是 f 的连续点.

(2) 对任何 $f(x_0)$ 的 ε-环境 $O(f(x_0), \varepsilon)$，必存在 x_0 的 δ-环境 $O(x_0, \delta)$，使得

$$f(O(x_0, \delta)\cap A)\subset O(f(x_0), \varepsilon).$$

(3) 对于 A 中任何收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$，必有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0).$$

证明　(1)⇒(2). 设 f 在 $x_0\in A$ 处连续，那末由连续的定义，对于 $f(x_0)$ 的 ε-环境 $O(f(x_0), \varepsilon)$，必有 x_0 的环境 $O(x_0)$，使得 $f(O(x_0)\cap A)\subset O(f(x_0), \varepsilon)$. 因为 x_0 是 $O(x_0)$ 的内点，必有正数 δ，使 $O(x_0, \delta)\subset O(x_0)$. 因此

$$f(O(x_0, \delta)\cap A)\subset f(O(x_0)\cap A)\subset O(f(x_0), \varepsilon),$$

这就是(2).

(2)⇒(3) 设映射 f 在点 x_0 适合条件(2)，任取 $\{x_n\}\subset A$，$x_n\to x_0$，必有自然数 N，当 $n>N$ 时，$\rho(x_n, x_0)<\delta$[注1]，所以此时 $f(x_n)\in O(f(x_0), \varepsilon)$，即当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\rho(f(x_n), f(x_0))<\varepsilon\text{[注2]},$$

[注1]　$f(A)$ 表示 $\{f(x)\mid x\in A\}$，即集 A 的象集，见第一章 §2.

[注2]　这里我们把 X、Y 上的距离都用 ρ 来表示，这是不会引起混淆的. 因为只要看 $\rho(a, b)$ 中的 a、b 是 X 还是 Y 中的点就知 ρ 是那个空间中的距离了.

即得(3).

(3)⟹(1) 用反证法. 设映射 f 在 $x_0\in A$ 适合条件(3), 而 f 在 x_0 点不连续. 那末必有 $f(x_0)$ 的环境 $O(f(x_0))$, 使得对于 x_0 的任何环境 $O(x_0)$, $f(O(x_0)\cap A)$ 不包含在 $O(f(x_0))$ 之中, 特别地, 对于球 $O\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$, 必有 $x_n\in O\left(x_0, \frac{1}{n}\right)\cap A$, 使得 $f(x_n)\overline{\in} O(f(x_0))$. 因此 $x_n\in A$, $\rho(x_n, x_0)<\frac{1}{n}$, 但是由于条件(3), 应有 $f(x_n)\to f(x_0)$ (由收敛的定义). 因此对 $f(x_0)$ 的环境 $O(f(x_0))$, 又应有 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, $f(x_n)\in O(f(x_0))$, 这与前面所得的 $f(x_n)\overline{\in} O(f(x_0))$ 相矛盾. 所以 $f(x)$ 在 x_0 处必连续. 证毕.

显然, 当 x_0 是 A 的孤立点时, 任何 $A\to Y$ 的映射都必在 x_0 处连续.

定理 15 设 X、Y 是两个度量空间, f 是 $X\to Y$ 的映射, 那末 f 是连续映射的充要条件是下面两个中的任何一个:

(1) 对任何 Y 中的开集 G, G 的原象 $f^{-1}(G)=\{x|f(x)\in G\}$ 是 X 中的开集.

(2) 对任何 Y 中的闭集 F, F 的原象 $f^{-1}(F)=\{x|f(x)\in F\}$ 是 X 中的闭集.

证明 (1) 必要性 设 G 是开集, 今证 $f^{-1}(G)$ 是开集. 如果 $f^{-1}(G)=\emptyset$, 那末 $f^{-1}(G)$ 已是开集了, 所以不妨设 $f^{-1}(G)\neq\emptyset$. 任取 $x_0\in f^{-1}(G)$, 因为 f 在 x_0 点连续, 所以对于 $f(x_0)$ 的环境 G, 存在 $O(x_0)$, 使得 $f(O(x_0))\subset G$, 这就是说 $O(x_0)\subset f^{-1}(G)$, 因而 x_0 是 $f^{-1}(G)$ 的内点. 但 x_0 是 $f^{-1}(G)$ 中任取的, 因而 $f^{-1}(G)$ 是开集.

充分性 设 $x_0\in X$, 今证 x_0 是 f 的连续点. 任取 $f(x_0)$ 的任何环境 $O(f(x_0))$, 由于 $O(f(x_0))$ 是开集, 因而它的原象 $f^{-1}(O(f(x_0)))$ 是开集. 又显然 $x_0\in f^{-1}(O(f(x_0)))$, 即开集 $f^{-1}(O(f(x_0)))$ 是 x_0 的一个环境, 记为 $O(x_0)$, 显然 $f(O(x_0))\subset O(f(x_0))$, 所以 f 在 x_0 点连续.

(2) 只要注意到 $\mathscr{D}(f)=X$, 并且一个集 B 的余集 $Y-B$ 的

原象必是集 B 的原象的余集，即

$$f^{-1}(Y-B)=\{x|f(x)\in Y-B\}=X-\{x|f(x)\in B\}$$
$$=X-f^{-1}(B). \tag{4.3}$$

再注意到闭集的余集是开集，立即由(1)可以得到(2)．证毕．

系 设 X、Y 是两个度量空间，$A\subset X$，f 是 $A\to Y$ 的映射，那末 f 是连续映射的充要条件是下面两个中的任何一个：

(1) 对于任何 Y 中开集 G，G 的原象 $f^{-1}(G)=\{x|f(x)\in G\}$ 是相对于 A 的开集．

(2) 对于任何 Y 中闭集 F，F 的原象 $f^{-1}(F)=\{x|f(x)\in F\}$ 是相对于 A 的闭集．

本系可仿定理 15 来证明，也可直接利用习题 12 作为定理 15 的明显推论．

11．保距同构和拓扑同构

定义 设 X、Y 是两个度量空间，φ 是 $X\to Y$ 的映射，如果对任何 $x_1, x_2\in X$，都有 $\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))=\rho(x_1, x_2)$，称 φ 是 $X\to Y$ 的保距映射．如果 φ 不仅是 $X\to Y$ 的保距映射，而且 φ 是满射，即 $\mathscr{R}(\varphi)=Y$，那末称 φ 是 $X\to Y$ 的保距同构映射，简称 φ 是保距同构．

显然，保距映射必是单射，因而保距同构必是 $X\to Y$ 的双射，由此易知逆映射 φ^{-1} 必是 $Y\to X$ 的保距同构．此外 $X\to Y$ 的保距映射必然是 $X\to Y$ 的连续映射．

定义 设 X, Y 是两个度量空间，如果存在保距同构映射 φ: $X\to Y$，那末称 X 和 Y 保距同构．

对于泛函分析来说，特别重要的是 X、Y 还是线性空间的情况．

定义 设 X、Y 同为实或复赋准范或赋范线性空间，φ 是 $X\to Y$ 的线性同态(或线性同构)，并且是保距映射，那末称 φ 是 $X\to Y$ 的保距线性同态(或保距线性同构)．对于两个赋准范或赋范线性空间 X, Y，如果存在 $X\to Y$ 的保距线性同构，那末称 X、Y 是保距线性同构．

就一般的观念来说，度量空间的基本要素是两个，一个是抽象的非空集 X，另一个是 X 上的距离 ρ，度量空间中一切其它概念，例如有界集、开集、闭集、连续等等，都是以这两个要素为基础的，而线性空间的基本要素是除了非空集 X 外，还有集 X 的元素之间的线性运算——加法和数乘，线性空间中一切其它概念，例如基、线性独立、维数等等，都是以它们为基础的．同样，赋准范(或赋范)线性空间的基本要素除了非空集 X 以及其上的线性运算外，还有一个比起一般的距离来说要特殊一点的距离，即由准范数(或范数)导出的距离，它们是这类空间上讨论其它问题的基础(今后我们将愈来愈多地看到这一点)．如果两个度量空间 X、Y 保距同构，即有保距同构映射 $\varphi: X\to Y$，当把 X 的元素 x 用 $\varphi(x)$ 代替，两点 x_1、x_2 的距离 $\rho(x_1, x_2)$ 用 $\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$ 代替以后，在 X 上讨论问题就和在 Y 上讨论没有什么两样了，即保距同构的两个度量空间可以视为同一空间(数学的严格术语是：X 和 Y 在保距同构 φ 下视为同一)．同样，线性同构的两个线性空间可以视为同一，线性保距同构的两个赋准范或赋范线性空间可以视为同一．这种不同场合出现的在同构意义下视为同一是数学中一个重要的观念．

例如，P^n 是不超过 n 阶的多项式全体，如果作

$$\varphi: p(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \mapsto (a_0, a_1, \cdots, a_n) \tag{4.4}$$

那末 φ 便是 P^n 到 $n+1$ 个数组所成的 $n+1$ 维线性空间 $\mathbb{A}^{n+1}$ 的线性同构，因此在线性空间理论中，P^n 和 $\mathbb{A}^{n+1}$ 可视为同一．又如果在 P^n 中引入

$$\|p\|=\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.5}$$

易知 $\|\cdot\|$ 是 P^n 上范数，于是 φ 便是实(或复)赋范线性空间 P^n 到赋范线性空间 E^{n+1}(或 C^{n+1})的线性保距同构，因此在赋范线性空间理论中，P^n 和 E^{n+1} 可视为同一．

因为今后我们将还会遇到不同场合同构的例，所以这里不再

列举了. 下面介绍比保距同构要求略低一点的同构概念.

定义 设 X、Y 是两个度量空间, φ 是 $X\to Y$ 的双射, 如果 φ 和 φ^{-1} 都是连续映射, 那末称 φ 是 $X\to Y$ 的**拓扑映射**. 对于两个度量空间 X 和 Y, 如果存在 $X\to Y$ 的拓扑映射, 那末称 X, Y **拓扑同构**. 当 X、Y 都是赋准范线性空间, φ 既是 $X\to Y$ 的线性同构, 又是拓扑映射时, 称 φ 是 $X\to Y$ 的**拓扑线性映射**. 两个赋准范线性空间 X、Y, 如果存在 $X\to Y$ 的拓扑线性映射, 称 X 与 Y **拓扑线性同构**.

由于保距同构映射 φ 的逆 φ^{-1} 也是保距同构映射, 并且都是连续的, 因而保距同构映射必是拓扑映射. 一般说来, 对拓扑映射 φ, 并不能保证 $\rho(x_1, x_2)=\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$, 所以未必是保距同构映射.

例如 $\varphi(x)=x^3$ 便是 $E^1\to E^1$ 的拓扑映射. 更一般地, 设 φ 是 E^1 到 E^1 的严格单调的连续映射(即 E^1 上严格单调连续函数), 如果 $\varphi(E^1)=E^1$, 根据数学分析知识知道, φ^{-1} 也是 E^1 上连续函数, 并且 $\varphi^{-1}(E^1)=E^1$, 即 φ 是 $E^1\to E^1$ 的拓扑映射. 显然, 一般说来这些 φ 都不是 $E^1\to E^1$ 的保距同构映射.

假如 φ 是 $X\to Y$ 的拓扑线性映射, 当然, φ 不能保证象的距离和原象的距离相等, 即 $\rho(x_1, x_2)=\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$ 未必对一切 $x_1, x_2\in X$ 成立. 然而, 因 φ、φ^{-1} 都是连续的, 所以仍保持邻域、极限等的等价性, 即 G 是 X 的开集的充要条件是 $\varphi(G)$ 是 Y 的开集, X 上点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 的充要条件是 Y 上点列 $\{\varphi(x_n)\}$ 收敛于 $\varphi(x)$ 等. 在度量空间理论中, 如果只限于研究与极限有关的性质, 或者说, 只限于研究连续性时, 那末用 $\varphi(x)$ 代替 x 后, 在 X 上讨论就和在 Y 上讨论是一样的了. 可见拓扑同构是一个重要的概念(它在拓扑空间理论中尤为重要).

下面是赋准范线性空间中两个重要的拓扑映射.

定理 16 设 X 是赋准范线性空间, $0\neq\alpha\in\Lambda$, $x_0\in X$, 那末映射

$$\varphi_1: x\mapsto\alpha x,\ x\in X,$$

$$\varphi_2: x \mapsto x_0 + x,\ x \in X,$$

都是 X 上的拓扑映射，并且 φ_1 还是线性映射.

证明 显然，φ_1、φ_2 都是双射，并且

$$\varphi_1^{-1}: x \mapsto \frac{1}{\alpha} x,\ x \in X,$$

$$\varphi_2^{-1}: x \mapsto -x_0 + x,\ x \in X.$$

又显然，φ_2、φ_2^{-1} 是两个连续映射. 根据 §2 准范数的性质(3)，φ_1、φ_1^{-1} 也是两个连续映射. 因而 φ_1、φ_2 都是拓扑映射.

φ_1 显然是线性映射. 证毕.

系 设 X 是赋准范线性空间，A 是 X 的点集. 那末对任何 $0 \neq \alpha \in \Lambda$，$x_0 \in X$，集 A 是开(或闭)集的充要条件是集 $\alpha A + x_0 = \{\alpha x + x_0 \mid x \in A\}$ 是开(或闭)集.

证明 由于定理 16 中映射 φ_1、φ_2 是拓扑映射，从而 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ 也是拓扑映射. 但 $\alpha A + x_0 = \varphi_2 \circ \varphi_1(A)$，$A = (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1}(\alpha A + x_0)$，由定理 15 知道，$A$ 是开(或闭)集的充要条件是 $\alpha A + x_0$ 是开(或闭)集. 证毕.

12. 度量空间的乘积空间

定义 设 (X, ρ)、(Y, ρ) 是两个度量空间，集 $X \times Y$ 是 X 和 Y 的直积. 对任何 (x_1, y_1)，$(x_2, y_2) \in X \times Y$，规定

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = [\rho(x_1, x_2)^2 + \rho(y_1, y_2)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

易知 ρ 是 $X \times Y$ 上的距离，通常称 $(X \times Y, \rho)$ 是 (X, ρ) 和 (Y, ρ) 的乘积度量空间，简称为乘积空间. 常简写 $(X \times Y, \rho)$ 为 $X \times Y$.

注意，如果在 $X \times Y$ 上，对任何 (x_1, y_1)，$(x_2, y_2) \in X \times Y$，规定

$$\rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2), \tag{4.7}$$

$$\rho''((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(\rho(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2)). \tag{4.8}$$

同样，易知 ρ'、ρ'' 等都是 $X \times Y$ 上的距离. 令 I 是集 $X \times Y$ 到自身的恒等映射，容易证明 I 既是 $(X \times Y, \rho) \to (X \times Y, \rho')$ 的拓扑

映射，又是$(X\times Y,\rho)\to(X\times Y,\rho'')$的拓扑映射，也是$(X\times Y,\rho')\to(X\times Y,\rho'')$的拓扑映射．换言之，$(X\times Y,\rho)$，$(X\times Y,\rho')$，$(X\times Y,\rho'')$彼此拓扑同构．因此，在仅研究极限和连续性有关的问题时，它们实际上是等效的，所以通常在$X\times Y$上取由(4.6)所规定的距离．

上面是两个空间的乘积，不难类似地引入多个空间的乘积空间．设(X_i,ρ) $(i=1,2,\cdots,n)$是度量空间，对任何$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}X_i$规定

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{4.9}$$

称$\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}X_i,\rho\right)$是$(X_i,\rho)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的**乘积度量空间**．

13．多元连续映射

利用度量空间的乘积空间，可把多元连续函数推广成多元连续映射(下面以二元连续映射作为典型)．

定义 设(X,ρ)、(Y,ρ)、(Z,ρ)是三个度量空间，$(X\times Y,\rho)$是(X,ρ)和(Y,ρ)的乘积度量空间，$f(x,y)$是集$X\times Y$到集Z的映射．如果$f(x,y)$是$(X\times Y,\rho)$到(Z,ρ)的连续映射，那末称f是变元x、y的*二元连续映射*．当(Z,ρ)是E^1或C^1时，称f是实或复的*二元连续函数*．

定理 17 设(X,ρ)、(Y,ρ)、(Z,ρ)是三个度量空间，$(X\times Y,\rho)$是(X,ρ)、(Y,ρ)的乘积度量空间，f是集$X\times Y\to Z$的映射．下列命题成立：

(1) f是二元连续映射的充要条件是对任何两个收敛序列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$：$x_n\to x$，$y_n\to y$，总有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=f(x,y)\text{[注]}.\tag{4.10}$$

(2) 如果f是二元连续的，那末固定一个变元必是另一个变元的连续映射．

[注] 还有一个f是两元连续映射的常用的充要条件，它是用环境的语言表达的(见习题22)．

证明 (1) 必要性 对任何 $\varepsilon>0$，因为 f 二元连续，必有 $\delta>0$，当 $(x', y')\in O((x, y), \delta)$ 时，$f(x', y')\in O(f(x, y), \varepsilon)$. 由于 $x_n\to x$，$y_n\to y$，所以对上述 $\delta>0$，必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时

$$\rho((x_n, y_n), (x, y))=[\rho(x_n, x)^2+\rho(y_n, y)^2]^{\frac{1}{2}}<\delta,$$

从而取 $(x', y')=(x_n, y_n)$ $(n=N, N+1, \cdots)$ 时，

$$\rho(f(x_n, y_n), f(x, y))<\varepsilon, \tag{4.11}$$

即(4.10)成立.

充分性 只要证明任何点 $(x, y)\in X\times Y$ 是 f 的连续点就可以了.(反证法)设 (x, y) 不是 f 的连续点，从而必存在某个 $\varepsilon_0>0$，而对任何 $\delta=\frac{1}{n}(n=1, 2, \cdots)$，在 $O\left((x, y), \frac{1}{n}\right)$ 中必有点 (x_n, y_n)，使得

$$\rho(f(x_n, y_n), f(x, y))\geqslant\varepsilon_0. \tag{4.12}$$

从下式

$$[\rho^2(x_n, x)+\rho^2(y_n, y)]^{\frac{1}{2}}=\rho((x_n, y_n), (x, y))<\frac{1}{n},$$

$$n=1, 2, \cdots$$

易知 $x_n\to x$，$y_n\to y$. 根据假设，(4.10)成立，这和(4.12)发生矛盾. 所以点 (x, y) 是 f 的连续点.

(2) 显然，命题(2)是(1)的直接推论. 证毕.

由定理 17 的(1)可知，度量空间 (x, ρ) 上的距离 $\rho(x, y)$ 是变元 x、y 的二元连续函数(见§1 定理 1 的(2)). 而当 X 是赋准范线性空间时，加法 $(x, y)\mapsto x+y$ 就是变元 x、y 的二元连续映射，数乘 $(\alpha, x)\mapsto\alpha x$ 就是变元 α、x 的二元连续映射.

14. 开、闭映射

开、闭映射是泛函分析中两个重要的映射.

定义 设 (X, ρ)、(Y, ρ) 是两个度量空间，f 是 X 到 Y 的映射. 如果对 (X, ρ) 中任何开集 O，象 $f(O)$ 是 (Y, ρ) 中开集，那末称 f 是开映射(也称开算子).

显然，当 f 是拓扑映射时，f 必是开映射. 而当 f 是 X 到 Y

的双射时，由定理 15 可知，f^{-1} 连续的充要条件是 f 为开映射.

定义　设 (X, ρ)、(Y, ρ) 是两个度量空间，f 是 X 到 Y 的映射，$\mathscr{D}(f)$ 是它的定义域. 称乘积集 $X\times Y$ 的子集

$$G(f)=\{(x, f(x))\mid x\in\mathscr{D}(f)\}$$

是 f 的图象. 如果 $G(f)$ 是度量空间 $(X\times Y, \rho)$ 的闭集，称 f 是 X 到 Y（以 $\mathscr{D}(f)$ 为定义域）的闭映射（也称闭算子）.

定理 18　设 (X, ρ)、(Y, ρ) 是两个度量空间，f 是 X 到 Y 的映射，$\mathscr{D}(f)$ 是它的定义域. 那末

(1) f 是闭映射的充要条件是对任何点列 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(f)$，当 $x_n\to x_0$，$f(x_n)\to y_0$ 时，必有 $x_0\in\mathscr{D}(f)$，并且 $f(x_0)=y_0$.

(2) 当 $\mathscr{D}(f)$ 是闭集，f 是连续映射时，f 必是闭映射.

(3) 如果 f 是单射，并且是闭映射，那末 f^{-1} 也是闭映射.

证明　(1) 必要性　如果 f 是闭算子，那末当 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(f)$，$x_n\to x_0$，$f(x_n)\to y_0$ 时，显然 $\{(x_n, f(x_n))\}\subset G(f)$，而且在乘积度量空间 $(X\times Y, \rho)$ 中，$(x_n, f(x_n))\to(x_0, y_0)$. 由于假设 $G(f)$ 是闭的，所以 $(x_0, y_0)\in G(f)$，这就是 $x_0\in\mathscr{D}(f)$，$y_0=f(x_0)$.

充分性　任取 $\{(x_n, f(x_n))\}\subset G(f)$，而且 $(x_n, f(x_n))\to(x_0, y_0)$，显然，$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(f)$，$x_n\to x_0$，$f(x_n)\to y_0$. 由假设，$x_0\in\mathscr{D}(f)$，$y_0=f(x_0)$，即得到 $(x_0, y_0)\in G(f)$. 因此 $G(f)$ 中每个收敛点列的极限在 $G(f)$ 中，所以 $G(f)$ 是闭集.

(2) 设 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(f)$，$x_n\to x_0$，并且 $f(x_n)\to y_0$. 因为 $\mathscr{D}(f)$ 是闭的，所以 $x_0\in\mathscr{D}(f)$. 又由于 f 是连续的，所以 $y_0=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，由 (1) 可知 f 是闭映射.

(3) 显然. 证毕.

一般说来，闭映射不一定是连续的.

例　我们考察度量空间 $C[a, b]$ 的一个子集 $\mathscr{D}=\{x\mid x\in C[a, b]$，$x$ 有连续导函数$\}$. 我们作 $\mathscr{D}\to C[a, b]$ 的求导算子（映射）D 如下：

$$D:\ x(t)\mapsto\frac{d}{dt}x(t),\ x(t)\in\mathscr{D}.$$

如果 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}$，而且 $x_n\to x_0$ 和 $\frac{d}{dt}x_n\to y_0$（这就是说 $\{x_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 x_0，而且 $\frac{dx_n}{dt}$ 在 $[a, b]$ 上也一致收敛），根据数学分析中熟知的定理，极限函数 x_0 也是可以求导的，而且求导和极限运算可以交换，即

$$\frac{d}{dt}x_0(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}x_n(t)=y_0(t).$$

这样一来，$x_0\in\mathscr{D}$，$y_0=Dx_0$[注]，所以 D 是闭的. 显然 D 不是 $\mathscr{D}\to C[a, b]$ 的连续算子（具体地，例如 $\{n^{-1}\sin nx\}\subset\mathscr{D}$，并且 $n^{-1}\sin nx\to 0$，但 $D(n^{-1}\sin nx)=\cos nx\not\to 0$），因此，闭算子不一定连续.

在第五章 §4 中，我们将讨论闭线性算子何时成为连续算子.

利用算子的图象来研究一些"不连续"的算子是 von-Neumann 引进的一种有效的方法，它常被用来讨论闭算子. 泛函分析中对闭算子讨论得比较多的是线性闭算子理论. 在上例中我们看到的微分算子不是连续算子而仅是闭算子. 其实，更一般地，在微分方程理论中所出现的线性微分算子，绝大部分在常见的度量空间上容易验证它是闭算子. 这就是我们要讨论闭算子的理由之一.

习　题

1. 证明定理 2、4～12.

2. 证明离散度量空间中任何子集既是开集，又是闭集.

3. 用环境的语言直接证明定理 4 中(1)与(2)等价.

4. 用环境的语言直接证明定理 5 中(1)与(3)等价.

5. 设 X 是度量空间，$x_0\in X$，$r\geqslant 0$，证明 $G=\{x\mid\rho(x_0, x)>r\}$ 是开集. 又问开球 $O(x_0, r)$ 的闭包必是闭球 $S(x_0, r)=\{x\mid\rho(x, x_0)\leqslant r\}$ 吗?

6. 分别用环境的语言和序列的语言证明度量空间中集 A 的导集 A' 必是闭集.

7. 用环境的语言直接证明定理 10 中的(1)、(2)等价.

[注] Dx_0 是 $D(x_0)$ 的另一种写法.

8. 设 A 是度量空间 X 中的点集，$r>0$，证明集

$$O(A, r)=\{x \mid \text{存在 } A \text{ 中一个点 } y, \text{ 使得 } \rho(x, y)<r\}$$

是开集.

9. 设 F 是度量空间 X 的闭集. 证明必存在一列开集 $\{O_n\}$，使得 $O_n \supset F (n=1, 2, \cdots)$，并且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = F$.

10. 设 F_1、F_2 是度量空间 X 中的两个闭集且互不相交，证明有如下分离性：存在 X 的两个开集 O_1、O_2，使得 $O_1 \cap O_2 = \emptyset$，且 $O_1 \supset F_1$，$O_2 \supset F_2$.

11. 设 $B \subset [a, b]$，证明度量空间 $C[a, b]$ 中的集 $\{x \mid \text{当 } t\in B \text{ 时}, x(t)=0\}$ 是闭集. 而对任何 $\alpha>0$，集 $\{x \mid \text{当 } t\in B \text{ 时}, |x(t)|<\alpha\}$ 是 $C[a, b]$ 上开集的充要条件是 B 是 E^1 上的闭集.

12. 设 A、B 是度量空间 X 中的两个点集，$A\subset B$. 证明 x_0 是 A 的相对于 B 的内点的充要条件是存在 x_0 的 α-环境 $O(x_0, \alpha)$，使得 $O(x_0, \alpha)\cap B \subset A$.

13. 设 A、B 是度量空间 X 中的两个点集，$A\subset B$，在 B 上取 X 的距离作为 B 的距离，B 成为度量空间，视 A 为度量空间 B 的点集，证明 A 相对于 B 是开(或闭)集的充要条件是 A 是度量空间 B 的开(或闭)集.

14. 设 A 是度量空间 X 的点集，证明 $K(A)=X-\overline{(X-A)}$.

15. 证明子空间的联络集必是全空间的联络集. 又问逆命题是否成立.

16. A 是度量空间 X 中的点集. 如果对 A 中任何两个点 x、y，都有 A 的联络子集包含这两点. 证明 A 必是联络点集.

17. 设 A 是度量空间 X 的联络点集，f 是 A 到度量空间 Y 的连续映射，证明 $f(A)$ 是 Y 的联络点集.

18. **定义**　如果 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 到度量空间 X 的连续映射，那末称映射 $y=f(x)$ (或集 $f([a, b])$) 是 X 中的连续曲线.

证明连续曲线必是联络点集(从而 X 中任何两点 x、y，如果都能用连续曲线通过它们，X 必是联络空间).

19. 设 f 是定义在度量空间 X 的点集 A 上的实函数，$x_0\in A$，如果

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in O(x_0, r)\cap A} f(x) \leqslant f(x_0)$$

$$\left(\text{或} \lim_{r\to 0}\inf_{x\in O(x_0, r)\cap A} f(x) \geqslant f(x_0)\right),$$

那末称 x_0 是 f 的上半连续点(或下半连续点). 如果 A 中每点 x_0 都是 f 的上半连续点(或下半连续点)，那末称 f 是 A 上的上半连续函数(或下半连续函数).

证明：f 是 A 上上半连续函数的充要条件是对任何实数 a，集 $A(f(x) \geqslant

$\alpha) = \{x|f(x) \geq \alpha\}$ 必是相对于 A 的闭集.

20. 设 A、B 是度量空间 X 的两个子集, 并且 $\rho(A, B)>0$(或 A、B 是互不相交的闭集). 证明必存在 X 上的连续函数 f, 使得 $0\leqslant f\leqslant 1$, 并且

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{当 } x\in A \text{ 时},\\ 1, \text{当 } x\in B \text{ 时}.\end{cases}$$

21. 设 X 是赋范线性空间, L 是 X 的线性子空间, 在 X/L 上按(2.16)式引入(见§2定理4)$p(\tilde{f})=\inf\{\|f\| \mid f\in\tilde{f}\in X/L\}$. 证明 $p(\cdot)$ 是 X/L 上范数的充要条件是 L 是 X 的闭线性子空间.

22. 设 X、Y、Z 是三个度量空间, f 是 $X\times Y\to Z$ 的二元连续映射的充要条件是对任何 $O(f(x, y))$, 必存在 x、y 的环境 $O(x)$、$O(y)$, 使得 $f(O(x)\times O(y))\subset O(f(x, y))$.

§5 稠密与完备

1. 稠密集

直线上的稠密概念可以推广到度量空间上, 并成为度量空间中一个很有用的概念.

定义 设 A、B 是度量空间 X 的两个点集, 如果 B 中每个点的任何环境中必含有 A 的点, 那末称 A 关于 B 稠密. 如果还有 $A\subset B$, 那末称 A 在 B 中稠密, 特别, 当 $B=X$, A 在 B 中稠密时, 称 A 是 X 的稠密集.

显然, A 关于 B 稠密的充要条件是对任何 $b\in B$, $\rho(b, A)=0$. 又如果 A 关于 B 稠密, 那末 B 中一切孤立点必在 A 中.

定理 1 设 A、B、C 是度量空间 X 的三个点集.

(1) A 关于 B 稠密的充要条件是 $\overline{A}\supset B$.

(2) 如果 A 关于 B 稠密, B 关于 C 稠密, 那末 A 必关于 C 稠密.

本定理的证明完全类似于第一章§3定理13的证明. 从略.

下面将给出常用的两个空间中的一些稠密集.

设 f 是定义在$[a, b]$上的函数, 如果存在有限个分点 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, f 在$[t_i, t_{i+1}]$上是直线函数, 称 f 是$[a, b]$上折线函数.

定理 2　设 P 是 $[a, b]$ 上多项式全体，RP 是 $[a, b]$ 上有理系数多项式全体，DL 是 $[a, b]$ 上折线函数全体，那末 P、RP、DL 都是 $C[a, b]$ 的稠密集.

证明　我们在假设 $C[a, b]$ 是实空间的情况下来证明定理 2（复空间情况留给读者证明）. 根据数学分析中 Weierstrass 定理，对任何 $f\in C[a, b]$，必存在一列多项式 $p_n\in P(n=1, 2, \cdots)$，使得 p_n 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f，即按 $C[a, b]$ 上的范数，$\lim\limits_{n\to\infty}\|p_n-f\|=0$，从而 $f\in\overline{P}$. 所以 P 关于 $C[a, b]$ 稠密.

设 $p(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_it^i$ 是给定的多项式，任取 $n+1$ 个有理数列 $\{r_k^{(i)}\}(i=0, 1, \cdots, n)$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}r_k^{(i)}=a_i(i=0, 1, \cdots, n)$. 取 RP 中序列 $\{p_k(t)\}$，其中 $p_k(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}r_k^{(i)}t^i$，令 $M=\max(|a|, |b|)$，由于

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|p_k(t)-p(t)|\leqslant\sum_{i=0}^{n}|r_k^{(i)}-a_i|M^i, \tag{5.1}$$

由此可知 $\{p_k(t)\}$ 按 $C[a, b]$ 中范数收敛于 $p(t)$，即 $p\in\overline{RP}$，从而 RP 关于 P 稠密. 由定理 1 的(2)，RP 是 $C[a, b]$ 上稠密集.

最后再证 DL 是稠密集：任取 $f\in C[a, b]$，由于 f 是 $[a, b]$ 上连续函数，由均匀连续性，对任何自然数 n，必存在 $\delta>0$，当 $|t-t'|<\delta$ 时，

$$|f(t)-f(t')|<\frac{1}{n}. \tag{5.2}$$

任取分点组 D：$a=t_0<t_1<\cdots<t_{m_n}=b$，但满足 $t_{i+1}-t_i<\delta$，$i=0, 1, \cdots, m_n-1$. 作 $[a, b]$ 上折线函数 $f_n(t)$：$f_n(t)$ 在分点组 D 的分点 t_i 上取值为 $f(t_i)$. 显然，由(5.2)立即可以得到

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f_n(t)-f(t)|<\frac{1}{n}, \tag{5.3}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$. 从而 DL 是 $C[a, b]$ 的稠密集. 证毕.

定理 3　设 A 是 $L^p(E, \mu)(p>0)$ 中有界可测函数全体，那末 A 是 $L^p(E, \mu)$ 的稠密集.

证明 当 $p=\infty$ 时，$L^p(E,\mu)$ 是 E 上本质有界可测函数全体。显然，对 $L^p(E,\mu)$ 中任何一个 f，作为函数来看，必存在 A 中 f_0，使得 $f(t)\doteq f_0(t)$。从而作为 $L^p(E,\mu)$ 的元素来看，$f=f_0$，即 $L^p(E,\mu)=A$。显然 A 是 $L^p(E,\mu)$ 的稠密集。所以下面不妨设 $\infty>p>0$。

对任何 $f\in L^p(E,\mu)$，作函数列

$$f_n(t)=\begin{cases}f(t), & \text{当} |f(t)|\leqslant n \text{时},\\ 0, & \text{当} |f(t)|>n \text{时},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots$$

那末 $\{f_n\}$ 是 $L^p(E,\mu)$ 中有界可测函数列，并且

$$\int_E |f_n(t)-f(t)|^p d\mu=\int_{E(|f|>n)}|f(t)|^p d\mu. \tag{5.4}$$

由于 $|f|^p\in L(E,\mu)$，由积分的全连续性，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当 $e\subset E$，$\mu(e)<\delta$ 时

$$\int_e |f(t)|^p d\mu<\varepsilon. \tag{5.5}$$

因为 $\quad n^p\mu(E(|f|>n))\leqslant\int_{E(|f|>n)}|f(t)|^p d\mu\leqslant\int_E|f(t)|^p d\mu$，

所以有正数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\mu(E(|f|>n))<\delta$，由(5.5)、(5.4)得

$$\|f_n-f\|=\int_{E(|f|>n)}|f(t)|^p d\mu<\varepsilon,\ (0<p\leqslant 1), \tag{5.6}$$

$$\|f_n-f\|=\left(\int_{E(|f|>n)}|f(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon^{\frac{1}{p}},\ (\infty>p\geqslant 1), \tag{5.7}$$

即 $f\in\overline{A}$。从而 A 是 $L^p(E,\mu)$ 的稠密集。证毕。

设 $f(x)\,(x=(x_1,\cdots,x_n))$ 是 E^n 上的函数，称集 $\{x|f(x)\neq 0\}$ 的闭包为 f 的支集，记为 $\operatorname{supp} f$。设 Ω 是 E^n 上的一个区域，$C_0(\Omega)$ 表示支集有界并且包含在 Ω 内的连续函数全体。那末下列命题成立。

定理4 设 Ω 是 E^n 上的区域，那末集 $C_0(\Omega)$ 是 $L^p(E,\mu)\,(\infty>p>0)$ 的稠密集，其中 μ 是 Ω 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度。

证明 为了证明 $C_0(\Omega)$ 是 $L^p(\Omega,\mu)\,(\infty>p>0)$ 的稠密集，只

要证明对任何$f\in L^p(E,\ \mu)$以及$\varepsilon>0$，必存在$\varphi\in C_0(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega |f(x)-\varphi(x)|^p d\mu<\varepsilon\ (\infty>p>0), \tag{5.8}$$

即可．事实上，对给定的f以及ε，由定理3，必存在$L^p(\Omega,\ \mu)$中的有界函数f_1，使得

$$\int_\Omega |f(x)-f_1(x)|^p d\mu<\frac{\varepsilon}{4\cdot 2^p}.$$

记$M=\sup|f_1(x)|$，又在Ω内取一列单调增加的有界开区域$\Omega_1\subset\Omega_2\subset\cdots\subset\Omega_n\subset\cdots$，使得$\Omega_n\neq\Omega_{n+1}(n=1,\ 2,\ \cdots)$，并且$\bigcup\limits_{n=1}^\infty \Omega_n=\Omega$．令$\Omega_0=\emptyset$，由于$f_1\in L^p(\Omega,\ \mu)$，从积分的可列可加性，得到

$$\int_\Omega |f(t)|^p d\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_{\Omega_n-\Omega_{n-1}}|f_1(t)|^p d\mu. \tag{5.9}$$

从而存在N_0，使得

$$\sum_{N_0+1}^\infty\int_{\Omega_n-\Omega_{n-1}}|f_1(x)|^p d\mu<\frac{\varepsilon}{4\cdot 2^{2p}},$$

即

$$\int_{\Omega-\Omega_{N_0}}|f_1(x)|^p d\mu<\frac{\varepsilon}{4\cdot 2^{2p}}. \tag{5.10}$$

作
$$f_2(x)=\begin{cases}f_1(x), & \text{当 } x\in\Omega_{N_0}\text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\in\Omega-\Omega_{N_0}\text{ 时}.\end{cases}$$

显然$\sup\limits_x|f_2(x)|\leqslant M$，从(5.10)易知

$$\int_\Omega |f_1(x)-f_2(x)|^p d\mu=\int_{\Omega-\Omega_{N_0}}|f_1(x)|^p d\mu<\frac{\varepsilon}{4\cdot 2^{2p}}. \tag{5.11}$$

因为$f_2(x)$是Ω_{N_0}上可测函数，所以存在Ω_{N_0}上简单函数列$\{\varphi_k(x)\}$几乎处处收敛于$f_2(x)$．又由于$\sup|f_2(x)|\leqslant M$，所以不妨设有$\sup|\varphi_k(x)|\leqslant M$．再注意到$\Omega_{N_0}$是有界开集，所以$\mu(\Omega_{N_0})<\infty$．利用有界控制收敛定理，立即得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_{N_0}}|f_2(x)-\varphi_k(x)|^p d\mu=0,$$

所以有 k_0，使得

$$\int_{\Omega_{N_0}} |f_2(x)-\varphi_{k_0}(x)|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{4\cdot 2^{3p}}. \tag{5.12}$$

对于简单函数 $\varphi_{k_0}(x)$，显然必存在支集包含在 Ω_{N_0} 中的连续函数，使得

$$\int_{\Omega_{N_0}} |\varphi_{k_0}(x)-\varphi(x)|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{4\cdot 2^{4p}}. \tag{5.13}$$

利用 $|a+b|^p \leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p)$ $(\infty>p>0)$ 以及(5.13)、(5.12)、(5.11)、(5.8)，立即得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)-\varphi(x)|^p d\mu \leqslant & 2^p\int_\Omega |f(x)-f_1(x)|^p d\mu \\ & +2^{2p}\int_\Omega |f_1(x)-f_2(x)|^p d\mu \\ & +2^{3p}\int_{\Omega_{N_0}} |f_2(x)-\varphi_{k_0}(x)|^p d\mu \\ & +2^{4p}\int_{\Omega_{N_0}} |\varphi_{k_0}(x)-\varphi(x)|^p d\mu \\ < & \varepsilon,\end{aligned}$$

证毕.

读者不难对定理 4 的证明略加修改，就可得到下述定理.

定理 5 设 Ω 是 E^n 上的区域，那末 Ω 上支集有界并具有 k 阶连续导函数的函数全体 $C_0^k(\Omega)$ 是 $L^p(\Omega, \mu)$ $(\infty>p>0)$ 中的稠密集，其中 μ 是 Lebesgue–Stieltjes 测度.

2. 可析空间

定义 设 A 是度量空间 X 中的点集. 如果存在可列集(也允许可能是有限集) $\{x_k\}\subset X$ 关于 A 稠密，那末称 A 是可析集. 如果全空间 X 本身是可析集，那末称 X 是可析空间.

注意在可析集定义中，并未要求 $\{x_k\}\subset A$. 但对于可析集 A，我们总可以适当选择可列集 $\{y_k\}\subset A$，并且 $\{y_k\}$ 在 A 中稠密. 事实上，已知 $\{x_k\}$ 关于 A 稠密，对任何自然数 k 和 n，如果 $A\cap O\left(x_k, \frac{1}{n}\right)\neq\emptyset$，这时就在 $A\cap O\left(x_k, \frac{1}{n}\right)$ 中任取一个元素 $y_{k,n}$，显

然 $\{y_{k,n}\}(k=1, 2, \cdots, n=1, 2, \cdots)$就在 A 中稠密。

当 A 关于 B 稠密时，意味着对任何 $b\in B$，必存在 $\{a_n\}\subset A$，使得 $a_n\to b$，也就是说 B 中每点都可用 A 中的点近似描述，从而虽然一个可析空间的元素全体可能是不可列集，但仍可用可列个点来近似描述空间中一切元素。例如假设 P 是某个与 X 中每个点有关的命题，如果它具有连续性，那末由 P 在稠密集上成立就有可能推断 P 在整个 X 上成立。这样的思想方法在分析数学的各个领域中经常被采用。因此，稠密、可析等不仅是泛函分析中的重要概念，而且泛函分析中不少命题也是采用上述方法来证明的。作为今后的应用来说，判断哪些度量空间是可析的以及在可析空间中如何根据问题的需要适当选出可列的稠密集，常常是很重要的。

例 1　n 维欧几里德空间 E^n 是可析的。

证明　因为坐标全为有理数的点全体是可列集，并且它在 E_n 中稠密。

例 2　Ω 是 E^n 中区域，μ 是 Ω 上 Lebesgue-Stieltjes 测度，$L^p(\Omega, \mu)(\infty>p>0)$是可析空间。

证明　根据定理 4 的证明可知，支集包含在 Ω 内的简单函数全体所成的集 B 在 $L^p(\Omega, \mu)$ 中稠密。令 A 是 B 中如下的简单函数 φ 的全体：

$$\varphi(x)=\begin{cases} C_i, & \text{当 } x\in E_i,\ i=1, 2, \cdots, k \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x\in \Omega-\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 $\{E_i\}$ 是互不相交的 k 个 E^n 中的立方体，每个 E_i 都是由直线上有理数为端点的区间的直积，又一切 $C_i(i=1, 2, \cdots, k)$是有理数。易知集 A 在 B 中稠密。根据定理 1 的(2)，A 必在 $L^p(\Omega, \mu)(\infty>p>1)$中稠密。显然，$A$ 是可列集，所以 $L^p(\Omega, \mu)(\infty>p>1)$是可析空间。

注意，一般说来 $L^\infty(\Omega, \mu)$未必是可析空间，例如，当 $\Omega=(a, b)$，μ 是 Lebesgue 测度，令 χ_λ 是集(a, λ)的特征函数，对任何 λ，$\tau\in(a, b)$，$\lambda\neq\tau$，按 $L^\infty(\Omega, \mu)$的范数，显然有

$$\|\chi_\lambda - \chi_\tau\| = 1. \tag{5.14}$$

如果 $L^\infty((a, b), m)$ 是可析的，那末必存在可列的稠密集 $\{x_n\}$. 对于 $\varepsilon = \frac{1}{3}$, 令集 $A_n = \left\{\chi_\lambda \mid \lambda \in (a, b), \|\chi_\lambda - x_n\| < \frac{1}{3}\right\} (n = 1, 2, \cdots)$. 由于 $\{\chi_\lambda \mid \lambda \in (a, b)\}$ 是不可列的，显然集 $\{A_n\}$ 中至少有一个，例如 A_1 包含多于一个点，即有 χ_λ、$\chi_\tau \in A_1$, 从而

$$\|\chi_\lambda - \chi_\tau\| \leqslant \|\chi_\lambda - x_1\| + \|x_1 - \chi_\tau\| < \frac{2}{3},$$

这将与(5.14)矛盾，所以 $L^\infty(\Omega, \mu)$ 不可析.

同样可证明 l^∞ 也是不可析的.

例 3 $l^p (\infty > p > 0)$ 是可析空间.

证明 当然，l^p 的可析性可直接作为 $L^p(\Omega, \mu)$ 可析性的推论（只要取 $\Omega = (-\infty, \infty)$, 而 μ 是由函数 $E(x)$ 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度即可）. 鉴于给出可析空间中具体的可列稠密集仍有意义，所以再给出 l^p 中几个可列稠密集. 将 l^p 上点 x 写成可列个坐标形式：$x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$, 令 A 是 l^p 中一切坐标为有理数的点全体，A_0 是 A 中只有有限个坐标不为零的点全体，B 是 l^p 中一切坐标为二进制有理数的点全体，B_0 是 B 中只有有限个坐标不为零的点全体. A_0、A、B_0、B 等都是 l^p 中可列的稠密集（读者自己证明）.

例 4 $C[a, b]$ 是可析空间.

证明 根据定理 2, 有理系数多项式全体 RP 在 $C[a, b]$ 中稠密. 又显然，RP 是可列集，所以 $C[a, b]$ 是可析的.

3. 疏朗集

和直线上一样，在度量空间中也可引入疏朗集.

定义 设 A 是度量空间 X 的点集，如果 A 关于 X 的任何非空环境都不稠密，那末称 A 是疏朗集或无处稠密集.

显然，上述定义中的非空环境可以换成非空开球.

和直线上一样，可以证明下述定理.

定理 6 设 A 是度量空间 X 的点集. 下面几件事等价：

(1) A 是疏朗集.

(2) $\overline{A}$ 不包含任何一个非空环境.

(3) $\overline{A}$ 是疏朗集.

(4) $\overline{A}$的余集 $\overline{A}^C$ 是稠密集.

(5) 任何非空环境 O 中，必有非空环境 $O'\subset O$，使得 O' 中不含 A 中的点.

(6) 任何闭球 $S(a, r)(r>0)$ 中必含有与 A 不相交的闭球.

4. 基本点列

在数列的极限论中，Cauchy 基本序列概念是很重要的. 在度量空间中，也可类似地引入这一概念.

定义 设 X 是度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 的点列，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当自然数 $n, m\geqslant N$ 时

$$\rho(x_n, x_m)<\varepsilon, \tag{5.15}$$

称 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本点列或 Cauchy 点列.

和实数情况一样，有如下命题.

定理 7 (1) 度量空间上收敛点列必是基本点列.

(2) 设 $\{x_n\}$ 是度量空间上基本点列，如果 $\{x_n\}$ 有一个子点列收敛于点 x，那末 $\{x_n\}$ 本身必收敛，并且也收敛于 x.

证明 (1) 设 $\{x_n\}$ 是收敛于 x 的点列，于是对任何 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，必有 $\rho(x_n, x)<\varepsilon/2$，从而当 n、$m\geqslant N$ 时，

$$\rho(x_n, x_m)\leqslant\rho(x_n, x)+\rho(x, x_m)<\varepsilon,$$

即 $\{x_n\}$ 是基本点列.

(2) 设 $\{x_n\}$ 是基本点列，$\{x_{n_k}\}$ 是收敛于 x 的子点列. 因此对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，使得当 n、$m\geqslant N$，$n_k\geqslant N$ 时

$$\rho(x_n, x_m)<\frac{\varepsilon}{2},\quad \rho(x_{n_k}, x)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.16}$$

在(5.16)中取 $m=n_k$，由(5.16)易知，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\rho(x_n, x)\leqslant\rho(x_n, x_{n_k})+\rho(x_{n_k}, x)<\varepsilon,$$

即 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 证毕.

5. 完备空间

在数域中，任何基本数列必收敛. 这是数的极限论中很重要的事实. 然而在一般度量空间中，未必每个基本点列都收敛了.

例如，R_0 表示实数域ℝ中有理数全体. 在 R_0 上取通常的数之间的距离作为距离，这样 R_0 成一度量空间. 根据实数理论知道有理数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限是实数 e，因而$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是 R_0 上的基本点列，但 e 并不在 R_0 中，所以$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$在 R_0 中并不收敛.

如果在一个度量空间中，果真有基本点列没有极限，显然从极限论来看，这种度量空间是不理想的. 例如在这种空间上解某个方程时，尽管作出的近似解的序列是基本的，然而因为基本序列可能没有极限，从而就不能保证用极限过渡的办法得到方程的精确解，因此，下面的概念是重要的.

定义 设 X 是度量空间，如果 X 的任何基本点列必收敛，那末称 X 是完备度量空间. 设 X 是度量空间，A 是 X 的子集，如果 A 按 X 上的距离所成的度量空间（即 A 作为度量空间 X 的子空间）是完备的，那末称 A 是 X 的完备子集或完备子空间.

显然，完备度量空间中的闭子集必是完备子空间. 而任何一个度量空间中的完备子空间必是闭集.

在泛函分析中，用得更多的是下面的两种空间.

定义 设 X 是赋准范或赋范线性空间，如果 X 作为度量空间是完备的，那末分别称 X 是 Fréchet 空间或 Banach 空间.

下面先给出一些完备度量空间的例.

例 5 E^n, C^n 都是 Banach 空间.

证明 在§2的例7中已经指出，E^n、C^n 都是赋范线性空间. 设$\{x_m\}$($x_m=(x_1^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$)是 E^n(或 C^n)中一个基本点列，由于

$$|x_i^{(m)}-x_i^{(k)}|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(m)}-x_i^{(k)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x_m-x_k\|, \tag{5.17}$$

$$i=1, 2, \cdots, n$$

易知对每个 i，$\{x_i^{(m)}\}$是基本数列，所以$\{x_i^{(m)}\}$收敛于一个数x_i. 作 E^n(或 C^n)中的点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，在§1例3中已经证明 E^n(或 C^n)中的点列$\{x_m\}$收敛于 x 的充要条件是$\{x_i^{(m)}\}$收敛于 x_i，由此可知所作的点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$是 $\{x_m\}$ 的极限. 从而 E^n、C^n 是完备的赋范线性空间，即都是 Banach 空间.

例 6　R_1 是 Fréchet 空间.

证明　在§2的例7中已经指出 R_1 是赋准范空间，设 $\{x_n\}$ 是 R_1 的基本点列，即

$$\frac{|x_m-x_n|}{1+|x_m-x_n|}=\|x_m-x_n\|\to 0,\ (m,\ n\to\infty). \tag{5.18}$$

由(5.18)可知，$\{x_n\}$ 必是基本数列，因而必收敛于一个数 x. 但在§1例4中已指出 R_1 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 的充要条件就是 $\{x_n\}$ 按通常的数列收敛于 x，因而 x 是 R_1 中基本点列 $\{x_n\}$ 的极限，从而 R_1 是 Fréchet 空间.

例 7　$C^k[a, b]$是 Banach 空间.

证明　在§2的例7中，已经指出 $C^k[a, b]$是赋范线性空间. 设 $\{x_n\}$ 是 $C^k[a, b]$上的基本点列，即

$$\max_{0\leqslant j\leqslant k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n^{(j)}(t)-x_m^{(j)}(t)|=\|x_n-x_m\|\to 0,\ (n,\ m\to\infty). \tag{5.19}$$

由(5.19)可知，对每个 $j(0\leqslant j\leqslant k)$，$\{x_n^{(j)}(t)\}$是$[a, b]$上一致基本的函数序列，由数学分析可知必存在$[a, b]$上直到 k 阶导函数都连续的函数 $x(t)$，使得 $\{x_n^{(j)}(t)\}$一致收敛于 $x^{(j)}(t)$. 而在§1的例5中已经指出 $C^k[a, b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 的充要条件是 $\{x_n^{(j)}(t)\}$一致收敛于 $x^{(j)}(t)$，由此可知 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 从而 $C^k[a, b]$是 Banach 空间.

类似地可以证明下列几例.

例 8　S 是 Fréchet 空间.

例 9　$C^\infty[a, b]$是 Fréchet 空间.

例 10　$\mathscr{A}$ 是 Fréchet 空间.

例 11　$S(E, \mu)$是 Fréchet 空间.

读者可以证明下例：

例 12 C、C_0(见§3)都是 Banach 空间.

定理 8 $L^p(E, \mu)$ $(p\geqslant 1)$是 Banach 空间；$L^p(E, \mu)$ $(1>p>0)$是 Fréchet 空间.

证明 在§2的例 11 中已经指出 $L^p(E, \mu)$ $(p\geqslant 1)$ 是赋范线性空间，而 $L^p(E, \mu)$ $(1>p>0)$是赋准范线性空间.

(I) 我们先证在 $0<p<\infty$ 的情况下，$L^p(E, \mu)$是完备的. 设 $\{f_n\}$ 是 $L^p(E, \mu)$中基本点列. 注意到

$$\|f_n-f_m\|=\int_E |f_n(x)-f_m(x)|^p d\mu, \quad (0<p<1), \tag{5.20}$$

$$\|f_n-f_m\|=\left(\int_E |f_n(x)-f_m(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} (1\leqslant p<\infty), \tag{5.21}$$

由此可知，对一切 $0<p<\infty$，$\{f_n\}$ 是基本点列等价于

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_E |f_n(x)-f_m(x)|^p d\mu=0, \tag{5.22}$$

而 $\{f_n\}$ 收敛于 f 等价于

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|^p d\mu=0. \tag{5.23}$$

因此，要证明定理在 $0<p<\infty$ 情况下成立，只要证明在假设(5.22)条件下能找到 p 方可积函数 f 适合(5.23)即可.

假设(5.22)成立，取 $\varepsilon=\frac{1}{2^{k(p+1)}}$ $(k=1, 2, \cdots)$，必存在 n_k，当 $n, m\geqslant n_k$ 时，

$$\int_E |f_n(x)-f_m(x)|^p d\mu<\frac{1}{2^{k(p+1)}}. \tag{5.24}$$

不妨设 $n_k<n_{k+1}$ $(k=1, 2, \cdots)$，因而

$$\int_E |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|^p d\mu<\frac{1}{2^{k(p+1)}}, \tag{5.25}$$

由(5.25)可知

$$\mu\left(E\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|>\frac{1}{2^k}\right)\right)\leqslant 2^{kp}\int_E |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|^p d\mu<\frac{1}{2^k}. \tag{5.26}$$

令 $A_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|>\frac{1}{2^k}\right)$, 由(5.26)可知

$$\mu(A_n)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\mu\left(E\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|>\frac{1}{2^k}\right)\right)<\frac{1}{2^{n-1}},\qquad(5.27)$$

而对任何 $y_0\in E-A_n=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E\left(|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\leqslant\frac{1}{2^k}\right)$, 有

$$\sum_{k=n}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(y_0)-f_{n_k}(y_0)|\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty,$$

即 $\sum\limits_{k=n}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))$ 在 $E-A_n$ 上绝对一致收敛. 也就是说, $\{f_{n_k}(x)\}$必在 $E-A_n$ 上一致收敛, 从而 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E-A_n)$ 上处处收敛. 但是

$$\mu\left(E-\bigcup_{n=1}^{\infty}(E-A_n)\right)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\mu(A_k)<\frac{1}{2^{k-1}},$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots$$

因而集 $E-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E-A_n)$是 μ-零集, 即可测函数列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于一可测函数. 令 $f(x)$ 是 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛的极限函数.

今证明 f 必适合(5.23): 在(5.24)中, 固定 $n(n\geqslant n_k)$, 取 $n_{k'}$, $k'>k$, 并令 $k'\to\infty$, 立即由(5.24)及 Fatou 引理得到

$$\begin{aligned}\int_E|f_n(x)-f(x)|^p d\mu&=\int_E\lim_{k'\to\infty}|f_n(x)-f_{n_{k'}}(x)|^p d\mu\\&\leqslant\varliminf_{k'\to\infty}\int_E|f_n(x)-f_{n_{k'}}(x)|^p d\mu\\&\leqslant\frac{1}{2^{k(p+1)}}.\end{aligned}\qquad(5.28)$$

由(5.28)不仅可以知道 $f_n(x)-f(x)$ 是 p 方可积函数, 从而 $f(x)=(f(x)-f_n(x))+f_n(x)$ 也是 p 方可积函数, 而且也说明 $\{f_n\}$ 在 $L^p(E,\ \mu)$中按准范数收敛于 f, 因而 $L^p(E,\ \mu)$ $(0<p<\infty)$是完备的.

(II) 证明 $L^\infty(E,\ \mu)$ 是完备的. 在§3中已指出 $L^\infty(E,\ \mu)$ 是赋范线性空间. 容易证明 $L^\infty(E,\ \mu)$上的范数(见(3.16)式)是

"可达到的"，即对任何 $f\in L^\infty(E,\mu)$，必存在 μ-零集 $E_0\subset E$（当然 E_0 是依赖于 f 的），使得

$$\|f\|=\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|. \tag{5.29}$$

设 $\{f_n\}$ 是基本点列，利用上述事实，存在 μ_0-零集 $E_{n,m}$，使得

$$\|f_n-f_m\|=\sup_{x\in E-E_{n,m}}|f_n(x)-f_m(x)|. \tag{5.30}$$

令 $E_1=\bigcup_{n,m}E_{n,m}$，显然 $\mu(E_1)=0$. 从 $L^\infty(E,\mu)$ 上范数定义易知

$$\|f_n-f_m\|\geqslant\sup_{x\in E-E_1}|f_n(x)-f_m(x)|. \tag{5.31}$$

因此可知，$\{f_n(x)\}$ 作为 $E-E_1$ 上有界可测函数列时，是一致基本序列，由数学分析知识知道，必在 $E-E_1$ 上一致收敛于某函数 $f(x)$. 显然 $f(x)$ 是 $E-E_1$ 上有界可测函数，在 E_1 上补充定义 $f(x)=0$. 这样 $f(x)$ 作为 E 上函数是有界可测的，即 $f\in L^\infty(E,\mu)$. 由 (5.31) 可知，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，当 $n, m\geqslant N$ 时

$$\varepsilon>\|f_n-f_m\|\geqslant\sup_{x\in E-E_1}|f_n(x)-f_m(x)|, \tag{5.32}$$

因此当 $n\geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|&\leqslant\sup_{x\in E-E_1}|f_n(x)-f(x)|\\&=\sup_{x\in E-E_1}\lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\{f_n\}$ 在 $L^\infty(E,\mu)$ 上收敛于 f. 从而 $L^\infty(E,\mu)$ 是完备的. 证毕.

系 $l^p(p\geqslant1)$ 是 Banach 空间，$l^p(1>p>0)$ 是 Fréchet 空间.

6. 完备空间性质

显然，完备度量空间最基本的性质就是任何基本点列必收敛. 下面再介绍几个今后有用的性质.

定理 9（闭球套定理） 设 X 是度量空间，X 是完备的充要条件是 X 中任何一套闭球：

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots,\quad S_n=\{x\,|\,\rho(x_n,x)\leqslant\varepsilon_n\}.$$

如果 $\varepsilon_n\to0$，那末必有唯一的一点 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$（即 $\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$ 是单点集）.

证明 必要性 由球心构成一个点列 $\{x_n\}$，显然，当 $m\geqslant n$

时，

$$\rho(x_n, x_m)<\varepsilon_n. \tag{5.33}$$

由于 $\varepsilon_n\to 0$，从上式立即知道 $\{x_n\}$ 是基本点列. 根据空间的完备性，必存在点 x，使得 $x_n\to x$. 因为当 $n\geqslant k$ 时 $x_n\in S_n\subset S_k$，而 S_k 是闭集，所以 $x\in S_k$ 对一切 k 成立，从而 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k$.

如果又有 $y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k$，因而 $y\in S_k(k=1, 2, \cdots)$，从而

$$\rho(x, y)\leqslant 2\varepsilon_k,$$

再令 $k\to\infty$，由此得到 $\rho(x, y)=0$，即 $\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k$ 是单点集.

充分性 假设 $\{x_n\}$ 是基本点列，因而对 $\varepsilon=\frac{1}{2^{k+1}}(k=1,2,\cdots)$，必存在 n_k，当 $m\geqslant n_k$ 时

$$\rho(x_{n_k}, x_m)<\frac{1}{2^{k+1}}. \tag{5.34}$$

不妨设 $n_k<n_{k+1}(k=1, 2, \cdots)$，作 X 上一列闭球

$$S_k=\left\{x\,\middle|\,\rho(x_{n_k}, x)\leqslant\frac{1}{2^k}\right\}, k=1, 2, \cdots.$$

当 $y\in S_{k+1}$ 时，$\rho(x_{n_{k+1}}, y)\leqslant\frac{1}{2^{k+1}}$，从而

$$\rho(x_{n_k}, y)\leqslant\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}}, y)<\frac{1}{2^k},$$

即 $S_{k+1}\subset S_k$，所以 $\{S_k\}$ 是一套闭球，并且 S_k 的半径 $\frac{1}{2^k}$ 随 $k\to\infty$ 而趋于零，因此存在一点 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k$. 显然

$$\rho(x_{n_k}, x)\leqslant\frac{1}{2^k},$$

即 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x. 由定理 7 的(2)可知，基本点列 $\{x_n\}$ 必收敛于 x，从而 X 是完备的，证毕.

注意，如果定理中条件 $\varepsilon_\nu\to 0$ 不满足，那末 $\bigcap_{\nu=1}^{\infty}S_\nu$ 可能是空的.

例 13 考虑 l^2 的子空间 A，它是由所有形如

$$x_n=\left\{0, 0, \cdots, 0, \frac{n+1}{n}, 0, \cdots\right\}$$

(其中除第 n 个坐标外其余坐标为零)的点组成. 于是, 当 $n\neq m$ 时

$$\rho(x_n, x_m)=\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{2},$$

因此, A 中没有基本点列, 当然 A 就成为完备的度量空间了. 取 $\varepsilon_n=\sqrt{2}\,\frac{n+1}{n}$, 在 A 中作闭球

$$S_n=\{x|\rho(x, x_n)\leqslant\varepsilon_n\},\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

那末 S_n 中仅含点 x_n, x_{n+1}, $\cdots$, 所以 $S_1\supset S_2\supset\cdots$. 但是通集 $\bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty}S_\nu$ 是空集.

定义 度量空间中的点集 A, 如果不能表示成有限或可列个疏朗集的和, 那末称 A 是第二纲的集.

现在我们来证明完备度量空间的另一个重要性质, 即

定理 10(Baire) 完备度量空间必是第二纲的集.

证明(用反证法) 设 X 是完备的度量空间, 而且是第一纲的, 下面我们要推出矛盾.

设 $X=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}M_\nu$, 但是每个子集 M_ν 都是疏朗集. 任取一个闭球 $S(a, 1)$, 根据定理 6 的(6), 由于 M_1 是疏朗的, 必有 X 中的闭球 $S(a_1, r_1)\subset S(a, 1)$, 使得 $S(a_1, r_1)$ 中不含有 M_1 的点; 由于 M_2 是疏朗的, 又必有闭球 $S(a_2, r_2)\subset S(a_1, r_1)$, 不妨设 $0<r_2<\frac{1}{2}$, 使得 $S(a_2, r_2)\cap M_2=\emptyset$, 如此下去, 可以选得一套闭球:

$$S(a_1, r_1),\ S(a_2, r_2),\ \cdots,\ S(a_\nu, r_\nu),\ \cdots$$

$S(a_\nu, r_\nu)\cap M_\nu=\emptyset$, 而且 $0<r_\nu<\frac{1}{\nu}$. 由定理 9, 通集 $\bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty}S(a_\nu, r_\nu)$ 中存在一点 x_0. 因为 $S(a_\nu, r_\nu)$ 和 M_ν 不相交, 所以 x_0 不在每个 M_ν 之中, $\nu=1, 2, \cdots$, 因此 $x_0\in\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}M_\nu$. 但是 $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}M_\nu=X$, 这是矛盾. 所以 X 是第二纲的. 证毕.

下面的性质是显然的, 但是有用的.

定理 11　(1) X、Y 是保距同构的两个度量空间，如果其中的一个是完备的，那末另一个必是完备的。

(2) X、Y 是两个拓扑线性同构的赋准范线性空间，如果其中的一个完备的，那末另一个必是完备的。

证明　(1) 设 φ 是 $X\to Y$ 的保距双射，又不妨设 X 是完备的。今证 Y 也是完备的。事实上，设 $\{y_n\}$ 是 Y 中任一基本点列，由 φ 的保距性，$\{\varphi^{-1}(y_n)\}$ 必是 X 上基本点列。再由 X 的完备性，必存在 $x\in X$，使得 $\varphi^{-1}(y_n)\to x$。令 $y=\varphi(x)$，从而

$$\rho(y_n, y)=\rho(\varphi^{-1}(y_n), \varphi^{-1}(y))=\rho(\varphi^{-1}(y_n), x)\to 0, \quad (n\to\infty)$$

即 $\{y_n\}$ 收敛于 y，因此 Y 是完备的。

(2) 设 φ 是 $X\to Y$ 的拓扑线性映射，X 是完备的。又设 $\{y_n\}$ 是 Y 中任一基本点列，今证 $\{\varphi^{-1}(y_n)\}$ 必是 X 的基本点列。事实上，由于 φ^{-1} 连续，所以对 X 中任何 ε-环境 $O(0, \varepsilon)$，必存在 Y 的 δ-环境 $O(0, \delta)$，使得 $\varphi^{-1}(O(0, \delta))\subset O(0, \varepsilon)$。由于 $\{y_n\}$ 是基本的，所以对于 $\delta>0$，存在 N，当 $n, m\geqslant N$ 时，$y_n-y_m\in O(0, \delta)$，从而 $\varphi^{-1}(y_n)-\varphi^{-1}(y_m)=\varphi^{-1}(y_n-y_m)\in O(0, \varepsilon)$，即 $\{\varphi^{-1}(y_n)\}$ 是 X 上基本点列，由 X 的完备性，知道必有 $x\in X$，使得 $\varphi^{-1}(y_n)\to x$。再由 φ 的连续性，立即得到 $y_n\to\varphi(x)$。从而 Y 是完备的。证毕。

注意，定理 11 的(1)中，如果 X、Y 仅是拓扑同构，一般是不能由一个的完备性推出另一个的完备性。例如，$X=E^1$ 是完备的，取 Y 是 E^1 的子空间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，显然，$Y$ 不完备。但 $\varphi(x)=\mathrm{tg}^{-1}x$ 是 $E^1\to\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$的拓扑映射，即 X，Y 是拓扑同构的。

7. 有限维空间的完备性

下面是基本的事实。

引理 1　设 X 是赋准范线性空间，f 是 X 上的函数，并且是线性的，即对任何 $\alpha, \beta\in\Lambda$，$x, y\in X$，都有

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y), \tag{5.35}$$

那末 f 在 X 上连续的充要条件是 $\mathscr{N}(f)=\{x|f(x)=0\}$ 是闭集.

证明 必要性 因为 $\{0\}$ 是 $\mathbb{K}$ 上闭集, 如果 f 连续, 显然 $\mathscr{N}(f)=f^{-1}(\{0\})$ 是闭集.

充分性 先证 f 在 $x=0$ 点连续: 不妨设 f 不是零函数. 假设 $x=0$ 不是 f 的连续点, 因而存在某个 $\varepsilon_0>0$, 以及点列 $\{x_n\}$, 虽然 $x_n\to 0$, 但 $|f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$. 任取 $x_0\in X$, 显然 $\left\{x_0-f(x_0)\dfrac{x_n}{f(x_n)}\right\}$ 是 $\mathscr{N}(f)$ 中点列. 因为 $x_n\to 0$, $\left\{\dfrac{f(x_0)}{f(x_n)}\right\}$ 是有界数列, 由 §2 定理 4 知道, $\dfrac{f(x_0)}{f(x_n)}x_n\to 0$, 从而 $x_0-f(x_0)\dfrac{x_n}{f(x_n)}\to x_0$, 因为 $\mathscr{N}(f)$ 是闭的, 所以 $x_0\in\mathscr{N}(f)$. 但 x_0 是 X 中任取的, 所以 $X=\mathscr{N}(f)$, 即 f 是零函数, 这与假设矛盾. 所以 f 在 $x=0$ 点连续.

对任何 $x_0\in X$, 由(5.35), 对任何 $x\in X$, 有

$$f(x)-f(x_0)=f(x-x_0),$$

因此, 当 $x\to x_0$ 时, $f(x)\to f(x_0)$, 即 f 在 x_0 点连续, 由于 x_0 是 X 中任取的, 所以 f 在 X 上连续. 证毕.

定理 12 任何 n 维的赋准范线性空间必彼此拓扑线性同构, 从而任何赋准范线性空间的有限维线性子空间必是完备子空间, 因此也是闭子空间.

证明 不妨设 X 是 n 维实赋准范线性空间(复的同样证明), 我们证明 X 拓扑线性同构于 E^n.

设 e_1、…、e_n 是 X 的线性基. 对任何 $x\in X$, 有唯一的分解 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie_i$, 作 $X\to E^n$ 的映射(显然, 它是线性同构)

$$\varphi: x\mapsto a=(a_1, \cdots, a_n). \tag{5.36}$$

先证 φ^{-1} 是连续的. 事实上, 对任何 $a, b\in E^n$,

$$\begin{aligned}\|\varphi^{-1}(a)-\varphi^{-1}(b)\|&=\|\varphi^{-1}(a-b)\|\\&\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)e_i\right\|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|(a_i-b_i)e_i\|,\end{aligned}\tag{5.37}$$

由此易知 φ^{-1} 是连续映射.

再证 φ 是连续的. 先注意在分解 $x=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$ 中, 坐标 a_i 是 x 的线性函数. 显然要证明 φ 是连续的, 只要证明 $\{a_i(x)\}$ 都是连续的就可以了. 我们对维数用归纳法来证明这一点.

当 $n=1$ 时, 有 $X=\{a_1e_1|a_1\in\mathbb{R}\}$. 显然 X 中非零向量 x 的坐标 $a_1(x)\neq0$, 从而 $\mathcal{N}(a_1)=\{0\}$, 但 $\{0\}$ 是 E^1 的闭集, 由引理 1, a_1 是 X 上连续函数. 这样, 任何一维赋准范线性空间必拓扑线性同构于 E^1. 由 E^1 的完备性和定理 11, 立即得到任何实赋准范线性空间的一维子空间必是完备子空间.

设 $n=k$ 时结论成立, 即 k 维实赋准范线性空间均拓扑线性同构于 E^k, 从而任何实赋准范线性空间的 k 维子空间必是完备子空间. 今证 $n=k+1$ 时结论成立: 这时 $X=\left\{x=\sum_{i=1}^{k+1}a_ie_i\,|\,a_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1\right\}$. 考察 $a_1(x)$, 显然 $e_2,\ \cdots,\ e_{k+1}\in\mathcal{N}(a_1)$, 从而 $L=\operatorname{span}\{e_2,\ \cdots,\ e_{k+1}\}\subset\mathcal{N}(a_1)$. 反之, 任何 $x\in\mathcal{N}(a_1)$, 必有 $a_1(x)=0$, 从而 $x\in L$, 即 $L\supset\mathcal{N}(a_1)$. 但 L 是 X 的 k 维子空间, 由归纳法假设 L 是 X 的完备子空间, 因而必是 X 的闭子空间. 由引理 1, a_1 是 X 上连续函数. 同样可证, a_2、$\cdots$、a_{k+1} 都是连续的. 这样 φ 是连续的, 即 X 与 E^{k+1} 拓扑线性同构, 又由定理 11, X 必是完备的. 从而任何赋准范线性空间的有限维子空间是完备子空间. 证毕.

注意, 如果 X 是 n 维赋范线性空间, 定理 12 的证明要简单多. 事实上, 令 $M=\left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 由 (5.37) 得到

$$|\varphi^{-1}(a)-\varphi^{-1}(b)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|\,\|e_i\|$$

$$\leqslant M\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=M\|a-b\|,\tag{5.37$'$}$$

即 φ^{-1} 是连续的. 另一方面, 由 $\|\varphi^{-1}(a)\|$ 的连续性, 根据数学分析

的知识，函数$\|\varphi^{-1}(a)\|$必在E^n的单位球面S_1上有极小值m，并且m是可达的．因为$a\neq0$时，$\|\varphi^{-1}(a)\|\neq0$，所以$m>0$．从而

$$m\leqslant\left\|\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}\right)\right\|=\frac{1}{\|\varphi(x)\|}\|\varphi^{-1}(\varphi(x))\|=\frac{\|x\|}{\|\varphi(x)\|},$$
$$x\in X,$$

即对一切$x\in X$，$\|\varphi(x)\|\leqslant\frac{1}{m}\|x\|$（当$x=0$时，它显然是成立的）．因此，对任何$x, y\in X$，

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\|=\|\varphi(x-y)\|\leqslant\frac{1}{m}\|x-y\|. \tag{5.38}$$

由(5.38)立即知道φ是连续映射．不仅如此，结合(5.37)（令$M=\max\limits_i(\|e_1\|,\cdots,\|e_n\|)$），我们立即得到$n$维赋范空间$X$一个重要的不等式：存在正常数$M$、$m$，使得

$$m\|\varphi(x)\|\leqslant\|x\|\leqslant M\|\varphi(x)\|,\ x\in X,$$

或者说，当$x=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie_i$时

$$m\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|\leqslant M\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.39}$$

8．完备化

正如完备空间那一小节中所指出的，在不完备度量空间中，许多分析中的重要课题，例如方程求解，极限可达等问题的讨论将发生困难．很自然地问：对一个不完备的度量空间，是否能将它扩大（即补充一些“新点”），成为完备的度量空间？这个问题的回答是肯定的；这里采用的扩张方法是和Cantor把有理数扩充成实数的方法（不是Dedekind方法）一样的．关于“扩大”的确切叙述以及扩大的过程如下．

定义 设X是度量空间，如果有完备的度量空间X_1，使X保距同构于X_1的稠密子空间，那末称X_1是X的完备化空间（称X_1中的点为X的“理想点”）．

定理13 对于任一度量空间，必存在完备化空间．

证明 我们逐步作出定理的证明如下：

(1) 设 X 是度量空间，考虑 X 中的基本点列 $\xi=\{x_n\}$，$x_n\in X$. 这种点列的全体记做 $\widetilde{X}$. 如果 X 中的两个基本点列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 适合

$$\rho(x_n, y_n)\to 0,$$

那末，称 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 相等，记为 $\{y_n\}=\{x_n\}$. 相等的基本点列作为 $\widetilde{X}$ 的同一元素，而且规定：对于任意的 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\in\widetilde{X}$，

$$\tilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n).$$

我们要证明 $\tilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\})$ 在 $\widetilde{X}$ 上有确定的意义，而且是 $\widetilde{X}$ 上的距离.

事实上，由于 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 是基本点列，所以对任一正数 ε，必有 N，使得当 $n, m\geqslant N$ 时，$\rho(x_n, x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$，$\rho(y_n, y_m)<\frac{\varepsilon}{2}$，因此

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x_m, y_m)|\leqslant\rho(x_n, x_m)+\rho(y_n, y_m)<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)$ 存在. 如果 $\{z_n\}=\{x_n\}$，$\{w_n\}=\{y_n\}$，那末利用三角不等式，有

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(z_n, w_n)|\leqslant\rho(x_n, z_n)+\rho(y_n, w_n)\to 0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(z_n, w_n)$，即 $\tilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\})=\tilde{\rho}(\{z_n\}, \{w_n\})$. 这就是说，对于 $\xi, \eta\in\widetilde{X}$，$\tilde{\rho}(\xi, \eta)$ 与用来表示 ξ、η 的具体序列是 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 还是 $\{z_n\}$、$\{w_n\}$ 无关. 所以 $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$ 在 $\widetilde{X}$ 上有确定的意义.

显然，$\tilde{\rho}(\xi, \eta)\geqslant 0$，而且 $\tilde{\rho}(\{\xi_n\}, \{\eta_n\})=0$ 的充要条件是 $\rho(x_n, y_n)\to 0$，即 $\{x_n\}=\{y_n\}$. 又如果 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}\in X$，那末

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\{x_n\}, \{y_n\})&=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, z_n)+\lim_{n\to\infty}\rho(y_n, z_n)\\&=\tilde{\rho}(\{x_n\}, \{z_n\})+\tilde{\rho}(\{y_n\}, \{z_n\}),\end{aligned}$$

因此 $\widetilde{X}$ 按 $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$ 成一度量空间.

(2) 对于 $x\in X$，点列 $\{x, x, \cdots\}$ 显然是基本的，把它记成 $\tilde{x}$，所以 $\tilde{x}\in\widetilde{X}$. 作 $\widetilde{X}$ 的子集

$$X_0=\{\tilde{x}\mid x\in X\}. \tag{5.40}$$

容易看出，当 $x,\ y\in X$ 时，$\rho(x,\ y)=\tilde{\rho}(\tilde{x},\ \tilde{y})$，即映射 $x\mapsto\tilde{x}$ 是保距的。我们来证明：子空间 X_0 在 $\widetilde{X}$ 中稠密。

事实上，任取 $\xi=\{x_n\}\in\widetilde{X}$，考虑 X_0 中的点列

$$\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \cdots,\ \tilde{x}_n,\ \cdots$$

由定义知道 $\rho(\tilde{x}_k,\ \xi)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_k,\ x_n)$，$k=1,\ 2,\ \cdots$

因为 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本点列，对于任一正数 ε，必有 N，使得 k，$n\geqslant N$ 时，有 $\rho(x_k,\ x_n)<\varepsilon$。因此当 $k\geqslant N$ 时，有

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_k,\ \{x_n\})\leqslant\varepsilon,$$

即

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\rho}(\tilde{x}_k,\ \{x_n\})=0, \tag{5.41}$$

所以对于 $\xi\in\widetilde{X}$，有 X_0 中的点列 $\{\tilde{x}_k\}$ 收敛于 ξ，这就证明了 X_0 在 $\widetilde{X}$ 中稠密。

(3) 再证明 $\widetilde{X}$ 是完备的。设 $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots$ 是 $\widetilde{X}$ 中的基本点列，由于 X_0 在 $\widetilde{X}$ 中稠密，取 $\tilde{x}_n\in X_0\cap O\left(\xi_n,\ \dfrac{1}{n}\right)$，则

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_n,\ \xi_n)<\frac{1}{n}. \tag{5.42}$$

对任一正数 ε，取 $N>\dfrac{3}{\varepsilon}$，使得当 $n,\ m\geqslant N$ 时 $\rho(\xi_n,\ \xi_m)<\dfrac{\varepsilon}{3}$，于是

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_n,\ \tilde{x}_m)\leqslant\tilde{\rho}(\tilde{x}_n,\ \xi_n)+\tilde{\rho}(\tilde{x}_m,\ \xi_m)+\tilde{\rho}(\xi_n,\ \xi_m)<\varepsilon,$$

即 $\{\tilde{x}_n\}$ 是 $\widetilde{X}$ 的基本点列。记 $\xi=\{x_n\}$，则 $\xi\in\widetilde{X}$。由(5.41)知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\rho}(\tilde{x}_n,\ \xi)=0$，又由(5.42)得到

$$\tilde{\rho}(\xi_n,\ \xi)\leqslant\tilde{\rho}(\xi_n,\ \tilde{x}_n)+\tilde{\rho}(\tilde{x}_n,\ \xi)\to 0,\ (n\to\infty),$$

即 $\xi_n\to\xi$，这就证明了 $\widetilde{X}$ 是完备空间。

(4) 由于当 $x,\ y\in X$ 时，$\rho(x,\ y)=\tilde{\rho}(\tilde{x},\ \tilde{y})$，在 $\widetilde{X}$ 中把子空间 X_0 的元素 $\tilde{x}$ 换成 x，而不改变 $\widetilde{X}-X_0$ 中的元素，这样并不改变 $\widetilde{X}$ 中的距离，因此可以把 X 视为 $\widetilde{X}$ 的子空间。从证明的(2)知道 X 在 $\widetilde{X}$ 中稠密。证毕。

定理 14 设 $\widetilde{X}$、X' 是度量空间 X 的两个完备化空间，那末必有 $\widetilde{X}$ 到 X' 的唯一的保距同构映射 φ，使得对一切 $x\in X$，$\varphi(x)=x$，因此，度量空间的完备化空间在等距同构的意义下是唯一的.

证明 由于 X 在 $\widetilde{X}$ 中稠密，对于每个 $\xi\in\widetilde{X}$，必有一列 $\{x_n\}\subset X$，使得在 $\widetilde{X}$ 中 $x_n\to\xi$. 因为 X' 也是 X 的完备化空间，所以 $\{x_n\}$ 也是 X' 中的基本点列，从而必有 $x'\in X'$，使得在 X' 中 $x_n\to x'$，我们作映射 φ 如下：

$$\varphi(\xi)=x'$$

读者可以证明，这个映射有确定的意义，而且满足定理中的要求.

反之，如果又有 $\widetilde{X}\to X'$ 的保距同构映射 ψ，使得

$$\psi(x)=x,\ x\in X,$$

那末，对任何 $\xi\in\widetilde{X}$，存在 X 中基本点列 $\{x_n\}$，使得 $x_n\to\xi$，从而由保距映射 φ、ψ 的连续性，有 $\varphi(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi(x_n)=\psi(\xi)$，即 $\varphi=\psi$. 证毕.

利用定理 14，可以得到赋范线性空间的完备化定理.

定理 15 (1) 任何赋范线性空间可以完备化为 Banach 空间.

(2) 任何赋准范线性空间可以完备化成为 Fréchet 空间.

证明 先证 X 的完备化空间 $\widetilde{X}$ 是线性的. 设 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 是赋准范或赋范线性空间 X 的两个基本点列，对任何 $\alpha,\ \beta\in\Lambda$，由于

$$\|\alpha(x_n-x_m)+\beta(y_n-y_m)\|\leqslant\|\alpha(x_n-x_m)\|+\|\beta(y_n-y_m)\|, \tag{5.43}$$

利用准范数的条件(3)（固定数 γ，$\|\gamma x\|$ 在 $x=0$ 点是连续的）或范数的绝对一次齐性，从(5.43)可知 $\{\alpha x_n+\beta y_n\}$ 是基本点列. 如规定 $\widetilde{X}$ 上线性运算为：$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\}$，那末由此可知定理 13 中所作的 $\widetilde{X}$ 是线性空间.

再证 $\widetilde{X}$ 上的 $\tilde{\rho}$ 具有平移不变性. 设 $\xi=\{x_n\}$、$\eta=\{y_n\}$、$\zeta=\{z_n\}$ 是 $\widetilde{X}$ 的三个点，显然

$$\hat{\rho}(\xi-\eta, \zeta-\eta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n-y_n, z_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, z_n)=\tilde{\rho}(\xi, \zeta), \qquad (5.44)$$

即 $\tilde{X}$ 上的 $\hat{\rho}$ 具有平移不变性.

进一步的证明下面将分开进行.

(1) 设 X 是赋范空间. 要证明 $\tilde{X}$ 上 $\hat{\rho}$ 由范数导出, 只要证明对任何 $\alpha\in\mathbb{K}$, $\tilde{\rho}(\alpha\xi, 0)=|\alpha|\tilde{\rho}(\xi, 0)$ 即可. 事实上

$$\tilde{\rho}(\alpha\xi, 0)=\lim_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=|\alpha|\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=|\alpha|\tilde{\rho}(\xi, 0), \qquad (5.44)$$

根据§2 定理 3 的系, 知道 $\hat{\rho}$ 确是由范数导出的距离.

(2) 设 X 是赋准范线性空间. 根据§2 定理 3, 要证明 X 上 $\tilde{\rho}$ 是由准范数导出的距离, 仅需证明 $\tilde{\rho}$ 满足§2 定理 3 的连续性条件(vi).

根据§2 定理 4 和§4 定理 7 的(1), $(\alpha, x)\mapsto\alpha x$ 是度量空间 $\mathbb{K}\times X\to X$ 的连续映射, 因而对任何 αx 的 ε-环境 $O(\alpha x, \varepsilon)$, 必存在 $\mathbb{K}\times X$ 的点 (α, x) 的 δ-环境 $O((\alpha, x), \delta)$, 使得当 $(\alpha', x')\in O((\alpha, x), \delta)$ 时, 必有 $\alpha' x'\in O(\alpha x, \varepsilon)$, 即当 $|\alpha'-\alpha|^2+\|x'-x\|^2<\delta^2$ 时, 必有

$$\|\alpha' x'-\alpha x\|<\varepsilon. \qquad (5.45)$$

设 $\xi=\{x_n\}\subset X$, $\alpha_n\in\mathbb{K}$, 并且 $\alpha_n\to 0$. 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\alpha_n\xi, 0)=0$. 由于 $\{x_n\}$ 是基本点列, $\alpha_n\to 0$, 所以存在 N, 当 $n, m\geqslant N$ 时, $\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2}\delta$, $|\alpha_n|<\frac{1}{2}\delta$. 由(5.45)(取 $\alpha=0$, $x=0$)可知, 当 $k, n, m\geqslant N$ 时,

$$\|\alpha_k(x_n-x_m)\|<\varepsilon, \qquad (5.46)$$

因此(取 $n, k\geqslant N$)

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\rho}(\alpha_k\xi, 0)=\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|\alpha_k x_n\|$$
$$\leqslant\lim_{k\to\infty}\|\alpha_k x_N\|+\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|\alpha_k(x_N-x_n)\|$$
$$\leqslant\lim_{k\to\infty}\|\alpha_k x_N\|+\varepsilon, \qquad (5.47)$$

但 ε 给定后, N 就确定下来了. 对确定的 x_N, 由于 $\alpha_k\to 0(k\to\infty)$

和准范数的性质(3)，$\lim\limits_{k\to\infty}\|\alpha_k x_N\|=0$. 这样，(5.47)变成

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\rho}(\alpha_k\xi,\ 0)\leqslant\varepsilon.$$

上式左边不依赖于 ε，在上式中令 $\varepsilon\to0$，立即得到

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\rho}(\alpha_k\xi,\ 0)=0.$$

再设 $\alpha\in\mathbb{A}$，$\{\xi_k\}$ 是 $\widetilde{X}$ 中收敛于零的点列，今证明

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\rho}(\alpha\xi_k,\ 0)=0.$$

令 $\xi_k=\{x_n^{(k)}\}(k=1,\ 2,\ \cdots)$，取 n_k，使得 $m\geqslant n_k$ 时，

$$\|x_m^{(k)}-x_{n_k}^{(k)}\|<\frac{1}{k},\tag{5.48}$$

因而

$$\begin{aligned}|\tilde{\rho}(\xi_k,\ 0)-\|x_{n_k}^{(k)}\||&=|\lim_{m\to\infty}\|x_m^{(k)}\|-\|x_{n_k}^{(k)}\||\\&\leqslant\lim_{m\to\infty}\|x_m^{(k)}-x_{n_k}^{(k)}\|\leqslant\frac{1}{k},\end{aligned}\tag{5.49}$$

由假设 $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{\rho}(\xi_k,\ 0)=0$，从(5.49)式立即得到 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_{n_k}^{(k)}\|=0$.

对任何给定的 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，使得(5.45)成立。取 k_0 满足 $\dfrac{1}{k_0}<\delta$，因而当 $k\geqslant k_0$ 时，由(5.48)($\alpha=\alpha'$)得到

$$\|\alpha(x_{n_k}^{(k)}-x_m^{(k)})\|<\varepsilon\quad(m\geqslant n_k),\tag{5.50}$$

然而 $\alpha\xi_k=\{\alpha x_n^{(k)}\}$，

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\alpha\xi_k,\ 0)&=\lim_{m\to\infty}\|\alpha x_m^{(k)}\|\\&\leqslant\lim_{m\to\infty}\|\alpha(x_m^{(k)}-x_{n_k}^{(k)})\|+\|\alpha x_{n_k}^{(k)}\|,\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_{n_k}^{(k)}\|=0$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\alpha x_{n_k}^{(k)}\|=0$. 注意到(5.50)，就得到

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\rho}(\alpha\xi_k,\ 0)\leqslant\varepsilon,$$

再令 $\varepsilon\to0$，就得到

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{\rho}(\alpha\xi_k,\ 0)=0.$$

这样，我们证明了 $\widetilde{X}$ 上的 $\tilde{\rho}$ 确实是由准范数所导出的距离.

证毕.

显然，因为 $\tilde{X}$ 上 $\tilde{\rho}$ 与 X 上的 ρ 是一致的，所以导出 $\tilde{X}$ 上 $\tilde{\rho}$ 的准范数必是 X 上准范数的延拓.

从完备化观点来看，由于 $C[a,b]$ 作为一个集是 $L[a,b]$ 的稠密子集，$L[a,b]$ 是完备的，显然 $C[a,b]$ 按 $L[a,b]$ 的范数 $\|f\|=\int_a^b|f(t)|dt$ 并不完备，但 $C[a,b]$ 按 $\|\cdot\|$ 的完备化空间正是 $L[a,b]$. 换言之，$[a,b]$ 上 Lebesgue 积分可以视为连续函数的 Riemann 积分的完备化的结果. 完备化是分析数学中一个重要的基本思想方法. 下面再介绍这一思想在偏微分方程中的一个重要应用.

9. Соболев 空间 设 Ω 是 E^n 上的开集(简单一点，也可假设 Ω 是开区域，并且 Ω 的境界 $\partial\Omega$[注1]是光滑的)，$C_0^\infty(\Omega)$ 表示支集[注2]有界并落在 Ω 中的无限次连续可微函数全体按通常函数的加法和数乘所成的线性空间. 先说明 $C_0^\infty(\Omega)\neq\emptyset$. 事实上，作 E^n 上函数

$$\varphi(x,r)=\begin{cases}e^{-\frac{r^2}{r^2-\|x\|^2}}, & \text{当}\|x\|<r,\\ 0, & \text{当}\|x\|\geq r,\end{cases} \tag{5.51}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$\|x\|^2=\sum_{i=1}^n|x_i|^2$. 易知 $\varphi(x,r)$ 关于 x_1、$\cdots$、x_n 无限次可微. 任取 $a\in\Omega$，因 Ω 是开的，所以存在闭球 $S(a,r_0)$ $(r_0>0)$，它包含在 Ω 中，$\operatorname{supp}\varphi(x-a,r_0)\subset S(a,r_0)\subset\Omega$.

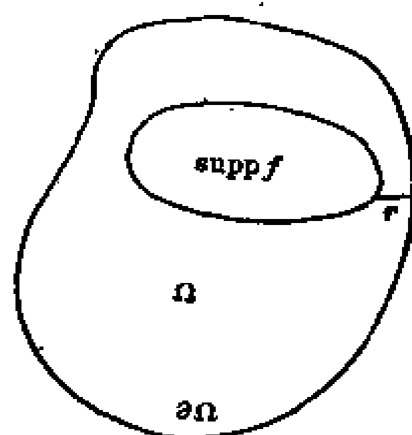
引理 2 $C_0^\infty(\Omega)$ 是 $L^p(\Omega,m)$ $(0<p<\infty)$ 中稠密集.

证明 先假设 Ω 是开区域. 我们先证明：对任何 $f\in C_0(\Omega)$ ($C_0(\Omega)$ 是支集有界并包含在 Ω 中的连续函数全体) 必有 $C_0^\infty(\Omega)$ 中支集一致有界的函数列 $\{\varphi_m\}$，在 Ω 上 φ_m 一致收敛于 f.

事实上，因为 $\partial\Omega\cap\operatorname{supp}f=\emptyset$，并且 $\operatorname{supp}f$ 是有界闭集，容易证明 $\rho(\partial\Omega,\operatorname{supp}f)=r>0$ (更一般的结论可见 §6 定理 10 的系 3). 利用(5.51)，作 Weierstrass 奇异积分核

[注1] 按度量空间一般记号，集 A 的境界记为 $\Gamma(A)$，用 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的境界，这在许多数学分支中也是常用的.

[注2] 函数 f 的支集是指集 $E=\{x|f(x)\neq0\}$ 的闭包，记为 $\operatorname{supp}f$. 见第一小节.



$$k_m(x)=\frac{\varphi\left(x,\ \frac{1}{m}\right)}{\int\varphi\left(x,\ \frac{1}{m}\right)dx},\quad m=1,\ 2,\ \cdots,\ dx=dx_1\cdots dx_n.\tag{5.52}$$

又作函数

$$\varphi_m(x)=\int_\Omega f(z)k_m(z-x)dz.\tag{5.53}$$

显然，当 $\frac{1}{m}<\frac{r}{2}$，$\rho(x,\ \text{supp}f)\geqslant\frac{r}{2}$ 时，对任何 $z\in\text{supp}f$，总有 $f(z)k_m(z-x)=0$，从而 $\varphi_m(x)=0$，即

$$\text{supp}\,\varphi_m\subset\left\{x\,\middle|\,\rho(x,\ \text{supp}f)<\frac{r}{2}\right\}\cap\Omega,$$

从而 $\{\varphi_m\}$ 是支集一致有界的函数列．从(5.53)中的 $k_m(z-x)$ 是无限次可微的，立即可知 φ_m 也是无限次可微的，并且当 $\frac{1}{m}<\frac{r}{2}$ 时，$\varphi_m\in C_0^\infty(\Omega)$．

在 Ω^c 上补充定义 $f(z)$ 的值为零．这样

$$\begin{aligned}\varphi_m(x)&=\int_\Omega f(z)k_m(z-x)dz=\int_{E^n}f(z)k_m(z-x)dz\\&=\int_{E^n}f(y+x)k_m(y)dy.\end{aligned}$$

又注意到 $\int_{E^n}k_n(y)dy=1$，$k_n(y)\geqslant0$，所以从

$$\varphi_m(x)-f(x)=\int_{E^n}(f(x+y)-f(x))k_m(y)dy$$

得到

$$|\varphi_m(x)-f(x)|\leqslant\int_{|y|<\frac{1}{m}}|f(x+y)-f(x)|k_m(y)dy$$

$$\leqslant\max_{|y|<\frac{1}{m}}|f(x+y)-f(x)|,$$

由 f 的均匀连续性，易知 $\{\varphi_m(x)\}$ 在 Ω 上一致收敛于 $f(x)$.

显然，集 $\left\{x\,|\,\rho(x,\ \mathrm{supp}f)<\frac{r}{2}\right\}$ 的闭包 F 是有界闭集(从而 $m(F)<\infty$)，并且 $\mathrm{supp}f\subset F$. 所以

$$\int_\Omega|\varphi_m(x)-f(x)|^p dx\leqslant\max_{x\in\Omega}|\varphi_m(x)-f(x)|^p m(F)\to 0$$

$$(m\to\infty),\tag{5.54}$$

即 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $C_0(\Omega)$ 中稠密. 但在定理 4 中已证明 $C_0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega,m)$ 中稠密，所以 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega,\ m)$ 中稠密. 证毕.

引理3 设 $f\in L^p(\Omega,\ m)$ $(1\leqslant p<\infty)$. 如果对任何 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx=0,\tag{5.55}$$

那末 $f(x)$ 必关于 Lebesgue 测度 m 几乎处处等于零.

证明 我们仅证 $p>1$ 的情况，$p=1$ 时证明是类似的，留给读者作为练习. 先说明 $f(x)\varphi(x)$ 在 Ω 上积分存在. 记 $F=\mathrm{supp}\,\varphi$, 显然 $m(F)<\infty$, 所以 φ 必是 Ω 上 q 次可积的($q>0$). 特别，取 q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 由 Hölder 不等式可知 $f(x)\varphi(x)$ 可积.

当 $\varphi\in C_0(\Omega)$ 时，我们证明(5.55)也成立. 事实上，由引理 2, 存在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中支集一致有界的序列 $\{\varphi_m\}$, $\{\varphi_m\}$ 在 Ω 上一致收敛于 φ, 因而存在有界闭集 F_1(显然 $m(F_1)<\infty$), 使得

$$\mathrm{supp}\varphi\subset F_1,\ \mathrm{supp}\,\varphi_m\subset F_1,\ m=1,\ 2,\ \cdots$$

由 Hölder 不等式

$$\left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{\Omega} f(x)\varphi_m(x)\,dx\right|+\left|\int_{\Omega} f(x)(\varphi_m(x)-\varphi(x))\,dx\right|$$

$$\leqslant\left(\int_{\Omega}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Omega}|\varphi_m(x)-\varphi(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{5.56}$$

但是

$$\int_{\Omega}|\varphi_m(x)-\varphi(x)|^q\,dx=\int_{F_1}|\varphi_m(x)-\varphi(x)|^q\,dx$$

$$\leqslant\max_{x\in F_1}|\varphi_m(x)-\varphi(x)|^q m(F_1), \tag{5.57}$$

令 $m\to\infty$，由(5.57)、(5.56)可知(5.55)对 $\varphi\in C_0(\Omega)$ 成立.

我们再证明当 φ 是闭包包含在 Ω 中的立方体 I 的特征函数时，(5.55)仍成立. 事实上，对于 $\varphi(x)=\chi_I(x)$，显然，必存在 $C_0(\Omega)$ 中一致有界的并且支集一致有界的函数列 $\{\varphi_m\}$ 处处收敛于 φ. 设常数 M 满足 $|\varphi(x)|\leqslant M$, $|\varphi_m(x)|\leqslant M(m=1, 2, \cdots)$，又设有界闭集 F_2 满足 $\operatorname{supp}\varphi\subset F_2$, $\operatorname{supp}\varphi_m\subset F_2(m=1, 2, \cdots)$，由有界控制收敛定理仍可得到

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega}|\varphi_m(x)-\varphi(x)|^q\,dx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_{F_2}|\varphi_m(x)-\varphi(x)|^q\,dx=0,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{5.58}$$

再由(5.56)式就得到(5.55)对 $\varphi(x)=\chi_I(x)$ 成立.

因为(5.55)对 $\chi_I(x)$ 成立，从而(5.55)对支集包含在 Ω 内的简单函数成立. 再利用这个事实，我们来证明当 φ 是闭包包含在 Ω 中的可测集 A 的特征函数时，(5.55)还成立. 对于 $\varphi(x)=\chi_A(x)$，显然，存在一致有界的并且支集一致有界的函数列 $\{\varphi_n\}$ 处处收敛于 φ. 同样用有界控制收敛定理可以证明(5.58)成立，从而通过(5.56)得到(5.55)成立.

既然(5.55)对一切闭包包含在 Ω 中可测集 A 的特征函数(5.55)成立，由此可知 $f(x)$ 在 Ω 中任何一个有界闭集中必几乎处处等于零，从而 $f(x)$ 必在 Ω 中几乎处处等于零.

如果 Ω 是一般开集，不难把 Ω 分成最多可列个互不相交的开区域加以逐个讨论，从而引理 3 成立。证毕。

注 上述的证明，实质上是利用 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^q(\Omega, m)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 中稠密得到的。当注意到这一点后，如果对每个 $f\in L^p(\Omega, m)$，引入 $L^q(\Omega, m)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\right)$ 上函数

$$F_f(\varphi)=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx,\ \varphi\in L^q(\Omega, m),$$

由 Hölder 不等式 $|F_f(\varphi)|\leqslant\|\varphi\|\|f\|$ 知道 F_f 是 $L^q(\Omega, m)$ 上连续函数。而假设(5.55)表示 F_f 在 $L^q(\Omega, m)$ 的稠密集 $C_0^\infty(\Omega)$ 上的值是 0，由连续性，对一切 $\varphi\in L^q(\Omega, m)$，$F_f(\varphi)=0$。从而对 Ω 的一切可测子集的 A 的特征函数(5.55)成立，即 $f\doteq 0$。

广义导函数 利用引理 3 可以引入如下概念。

定义 设 $S=(S_1, \cdots, S_n)$ 是自然数组，记 $|S|=\sum\limits_{i=1}^n S_i$，$D^S=\dfrac{\partial^{|S|}}{\partial x_1^{S_1}\cdots\partial x_n^{S_n}}$。又设 $f, g\in L^p(\Omega, m)(1\leqslant p<\infty)$。如果对任何 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx=(-1)^{|S|}\int_\Omega f(x)D^S\varphi(x)dx, \tag{5.59}$$

那末称 g 是 f 在 Соболев 意义下的 S 阶广义导数，简称为广义导数(又称弱导数)。常记 g 为 D^Sf。

从引理 3 可知，如果 f 的广义导数 D^Sf 存在，那末它必是唯一的(两个几乎处处相等的函数视为同一个)。又如果 f 是 Ω 上充分光滑的普通函数，例如在 Ω 上具有 S 阶偏导数，并且

$$\frac{\partial^S}{\partial x_1^{S_1}\cdots\partial x_n^{S_n}}f(x)\in L^p(\Omega, m),$$

那末用分部积分易证 f 的广义导数 D^Sf 就是普通的导数 D^Sf。

现在，利用广义导数概念来定义 Соболев 空间。

定义 设 m 是非负整数，$1\leqslant p<\infty$，在集 $W_p^m(\Omega)=\{f\,|\,D^Sf$ 存在，并且 $D^Sf\in L^p(\Omega, m)$，$|S|\leqslant m\}$ 上引入

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)}=\left(\int_\Omega \sum_{|S|\leq m} |D^S f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.60}$$

称 $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$ 是Соболев 范数，称赋范线性空间 $W_p^m(\Omega)$ 为 Соболев 空间.

定理 16　Соболев 空间是 Banach 空间.

证明　假设 $f_1, f_2\in W_p^m(\Omega)$，容易从广义导数定义中的(5.59)和引理 3 知道，对任何 $\alpha, \beta\in \mathbb{K}$,

$$D^S(\alpha f_1+\beta f_2)=\alpha D^S f_1+\beta D^S f_2\in L^p(\Omega, m), \tag{5.61}$$

即 $W_p^m(\Omega)$ 是线性空间.

用 $\|\cdot\|$ 表示 $L^p(\Omega, m)$ 上范数，从 $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$ 的定义(5.60)和 Minkowski 不等式知道，对任何 $f_1, f_2\in W_p^m(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\|f_1+f_2\|_{W_p^m(\Omega)}&=\{\sum_{|S|\leq m} \|D^S f_1+D^S f_2\|^p\}^{\frac{1}{p}}\\&\leq\{\sum_{|S|\leq m} (\|D^S f_1\|+\|D^S f_2\|)^p\}^{\frac{1}{p}}\\&\leq(\sum_{|S|\leq m} \|D^S f_1\|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{|S|\leq m} \|D^S f_2\|^p)^{\frac{1}{p}}\\&=\|f_1\|_{W_p^m(\Omega)}+\|f_2\|_{W_p^m(\Omega)},\end{aligned}$$

即 $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$ 满足三角不等式．而 $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$ 满足范数的另外两个条件是显然的，所以 $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$ 是范数.

再证 $W_p^m(\Omega)$ 按 $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$ 是完备的．事实上，设 $\{f_n\}$ 是 $W_p^m(\Omega)$ 中一个点列，并按 $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$ 是基本的．显然，对任何 $S=(S_1, \cdots, S_n)$，$\{D^S f_n\}$ 必是 $L^p(\Omega, m)$ 中的基本点列，由于 $L^p(\Omega, m)$ 是完备的，所以存在 $f^S\in L^p(\Omega, m)$，使得 $\|D^S f_n-f^S\|\to 0(n\to\infty)$．对任何 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$，由 Hölder 不等式，

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega (D^S f_n-f^S)(x)\psi(x)dx\right|\\&\leq\|D^S f_n-f^S\|\left(\int_\Omega |\psi(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{5.61}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$（当 $p=1$ 时，$q=\infty$，$\left(\int_\Omega |\psi(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}=\max\limits_{x\in\Omega}|\psi(x)|$），

然而对任何 f_n 以及 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega D^S f_n(x)\varphi(x)dx=(-1)^{|S|}\int_\Omega f_n(x)D^S\varphi(x)dx,\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

由(5.61)立即得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega D^S f_n(x)\varphi(x)dx=\int_\Omega f^S(x)\varphi(x)dx.$$

再在(5.61)中取 $S=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$, $\psi(x)=D^S\varphi(x)$, 又得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)D^S\varphi(x)dx=\int_\Omega f(x)D^S\varphi(x)dx,$$

因此对任何 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f^S(x)\varphi(x)dx=(-1)^{|S|}\int_\Omega f(x)D^S\varphi(x)dx,$$

即 $D^Sf=f^S$, 从而 $f\in W_p^m(\Omega)$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{W_p^m(\Omega)}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{|S|\leqslant m}\int_\Omega|D^Sf_n-D^Sf|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=0,$$

这就是说, $W_p^m(\Omega)$是 Banach 空间. 证毕.

显然, $W_p^m(\Omega)$是可析空间. 如果m充分大, $W_p^m(\Omega)$中函数应该具有光滑性. 例如, 可以证明当 $m>n/p$ 时, $W_p^m(\Omega)$ 包含在 $C(\Omega)$中, 并且存在常数 C, 使得

$$\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\leqslant C\|f\|_{W_p^m(\Omega)},\ f\in W_p^m(\Omega).$$

10. 商空间

下面再对商空间的完备性进行讨论.

设 X 是赋范线性空间, L 是 X 的子空间, 如果在 X/L 中引入

$$p(\tilde{f})=\inf_{f\in\tilde{f}}\|f\|,\ \tilde{f}\in X/L. \tag{2.16}$$

由§2 定理 5 知道, 一般说来$p(\cdot)$只是 X/L 上拟范数. 但有下列基本事实.

定理 17 设 L 是赋范线性空间 X 中的闭子空间, 那末由(2.16) 所定义的$p(\cdot)$ 是 X/L 上的范数. 而当 X 还是 Banach 空间时, X/L 也是 Banach 空间.

证明 §2 定理 5 已证明$p(\cdot)$是拟范数. 今只要指出当 L 是

闭集时，$p(\cdot)$是范数，即当$p(\tilde{f})=0$时，必然$\tilde{f}=0$. 事实上，由于$p(\tilde{f})=0$，必存在$\tilde{f}$中点列$\{f_n\}$，满足$\|f_n\|\to 0$. 但

$$f=(f-f_n)+f_n,\ f-f_n\in L, \tag{5.62}$$

由$\|f_n\|\to 0$，可知L中点列$\{f-f_n\}$收敛于f，因为L是闭的，所以$f\in L$，从而$\tilde{f}=\tilde{0}$，即$p(\cdot)$是范数.

$p(\cdot)$既是范数，下面改记$p(\tilde{f})$为$\|\tilde{f}\|$.

现在证明在X是Banach空间的条件下，X/L也是Banach空间，即证明X/L中任何基本点列$\{\tilde{x}_n\}$必收敛. 不妨设$\{\tilde{x}_n\}$满足：当$m\geqslant n$时，$\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_m\|<\frac{1}{2^{n+1}}$，$n=1, 2, \cdots$（否则用$\{\tilde{x}_n\}$的子序列代替$\{\tilde{x}_n\}$），因而存在$y_n\in\tilde{x}_{n+1}-\tilde{x}_n=\widetilde{x_{n+1}-x_n}$，使得

$$\|y_n\|<\frac{1}{2^{n+1}},\ n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{5.63}$$

又任取$y_0\in\tilde{x}_1$，令$x_n'=\sum\limits_{i=1}^{n-1}y_i$. 显然，由(5.63)可知，点列$\{x_n'\}$是$X$中的基本点列$\left(\text{当}\ m\geqslant n\ \text{时}, \|x_m'-x_n'\|=\left\|\sum\limits_{n+1}^{m}y_i\right\|<\frac{1}{2^{n+1}}\right)$，所以有极限$x$. 我们只要证明$\tilde{x}$就是$\{\tilde{x}_n\}$的极限就可以了. 事实上，对任何$\varepsilon>0$，必存在$N$，使得$\|x_n'-x\|<\varepsilon$，从而

$$\|\widetilde{x-x_n'}\|\leqslant\|x-x_n'\|<\varepsilon, \tag{5.64}$$

但是

$$\tilde{x}_n'=\widetilde{\sum_{i=1}^{n-1}y_i}=\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{y}_i=\sum_{i=1}^{n-1}(\tilde{x}_{i+1}-\tilde{x}_i)+\tilde{x}_1=\tilde{x}_n, \tag{5.65}$$

由(5.65)和(5.64)，立即得到$\tilde{x}$是$\{\tilde{x}_n\}$的极限. 证毕

系　设L是赋范线性空间X的闭线性子空间，E是X的有限维子空间，那末$L+E=\{x+y\,|\,x\in L,\ y\in E\}$必是$X$的闭线性子空间.

证明　显然，$L+E$是线性子空间，下面证明$L+E$是闭的. 因为X/L是赋范线性空间，而$\tilde{E}=\{\tilde{x}\,|\,x\in E\}$是$X/L$的有限维线性子空间，因而$\tilde{E}$是赋范线性空间$X/L$的闭集. 又因为映射

$$Q: x\mapsto\tilde{x},\ x\in\tilde{x}$$

是赋范线性空间X到赋范线性空间X/L的线性同态，并且

$Q^{-1}(\tilde{E})=E+L$. 由于

$$\|\tilde{x}-\tilde{y}\|=\|\widetilde{x-y}\|\leqslant\|x-y\|,$$

所以 Q 是连续的，因而闭集 $\tilde{E}$ 的原象 $Q^{-1}(\tilde{E})=E+L$ 是 X 中的闭集。证毕。

习　题

1. 证明定理 5.

2. 证明定理 4、5 对 Ω 是开集的情况也成立.

3. 证明度量空间 s、S、$\mathscr{A}$ 均是可析的.

4. 证明赋范线性空间 C、C_0 是可析的，并且是完备的.

5. 证明两个可析（或完备）度量空间的乘积度量空间必是可析的（或完备的）.

6. 证明度量空间中任何可析集的势不超过 $\aleph$.

7. $C_{2\pi}$ 表示直线上周期为的连续函数全体按通常函数的加法和数乘所成的线性空间，并规定范数 $2\pi\|x\|=\max\limits_t|x(t)|$. 证明直线上三角多项式全体 $T_{2\pi}$ 必在 $C_{2\pi}$ 中稠密.

8. 证明 $C_{2\pi}$ 是 $L^p([0,2\pi],m)$ $(0<p<\infty)$ 中稠密. 但 $C_{2\pi}$ 在 $L^p([0,4\pi],m)$ $(0<p<\infty)$ 中不稠密.

9. 证明度量空间中基本点列必是有界点列.

10. 定义　设 X 是赋准范线性空间，$\{a_n\}$ 是 X 的一个点列. 如果存在 $a\in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu-a\|=0$，那末称级数 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 收敛，并称 a 是 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 的和.

证明：当 X 是 Fréchet 空间时，$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 收敛的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，当 $n,m\geqslant N$ 时，$\|\sum\limits_{\nu=m+1}^{n}a_\nu\|<\varepsilon$.

11. 证明完备度量空间中的闭集必是完备子空间. 而任何度量空间中的完备子空间必是闭子集.

12. 证明度量空间是完备的充要条件是：任何单调下降非空闭集序列 $\{F_n\}$，如果 F_n 的直径 $d_n=\sup\limits_{x,y\in F_n}\rho(x,y)\to0$，那末 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 不空.

13. 证明完备度量空间中任何一列稠密的开集 $\{O_n\}$ 的交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n$ 必是稠密集.

14. 设 $\{X_n\}$ 是一列赋范线性空间，在一切满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<\infty$ 的序列,

$\{x_n\}(x_n\in X_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots)$全体按通常的序列的加法和数乘构成的线性空间$X$中引入

$$\|\{x_n\}\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ (p\geqslant 1).$$

证明X按$\|\cdot\|$成为赋范线性空间，并且当$X_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$都是Banach空间时，X也是Banach空间.

15．证明$V[a,\ b]$、$V_0[a,\ b]$都是Banach空间.

16．证明无限维Banach空间X中，决不存在可列个向量$\{x_n\}$构成X的线性基.

§6　紧　　集

1．引言

设f是$[a,\ b]$上的连续函数．在数学分析中曾经证明，必存在$x_0\in[a,\ b]$，使得$f(x_0)=\sup\limits_{a<x<b}f(x)$，因而$f(x_0)=\sup\limits_{a<x<b}f(x)=\max\limits_{a<x<b}f(x)$．证明这个命题时所用的一个基本工具就是Weierstrass定理：直线上任何一个有界点列必有收敛子点列．事实上，在许多分析数学领域(例如方程求解问题，函数方程求根问题，极限可达问题等)中，为了证明事先给定的映射能取到给定的特殊值，经常采用抽取收敛子序列的方法．对于度量空间本身，我们也有使用这种方法的需要．例如，设F是度量空间X中的点集，$x_0\in X$．我们曾定义过x_0与F的距离(参见§4第9小节)：$\rho(x_0,\ F)=\inf\limits_{x\in F}\rho(x_0,\ x)$．假如要问这个距离$\rho(x_0,\ F)$是否可达，即是否存在$y_0\in F$，使得$\rho(x_0,\ y_0)=\rho(x_0,\ F)$，如果集$F$具有这样的性质：$F$中任何一个点列$\{x_n\}$必有收敛子点列，那末我们就可以肯定地说，这时$\rho(x_0,\ F)$必可达．事实上，按$\rho(x_0,\ F)$的定义，在$F$中可先取出一个点列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_0,\ x_n)=\rho(x_0,\ F)$．然后再从$\{x_n\}$中抽出一个收敛子点列$\{x_{n_\nu}\}$，记这个点列的极限为$y_0$，易知$\rho(x_0,\ y_0)=\rho(x_0,\ F)$．度量空间概念既是各个分析领域中有关概念和方法中共同特性的抽象，自然要问：究竟怎样的集才具有它

的任何一个点列都能抽出收敛子点列的性质呢？在直线上，由 Weierstrass 定理，可知有界集都具有这样的性质．在一般度量空间中，有界集就未必具有这样的性质了．

例 1 在闭区间$[0, 1]$上作连续函数列 $f_n(x)$, $n=1, 2, \cdots$ 其中

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\geqslant\dfrac{1}{n}\text{ 时},\\ 1-nx, & \text{当 } x<\dfrac{1}{n}\text{ 时}.\end{cases}$$

显然，$\{f_n\}$ 是度量空间 $C[0, 1]$ 中的有界点列（由 $\{f_n\}$ 所成的集 A 是有界集），因为

$$\|f_n\|=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)|\leqslant 1,\ n=1, 2, \cdots$$

但不可能有子序列在 $C[0, 1]$ 中收敛．事实上，如果 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 $C[0, 1]$ 中按范数收敛于 $f(x)$，那末应有

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ 0, \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\end{cases}$$

这和 $f(x)$ 应在 $x=0$ 具有连续性相矛盾（这顺便证明了 A 是闭集，因为它没有极限点）．所以，Weierstrass 定理在度量空间 $C[0,1]$ 中不成立．

因此，在一般的度量空间中，不是每一个有界点列都有收敛子点列，这就有必要引入下述致密集的概念．

2．列紧集（致密集）

定义 设 X 是度量空间，A 是 X 中的点集．如果 A 中的任何点列必有在 X 中收敛的子点列，就称 A 是（X 中的）列紧集，或致密集．如果 X 本身是致密集，那末称 X 是列紧空间，或致密空间．

显然，E^n 中有界集必是列紧集（如果读者在数学分析中未曾学过这个定理，可以自己仿直线上 Weierstrass 定理的证明方法，只要将直线上区间的两分法换成 E^n 中立方体的 2^n 等分法来证明）．

容易看出列紧集有下面的几点性质：

(1) 有限点集是列紧集.

(2) 有限个列紧集的和集是列紧集.

(3) 列紧集的任何子集是列紧集，因此，任意一族列紧集的交集是列紧集.

(4) 列紧集的闭包是列紧集.

事实上，设 A 是列紧集，任意取 $\overline{A}$ 中一列 $\{x_n\}$，那末对每个 n，有 $y_n\in A$，使得 $\rho(x_n, y_n)<\frac{1}{n}$. 因为 A 是列紧的，有子列 $\{y_{n_k}\}$ 及点 $y\in X$，使得 $y_{n_k}\to y(k\to\infty)$，所以 $x_{n_k}\to y$，因此 $\overline{A}$ 是列紧集.

(5) 列紧集中的基本点列必然收敛，因此，如果全空间 X 是列紧集，那末度量空间 X 本身是完备的.

事实上，设 $\{x_n\}$ 是列紧集 A 中的基本点列，那末必有子点列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于度量空间 X 中的一点 x_0，根据 § 5 定理 7 的(2)，有 $x_n\to x_0$.

(6) 列紧集必是有界集.

事实上，如果集 A 是无界的，那末容易用归纳法从 A 中选取一个点列 $\{x_n\}$，使得 $\rho(x_n, x_m)\geqslant 1(n\neq m)$. 这样，$\{x_n\}$ 就不存在收敛的子点列，从而 A 就不可能是列紧集.

在一般的度量空间中，有界集未必是列紧集. 但我们有如下定理.

定理 1　有限维的赋范线性空间上的有界集必是列紧集.

证明　设 e_1、…、e_n 是 n 维赋范线性空间 X 的线性基. 类似于 § 5 定理 12 的证明，对任何 $x\in X$，$x=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$，$a_i\in\Lambda(i=1, 2, \cdots, n)$，作 $X\to E^n$ 的线性同构

$$\varphi: x\mapsto a=(a_1, a_2, \cdots, a_n). \tag{6.1}$$

记 $M=\max\limits_i\|e_i\|$，又记 E^n 上连续函数 $f(a)=\|\varphi^{-1}(a)\|$ 在单位球面上的最小值 m(m 必是正数). 由(5.39)得到

$$m\|a-b\|\leqslant\|x-y\|\leqslant M\|a-b\|, \tag{6.2}$$

其中 $a=\varphi(x)$, $b=\varphi(y)$.

设 A 是 X 中的有界集，由(6.2)左边的不等式(取 $x=0$, $y\in A$) 可知，$\varphi(A)$ 必是 E^n 上有界集. 因而对 A 中任何点列 $\{x_n\}$，$\{\varphi(x_n)\}$ 在 E^n 中必有收敛子点列 $\{\varphi(x_{n_\nu})\}$，记它的极限为 a，由(6.2)右边的不等式(取 $y=x_{n_\nu}$, $b=\varphi(x_{n_\nu})$, $x=\varphi(a)$)可知

$$\|x_{n_\nu}-\varphi^{-1}(a)\|\leqslant M\|\varphi(x_{n_\nu})-a\|\to 0,\ (\nu\to\infty), \tag{6.3}$$

即 $\{x_n\}$ 的子点列 $\{x_{n_\nu}\}$ 是收敛的，所以 A 是 X 中列紧集. 证毕.

注意，有限维赋准范线性空间上的有界集未必是列紧集. 例如，在赋准范空间 R_1 上，由于任何两点的距离不超过 1，所以自然数序列 $\{n\}$ 是 R_1 上有界集，但是当 $n\neq m$ 时

$$\rho(n,\ m)=\frac{|n-m|}{1+|n-m|}\geqslant\frac{1}{2},$$

所以 $\{n\}$ 在 R_1 上没有收敛子点列.

3. 列紧集和完全有界集

例 1 已经指出度量空间上有界集未必是列紧的，而度量空间上列紧集必是有界集，因此，列紧性比有界性要求更高. E^n 中有界集之所以必是列紧的，从证明过程中可知，主要在于 E^n 上有限立方体在进行 2^n 等分时，随着等分的次数趋向无限大，小立方体的直径趋于零. 受这一事实的启发，我们引入下面的概念.

定义 设 A、B 是度量空间 X 的点集. 如果有正数 ε 使得以 B 中各点为心的 ε-开球全体覆盖 A:

$$\bigcup_{x\in B}O(x,\ \varepsilon)\supset A,$$

那末称 B 是 A 的一个 ε-网. 特别，当 B 是有限集时，称 B 是 A 的有限 ε-网.

如果对任意正数 ε，点集 A 总有有限的 ε-网 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}\subset X$(这些点以及它们的个数可以随着 ε 而改变)，那末称 A 是完全有界集.

容易看出下面的一些性质.

(1) 完全有界集是有界集.

事实上，如果 A 是有界集，取 $\varepsilon=1$，那末 A 有有限 1-网 $\{x_1,$

$\cdots, x_n\}$，即 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} O(x_k, 1) \supset A$. 因此对任何 $x\in A$，必有相应的 x_ν，使得 $\rho(x, x_\nu)<1$. 又记 $M=\max\limits_{\nu}\rho(x_\nu, x_1)$，显然

$$\rho(x_1, x)\leqslant\rho(x, x_\nu)+\rho(x_\nu, x_1)<1+M,$$

因此 A 是有界集.

(2) 如果 $\{x_n\}$ 是度量空间中的基本点列，那末由 $\{x_n\}$ 所构成的集 A 必是完全有界的.

事实上，对任何 $\varepsilon>0$，因为 $\{x_n\}$ 是基本的，所以必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\rho(x_n, x_N)<\varepsilon$. 易知 $\{x_1, \cdots, x_N\}$ 便是集 A 的有限 ε-网.

(3) 如果 A 是完全有界集，那末对任何 $\varepsilon>0$，必存在 A 中有限个点 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 构成 A 的 ε-网.

事实上，对 $\varepsilon>0$，任取有限 $\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$，当 $A\cap O\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)\neq\emptyset\,(i=1, 2, \cdots, m)$ 时，在 $O\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)\cap A$ 中任取一点 x_i，这样得到的 $\{x_i\}$ 全体设为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}\,(n\leqslant m)$. 由于对任何 $x\in A$，必有 y_i，使得 $\rho(x, y_i)<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$\rho(x, x_i)\leqslant\rho(x, y_i)+\rho(y_i, x_i)<\varepsilon,$$

即 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 A 的 ε-网.

定理 2 度量空间 X 中的点集 A 是完全有界的充要条件是：对 A 中任何一个点列 $\{x_n\}$，必可抽出一个基本的子点列.

证明 必要性 设 $\{y_\nu\}$ 是 A 中的一个点列，今证它有基本的子点列. 显然，我们不妨可设 $\{y_\nu\}$ 是无限多个点所构成的点列. 取 $\varepsilon=\frac{1}{n}\,(n=1, 2, \cdots)$，设 $\{x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$ 是 A 的有限 $\frac{1}{n}$-网. 因为 $\bigcup\limits_{\nu} O(x_\nu^{(1)}, 1)\supset\{y_\nu\}$，所以在球

$$O(x_1^{(1)}, 1),\ O(x_2^{(1)}, 1),\ \cdots,\ O(x_{k_1}^{(1)}, 1)$$

中必有一个球，例如 $O(x_{m_1}^{(1)}, 1)$，包含 $\{y_n\}$ 中的无限个点. 又因为

$$\bigcup_{\nu} O\left(x_{\nu}^{(2)}, \frac{1}{2}\right) \supset \{y_{\nu}\},$$

所以 $O(x_{m_1}^{(1)}, 1) \cap \left(\bigcup_{\nu} O\left(x_{\nu}^{(2)}, \frac{1}{2}\right)\right)$ 中包含 $\{y_{\nu}\}$ 中无限多个点. 因此, 必有 $O\left(x_{m_2}^{(2)}, \frac{1}{2}\right)$, 使得 $O(x_{m_1}^{(1)}, 1) \cap O\left(x_{m_2}^{(2)}, \frac{1}{2}\right)$ 中含有 $\{y_{\nu}\}$ 中的无限多个点. 这样继续下去, 对每个自然数 n, 有集

$$\bigcap_{\mu=1}^{n} O\left(x_{m_\mu}^{(\mu)}, \frac{1}{\mu}\right)$$

含有 $\{y_{\nu}\}$ 中的无限多个点. 所以可以取子列 $\{y_{k_n}\}$, 使得 $y_{k_n} \in \bigcap_{\mu=1}^{n} O\left(x_{m_\mu}^{(\mu)}, \frac{1}{\mu}\right)$. 于是, 当 $n \geqslant \mu$ 时

$$\rho(y_{k_n}, x_{m_\mu}^{(\mu)}) < \frac{1}{\mu},$$

因此, 当 $n \geqslant \mu$ 时

$$\rho(y_{k_\mu}, y_{k_n}) \leqslant \rho(y_{k_\mu}, x_{m_\mu}^{(\mu)}) + \rho(y_{k_n}, x_{m_\mu}^{(\mu)}) < \frac{2}{\mu},$$

所以 $\{y_{k_n}\}$ 是 X 中的一个基本点列.

充分性(反证法) 如果 A 不是完全有界的, 也就是说存在某个 $\varepsilon_0 > 0$, A 不存在有限的 ε_0-网, 从而在 A 中任取一点 x_1, 显然 $A - O(x_1, \varepsilon_0) \neq \emptyset$. 又任取 $x_2 \in A - O(x_1, \varepsilon_0)$. 显然 $A - (O(x_1, \varepsilon_0) \cup O(x_2, \varepsilon_0)) \neq \emptyset$. 再任取 $x_3 \in A - (O(x_1, \varepsilon_0) \cup O(x_2, \varepsilon_0))$, 如此一直做下去, 便得到 A 中的一个点列 $\{x_n\}$, 显然

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0, \quad (n \neq m),$$

从而 $\{x_n\}$ 中决不可能有基本的子点列. 这与假设矛盾. 所以 A 是完全有界的. 证毕.

定理 3 (Hausdorff) (1) 度量空间中列紧集必是完全有界的.

(2) 完备度量空间中完全有界集必是列紧的.

证明 (1) 设 A 是列紧集, 因而 A 中任何点列都有收敛的子点列, 这个收敛子点列自然是基本的. 由定理 2 的充分性可知 A 必是完全有界集

(2) 设 A 是完全有界集，根据定理 2 的必要性知道，A 中任何一个点列 $\{x_n\}$ 必有基本的子点列，但度量空间是完备的，因而这个基本子点列是收敛子点列，从而 A 是列紧集．证毕．

系　(1) 在完备度量空间中，集 A 的列紧性和完全有界性等价．

(2) 在有限维赋范线性空间中，集 A 的列紧性、完全有界性和有界性彼此等价．

(3) 如果度量空间 X 的每个完全有界集都是列紧集，那末 X 必是完备的．

证明　由定理 2 立即可得到系中的(1)．再由定理 1 和 § 5 定理 12 就得到系中的 (2)．现在证 (3)：设 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本点列，由完全有界集的性质(2)知道，由 $\{x_n\}$ 中点构成的集 A 是 X 的完全有界集．由(3)的假设，A 是 X 的列紧集，既然 A 是列紧集，$\{x_n\}$ 是 A 中的点列，因而 $\{x_n\}$ 有收敛的子点列，由 § 5 定理 7 的(2)，$\{x_n\}$ 是收敛的．所以，X 是完备的度量空间．证毕．

定理 4　完全有界集是可析的（即其中必含有有限的或可列的稠密子集）．

证明　设 A 是完全有界集，令 $\{x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$ 是 A 的有限 $\frac{1}{n}$-网，那末集

$$B=\{x_\nu^{(n)} \mid \nu=1, 2, \cdots, k_n, n=1, 2, \cdots\}$$

是有限集或可列集．只要证明 B 在 A 中稠密好了．事实上，对于 A 中任何一点 x，及任一正数 ε，取 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，由于

$$A\subset \bigcup_{\nu=1}^{k_n} O\left(x_\nu^{(n)}, \frac{1}{n}\right),$$

必有 ν，使得 $x\in O\left(x_\nu^{(n)}, \frac{1}{n}\right)$，即 $\rho(x, x_\nu^{(n)})<\frac{1}{n}<\varepsilon$．因此 $x_\nu^{(n)}\in B\cap O(x, \varepsilon)$．所以 B 在 A 中稠密．证毕．

由于列紧集是完全有界的，我们得到下述推论：

系　列紧集是可析的．

4. 某些具体空间中列紧集的特征

从定理 2 知道，在完备的度量空间中列紧性与完全有界性是一致的. 下面我们就在某些具体的完备空间中给出点集是完全有界的充要条件. 因为在有限维空间中完全有界性和有界性是一致的，而有界的条件较易掌握，所以我们总是设法把问题引导到有限维欧几里德空间. 下面只以 $C[a, b]$ 及 l^p 为例来说明处理这类问题的方法，空间 l^∞、C 中点集是列紧集的条件可以类似地给出. 当然，很多情况下是比较复杂的.

设 A 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的一族连续函数. 如果对任何一个正数 ε，必有 $\delta>0$，使得区间 $[a, b]$ 中任何两点 x, $x'\in[a, b]$，当 $|x-x'|<\delta$ 时，对 A 中每个函数 f 都成立着

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon,$$

那末称 A 是等度连续的函数族.

例如，设 L 和 α 是两个正数，A 是在 $[a, b]$ 上适合 Hölder 连续性条件：

$$|f(x)-f(x')|\leqslant L|x-x'|^\alpha,\ x,\ x'\in[a, b],$$

的函数 f 所成的函数族，那末 A 是等度连续的函数族.

前已指出，度量空间 $C[a, b]$ 中点集的有界性不足以推出列紧性，但是，只要再加上等度连续性条件就行了.

定理 5 (Arzela-Ascoli) $C[a, b]$ 中集 A 是列紧的充要条件是 A 是有界集并且等度连续函数族.

证明 充分性 设 A 是 $C[a, b]$ 中的有界点集，同时又是等度连续的. 因为 $C[a, b]$ 是完备空间，由定理 3，只须证明 A 是完全有界的就可以了. 对任意给定的正数 ε，由 A 的等度连续性，有正数 δ，使得当 $[a, b]$ 中的点 x、x' 适合 $|x-x'|<\delta$ 时，A 中每个 f 必适合

$$|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{6.4}$$

利用这个 δ，任意取定 $[a, b]$ 中的有限个分点

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

使得$|x_\nu-x_{\nu-1}|<\delta$. 因为A是有界集, 有常数$k>0$, 使得对一切$f\in A$, $\|f\|=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant k$, 因此, 点集

$$A_n=\{(f(x_1),\cdots,f(x_n))\,|\,f\in A\}$$

组成n维欧几里德空间E^n(或C^n)中的有界集(事实上, $\sum\limits_{\nu=1}^n|f(x_\nu)|^2\leqslant nk^2$). 由定理1和定理2, A_n是E^n中完全有界的, 所以有f_1, f_2, $\cdots$, $f_k\in A$, 使得k个点

$$(f_\nu(x_1),\ f_\nu(x_2),\ \cdots,\ f_\nu(x_n)),\ \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ k,$$

组成A_n中的$\frac{\varepsilon}{3}$-网. 现在来证明$\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$是$A$的$\varepsilon$-网就行了. 事实上, 任取$f\in A$, 由$(f(x_1),\cdots,f(x_n))\in A_n$, 所以有$\nu(1\leqslant\nu\leqslant k)$, 使

$$\sum_{\mu=1}^n|f_\nu(x_\mu)-f(x_\mu)|^2<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2,$$

因此, $|f(x_\mu)-f_\nu(x_\mu)|<\frac{\varepsilon}{3}$, $\mu=1, 2, \cdots, n$. 对于$[a, b]$中的点x, 设x落在子区间$[x_r, x_{r+1}]$上, 由不等式(6.4)得到

$$\begin{aligned}|f(x)-f_\nu(x)|\leqslant&|f(x)-f(x_r)|+|f(x_r)-f_\nu(x_r)|\\&+|f_\nu(x_r)-f_\nu(x)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

因此, $\rho(f, f_\nu)=\|f-f_\nu\|<\varepsilon$, 即$f\in O(f_\nu, \varepsilon)$.

必要性　设$A\subset C[a, b]$是一列紧集. 因为列紧集是有界的, 所以只须证明A是等度连续的. 对任意的$\varepsilon>0$, 必有A的有限$\frac{\varepsilon}{3}$-网f_1、f_2、$\cdots$、f_k. 因为每个$f_\nu(x)$在$[a, b]$上连续, 所以有正数$\delta_\nu(\nu=1, 2, \cdots, k)$, 使得$[a, b]$上的$x$、$x'$, 当$|x-x'|<\delta_\nu$时, $|f_\nu(x)-f_\nu(x')|<\frac{\varepsilon}{3}$. 取$\delta=\min\{\delta_1, \cdots, \delta_k\}$. 我们来证明: 对每个$f\in A$, 只要$[a, b]$中的两点$x$、$x'$适合$|x-x'|<\delta$时, 便有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

事实上, 对于$f\in A$, 有ν, $1\leqslant\nu\leqslant k$, 使得$\rho(f, f_\nu)<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$|f(x)-f(x')|\leqslant|f(x)-f_\nu(x)|+|f_\nu(x)-f_\nu(x')|$$
$$+|f_\nu(x')-f(x')|<\varepsilon,$$

即 A 是等度连续的. 证毕.

再来考察空间 l^p 作为数列空间的例.

定理6 空间 $l^p(\infty>p>0)$ 中的集 A 成为列紧集的充要条件是 A 为有界集, 而且对任何正数 ε, 有自然数 n_ε, 使得对一切 $x=\{x_\nu\}\in A$, 成立着

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon+1}^{\infty}|x_\nu|^p<\varepsilon. \tag{6.5}$$

证明 我们只证 $p\geqslant1$ 的情况, 对于 $1>p>0$ 的情况, 可类似证明.

充分性 设 A 是有界集而且适合条件(6.5). 因为 l^p 是完备的, 所以只要证明 A 是完全有界的. 对任一 $\eta>0$, 取

$$\varepsilon=\min\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{2}\right)^p,\ 1\right),$$

于是有自然数 $N=n_\varepsilon>0$, 使(6.5)成立. 作

$$A_N=\{(x_1,\ \cdots,\ x_N)\,|\,x=\{x_1,\ \cdots,\ x_N,\ \cdots\}\in A\},$$

由于 A 是有界集, 有 k 使得当 $x\in A$ 时, $\|x\|_p^p$[注] $=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^p\leqslant K^p$. 因此 $|x_\nu|\leqslant K$, $\sum\limits_{\nu=1}^{N}|x_\nu|^2\leqslant NK^2$, 即 A_N 是 N 维欧几里德空间 E^N 中的有界集, 因而是 E^N 中的列紧集. 于是有 $x^{(k)}\in A$, $k=1, 2, \cdots, l$, 使得

$$(x_1^{(k)},\ \cdots,\ x_N^{(k)}),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ l,$$

成为 A_N 的 $\frac{\varepsilon}{N}$-网. 现在来证明 $x^{(1)}$、$\cdots$、$x^{(l)}$便是 A 的 η-网. 事实上, 对任何一个 $x\in A$, 必有 $k\leqslant l$, 使 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)\in O\left((x_1^{(k)}, \cdots, x_N^{(k)}), \frac{\varepsilon}{N}\right)$, 即

$$\sum_{\nu=1}^{N}|x_\nu-x_\nu^{(k)}|^2<\left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^2,$$

[注] 这里为防止混淆, 用 $\|\cdot\|_p$ 表示 l^p 中范数.

因此 $|x_\nu - x_\nu^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{N}$, 而且

$$\|x-x^{(k)}\|_p < \left(N\frac{\varepsilon^p}{N^p} + 2^p\cdot 2\varepsilon\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \eta,$$

所以 $x^{(k)} \in O(x, \eta)$.

必要性　设 A 是完全有界集. 显然, 只要证明(6.5)成立好了. 这时, 对任何正数 ε, 必有有限的 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$-网 $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(N)}\}$. 因此, 必有自然数 n_ε 使得对每个 $\nu=1, 2, \cdots, N$ 成立着

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_k^{(\nu)}|^p < \frac{\varepsilon}{2^p},$$

其中 $x^{(\nu)} = \{x_k^{(\nu)}\}$. 由 Minkowski 不等式, 对每个 $x=\{x_k\} \in A$, 有

$$\left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_k^{(\nu)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_k^{(\nu)} - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}} + \|x - x^{(\nu)}\|_p,$$

但因为 $x^{(1)}$、$\cdots$、$x^{(N)}$ 是 A 的 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$-网, 所以有 ν 使上式右边小于 $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$. 证毕.

条件(6.5)对应于 $C[a, b]$ 中的等度连续性, 可以称做"等度收敛".

5. 紧集

在数学分析中, 我们知道和 Weierstrass 定理等价的是关于闭区间的 Heine-Borel 覆盖定理. 只要仔细考察一下 Heine-Borel 覆盖定理的证明, 就发现: 可以把闭区间的条件推广到直线上的列紧(即有界)闭集. 因此, 在极限论中列紧闭集有较好的性质. 这对于一般的度量空间也是如此.

显然, A 是列紧闭集的充要条件是 A 中任一点列必有收敛到 A 中一点的收敛子点列.

下面, 我们给出列紧闭集的一些基本性质. 首先, 度量空间 X 中的列紧闭集 A 看成 X 的子空间时是完备的.

事实上, 由列紧集的性质 (5), 列紧集 A 中任意的基本点列

$\{x_n\}$ 必收敛，设 $x_n\to x_0$。由于 A 是闭集，所以 $x_0\in A$，就是说，A 中每个基本点列必收敛到 A 中的点，所以 A 是完备的子空间。

下面我们把直线上的 Heine-Borel 有限覆盖定理拓广到一般的度量空间，进而给出列紧集的特征性质：

定理 7(Gross)　设 A 是度量空间 X 中的列紧闭集，$\mathscr{F}$ 是 X 中的一族开集，如果 $\mathscr{F}$ 覆盖 A，即 $\bigcup_{O\in\mathscr{F}} O\supset A$，那末必有 $\mathscr{F}$ 中有限个开集 O_1、O_2、…、O_n 覆盖 A，即

$$\bigcup_{k=1}^{n} O_k\supset A.$$

证明　对 A 中的每个点 x，必有 $\mathscr{F}$ 中的开集 O 含有 x，因此有 x 的一个 r-环境 $O(x, r)\subset O$。记 $r(x)$ 为使得 $O(x, r)$ 含在 $\mathscr{F}$ 中某个开集内的这种 r 的上确界，那末 $r(x)>0$。今证明

$$r_0=\inf_{x\in A} r(x)>0.$$

由下确界的定义，显然有 A 中的点列 $\{a_n\}$，使得 $r(a_n)\to r_0$。由于 A 是列紧闭集，$\{a_n\}$ 中必有子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 A 中的一点 a_0。因 $\mathscr{F}$ 覆盖 A，必有开集 $O\in\mathscr{F}$，使得 $a_0\in O$。因此有正数 r，使得 $O(a_0, r)\subset O$。由于 $a_{n_k}\to a_0$，当 k 充分大时，例如当 $k\geqslant k_0$ 时，$\rho(a_0, a_{n_k})<\frac{r}{2}$。因此，$\rho\left(a_{n_k}, \frac{r}{2}\right)\subset O(a_0, r)\subset O$。这样一来，当 $k\geqslant k_0$ 时有 $r(a_{n_k})>\frac{r}{2}$。所以 $r_0\geqslant\frac{r}{2}>0$。称正数 r_0 为列紧闭集 A 的勒贝格数。

因为 A 是列紧集，由定理 3 的 (1)，A 中必有有限个点 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 组成 A 的 $\frac{1}{2}r_0$-网，这里 r_0 是 A 的勒贝格数。由于 $r_0=\inf_{x\in A} r(x)$，所以 $r(x_\nu)\geqslant r_0(\nu=1, 2, \cdots, n)$，从而 $r(x_\nu)>\frac{1}{2}r_0$。由 $r(x_\nu)$ 的定义，必有 $\mathscr{F}$ 中的一个开集 $O_\nu\supset O\left(x_\nu, \frac{1}{2}r_0\right)$，因此

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} O_\nu\supset\bigcup_{\nu=1}^{n} O\left(x_\nu, \frac{1}{2}r_0\right)\supset A.$$

定理证毕。

定理 7 也称为有限覆盖定理．它的逆命题也正确．

定理 8　设 A 是度量空间 X 中的点集，如果 X 中每个覆盖 A 的开集族中必有有限个开集覆盖 A，那末 A 是列紧闭集．

证明　先证明 A 是闭集．设 $x_0 \bar{\in} A$，证明 x_0 不是 A 的极限点好了．对于 A 中每一点 x，作球 $O\left(x, \frac{1}{2}\rho(x_0, x)\right)$，这种开球的全体记做 $\mathscr{F}$．显然 $\mathscr{F}$ 覆盖 A．由假设，存在有限个开球 $O_\nu = O\left(x_\nu, \frac{1}{2}\rho(x_0, x_\nu)\right)(\nu=1, 2, \cdots, n)$ 覆盖 A．记

$$\delta = \min_{1\leq\nu\leq n} \frac{1}{2}\rho(x_\nu, x_0),$$

显然，$\delta>0$，并且 $O(x_0, \delta)$ 与 O_ν 不相交，因此 $O(x_0, \delta)\cap A=\emptyset$，自然 x_0 不是 A 的极限点．这样，A 的极限点都在 A 中，即 A 是闭集．

再证 A 是列紧集　如果 A 不是列紧集，必有 A 中的一列互不相同的点 $\{x_\nu\}$，它不含有收敛子点列．记 $\{x_\nu\}$ 中点所成的集为 C，那末对每一个点 x_ν，$C-x_\nu$[注] 都不可能有极限点．因为如果 $C-x_\nu$ 有极限点，其中必有互不相同的列点 $\{y_m\}$ 收敛，于是 $\{x_\nu\}$ 中含有收敛子列了，这就和对于 $\{x_\nu\}$ 的假设冲突．这样，$C-x_\nu$ 是闭集，它的余集 $G_\nu = x_\nu \cup (X-C)$ 就是开集．显然

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} G_\nu = \bigcup_{\nu=1}^{\infty}(x_\nu \cup (X-C)) \supset A,$$

由 A 的假设，应有自然数 n，使得 $G_1\cup\cdots\cup G_n \supset A$．但是

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} G_\nu = \{x_1, \cdots, x_n\} \cup (X-C),$$

所以 $x_{n+1} \bar{\in} \bigcup_{\nu=1}^{n} G_\nu$．这样一来，有限个 $G_1, \cdots, G_n$ 又不能覆盖 A，这是矛盾．所以 A 是列紧集．证毕．

定义　设 A 是度量空间 X 中的点集，如果对任何覆盖 A 的开集族，必能从族中选出有限个开集覆盖 A，那末称 A 是 X 的紧集．如果 X 本身是紧集，那末称 A 是紧度量空间．

[注]　$C-x_\nu$ 表示集 C 中减去单点 x_ν.

显然，有下列定理：

定理9 设 X 是度量空间，A 是 X 的点集，那末

(1) A 是紧集的充要条件是它为列紧闭集；

(2) X 是紧空间的充要条件是它是列紧空间（致密空间）。

注意，当 X 是一般的拓扑空间时，紧与列紧这两个概念不等价。

6 紧集上的连续映射

我们现在把闭区间上连续函数的基本性质拓广到度量空间的紧集上来.

定理10 设 X、Y 是两个度量空间，D 是 X 的紧集，f 是 $D\to Y$ 的连续映射. 那末 D 的象 $E=f(D)$ 也是紧集.

证明 设 $\{y_n\}$ 是 E 中的一列点，相应地有 D 中的点列 $\{x_n\}$，使得 $y_n=f(x_n)$，$n=1, 2, \cdots$. 因为 D 是紧集，所以 $\{x_n\}$ 含有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，并且 $x_{n_k}\to x_0\in D$. 由于 f 在 x_0 处连续，所以 $f(x_0)=\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$. 因此，$E$ 是列紧集. 又显然，$f(x_0)=y_0\in E$，所以 E 是闭集. 证毕.

从这里的证明过程可以看到成立着下面的

系1 定义在整个度量空间上的连续映射必然把列紧集映射成列紧集.

系2 度量空间中紧集 D 上的实连续函数 f 必然有界，而且上、下确界可达.

证明 由于 $f(D)$ 是实数直线上的紧集，所以 $f(D)$ 是有界的，即有常数 K，使得 $|f(x)|\leqslant K$，$x\in D$. 又因为 $f(D)$ 是闭集，$f(D)$ 的上确界 y_1 及下确界 y_0 也在 $f(D)$ 中，于是在 D 中有 x_0、x_1，使得 $f(x_0)=y_0$，$f(x_1)=y_1$. 证毕.

系3 设 A 是紧集，F 是闭集，并且 $A\cap F=\emptyset$，那末 $\rho(A,F)\neq 0$.

证明 显然，A 上函数 $\rho(x, F)\ (x\in A)$ 是连续的，由系2，存在 $x_0\in A$，使得 $0<\rho(x_0, F)=\inf\limits_{x\in A}\rho(x, F)$. 证毕.

系4 紧集上的连续双射必是拓扑映射.

证明 设 f 是紧集 D 到 E 上的连续双射，显然，只要证明逆映射 f^{-1} 是连续的. 事实上，证明 f^{-1} 的逆映射 f 把 D 的任何闭子集 A 映射成闭集就好了. 因为 D 是紧集，所以闭子集 A 也是紧集，因此，$f(A)$ 也是紧集，自然 $f(A)$ 是闭集. 所以，f 是拓扑映射. 证毕.

我们可以仿照闭区间上的函数那样定义度量空间中函数的均匀连续性. 可以证明：度量空间的紧集上的连续映射具有均匀连续性. 也可以象在闭区间上一样地定义等度连续函数族，并且把 Arzela-Ascoli 定理拓广到度量空间中的紧集上去. 这些证明几乎和在闭区间上的情况一模一样，我们这里予以从略，读者可以把它们一一写出，作为练习.

7 无限维赋范线性空间上单位球的非紧性

在赋范线性空间中，闭单位球是有界集，根据定理 1 和 §5 定理 12，立即可知任何有限维赋范线性空间中闭单位球必是紧集，然而无限维赋范线性空间的闭单位球 S_1 必不是列紧集，从而 S_1 决不是紧集. 这是有限维空间和无限维空间的根本差别，正因为这个差别，无限维空间中分析课题远比有限维空间复杂. 为了证明这一点，先证 F. Riesz 的引理.

引理 1(F. Riesz) 设 E 是赋范线性空间 X 的闭线性子空间，并且 $E\neq X$. 那末对于任一 ε，$0<\varepsilon<1$，必存在 X 中的单位向量 x_0，$\|x_0\|=1$，使得

$$\rho(x_0,\ E)>\varepsilon.$$

证明 由于 E 是 X 的真子集，$X-E\neq\phi$，任取一点 $x\in X-E$. 又由于 E 是闭的，所以 $\rho(x,\ E)=d>0$（如果 $\rho(x,\ E)=0$，那末 $x\in\bar{E}=E$）. 因为 $\dfrac{d}{\varepsilon}>d$，必有 E 中的一点 x' 满足

$$\|x-x'\|<\frac{d}{\varepsilon}.$$

作 $x_0=\dfrac{x-x'}{\|x-x'\|}$，那末 $\|x_0\|=1$. 对任何 $y\in E$，因为 $x'+\|x-x'\|y\in E$，应该有

$$\|x-(x'+\|x-x'\|y)\|\geqslant d,$$

因此

$$\|x_0-y\|=\left\|\frac{x-x'}{\|x-x'\|}-y\right\|$$

$$=\frac{1}{\|x-x'\|}\|x-(x'+\|x-x'\|y)\|\geqslant\frac{d}{\|x-x'\|},$$

于是 $\rho(x_0, E)\geqslant\dfrac{d}{\|x-x'\|}>\varepsilon$. 引理证毕.

定理11 如果赋范线性空间 X 是无限维的, 那末 X 中必有不列紧的有界集.

证明 今证 X 的单位球 $\{x|\|x\|\leqslant1\}$ 就不是列紧集. 在 X 中任取一个单位向量 x_1, $\|x_1\|=1$. 令 X_1 表示由 x_1 张成的一维子空间: $X_1=\{x|x=\alpha x_1, \alpha$ 是数$\}$, 于是 $X_1\neq X$. 由§5 定理12 知道 X_1 是 X 的闭子空间. 由上述 Riesz 引理, 存在 $x_2\in X$, $\|x_2\|=1$, 使得 $\rho(x_2, X_1)>\dfrac{1}{2}$. 我们用 X_2 表示由 x_1、x_2 张成的二维子空间, X_2 是 X 的闭子空间, 并且 $X_2\neq X$. 于是又可以对 X_2 应用 Riesz 引理. 这样继续做下去, 从 X 中选取了一列单位向量 $\{x_k, k=1, 2, \cdots\}$, 以及一列闭子空间 $\{X_k\}$, $X_k=\mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_k\}$, 而且

$$\rho(x_{k+1}, x_k)>\frac{1}{2}, k=1, 2, \cdots.$$

因而当 $\mu>\nu$ 时, 由于 $x_\nu\in X_{\mu-1}$,

$$\|x_\mu-x_\nu\|\geqslant\rho(x_\mu, X_{\mu-1})>\frac{1}{2}.$$

这种点列 $\{x_k\}$ 不可能含有收敛的子序列. 所以 X 中单位球不是列紧集. 证毕.

习 题

1. 设 $f(z)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上解析函数, 问: 使得集 $\{z|f(z)=1\}$ 是 $\mathbb{C}$ 上列紧无限集的 f 是否存在? 又问: 使得集 $\{z|f(z)=1\}\cup\{z|f(z)=2\}\cup\{z|f(z)=3\}$ 是 $\mathbb{C}$ 上列紧无限集的 f 是否存在?

2. 设 K 是复平面 $\mathbb{C}$ 的子集, 证明 K 是 $\mathbb{C}$ 的列紧集的充要条件是 K 在实

轴和虚轴上投影所得的集都是 E^1 上的列紧集. 当 K 是 $\mathbb{C}$ 的紧子集时, 证明投影所得的集必都是 E^1 的紧集, 举例说明逆命题不成立, 并将上述结果推广到乘积度量空间的情况.

3. 设 A、B 是赋准范线性空间 X 的两个完全有界集, 那末对任何 $x_0 \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, 集 $\alpha A = \{\alpha x | x \in A\}$、$x_0 + A = \{x_0 + x | x \in A\}$、$A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$ 都是完全有界集.

4. 证明 C_0 空间中集 A 是列紧的充要条件是

(i) A 是有界集;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 对 A 是一致的, 其中 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \in A$.

5. 证明 C 空间中集 A 是列紧的充要条件是 (i) A 是有界集; (ii) 对任何 $\varepsilon > 0$, 必存在仅依赖于 ε 的 N, 使得 $n, m \geqslant N$ 时, $|a_n - a_m| < \varepsilon$ 对一切 $a = (a_1, \cdots, a_n, \cdots) \in A$ 成立.

6. 证明度量空间 X 是紧空间的充要条件是 X 中任何一族闭集 $\{F_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 都具有下列性质: 如果 $\{F_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 中任何有限个集的交不空, 则 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ 必不是空集.

7. 证明两个紧度量空间的乘积度量空间必是紧空间.

8. 设 X、Y 是两个度量空间, $D \subset X$, f 是 $D \to Y$ 的映射, 如果对任何 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 当 $x, x' \in D$, $\rho(x, x') < \delta$ 时, 就有 $\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$, 称 f 是在 D 上一致连续的映射. 证明: 当 D 是紧集时, 任何 $D \to Y$ 的连续映射必是一致连续的.

9. 设 X、Y 是两个度量空间, $D \subset X$. 令 Z 是一切 $D \to Y$ 的连续映射全体. 对 Z 中任何两个 $f(\cdot)$、$g(\cdot)$, 规定

$$\rho(f(\cdot), g(\cdot)) = \sup_{x \in D} \rho(f(x), g(x)).$$

证明 ρ 是 Z 上距离.

设 A 是 Z 的一个点集(即 $D \to Y$ 的一族连续映射). 如果对任何 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 当 $x, x' \in D$, $\rho(x, x') < \delta$ 时, 对一切 A 中的 $f(\cdot)$ 都有 $\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$, 称 A 是等度连续的连续映射族. 证明: 当 D 是 X 的紧集, Y 是紧空间时, A 是 Z 上列紧集的充要条件是 A 是等度连续的.

10. 设 $K(x, y)$ 是 $[a, b] \times [a, b]$ 上二元连续函数, A 是 $L([a, b], m)$ 上有界集, 证明: 集

$$\{\varphi | \varphi(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \ f \in A\}$$

是 $C[a, b]$ 上列紧集.

11. 设 $\{f_n\}$ 是一列度量空间 X 到度量空间 Y 的映射, 并且是一致基本

的，即对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，当 $n, m\geqslant N$ 时，$\rho(f_n(x), f_m(x))<\varepsilon$ 对一切 $x\in X$ 成立. 证明：(1)如果对每个 n，$f_n(X)$是完全有界集，那末 $\bigcup\limits_{n=1}^{n} f_n(X)$ 必是完全有界集；(2)如果 Y 是完备的，并且对每个 n，$f_n(X)$是列紧集，那末 $A=\{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mid x\in X\}$ 是列紧集.

12. 在习题 11 中，如果仅假设对每个 $x\in X$，$\{f_n(x)\}$ 是基本点列，那末习题 12 中的(1)，(2)未必成立. 试举例说明这一点.

如果假设同习题 11，但 Y 不是完备的，那末习题 11 中的(2)未必成立，试举例说明这一点.

13. 设 L 是 Fréchet 空间 X 的闭线性子空间，L_0 是 X 的有限维子空间. 证明 $\mathrm{span}\{L, L_0\}$ 是 X 的闭线性子空间.

§7 不动点定理

1. 压缩映射原理

把一些方程的求解问题化为求映射的不动点，以及用逐次逼近法来求不动点，这是代数方程、微分方程、积分方程、泛函方程以及计算数学中的一个很重要的方法. 这个方法起源很早，一直可以追溯到牛顿求代数方程的根时所用的切线法. 后来，Picard 用逐次逼近法求解常微分方程. 嗣后，这个方法在不同的领域中都有应用. 1922 年，Banach 把这个方法的基本点提炼出来，用度量空间及其中的压缩映射的一些概念，更一般地描述了这个方法，这就是本节中要着重介绍的内容. 这种利用泛函分析来研究方程的解的近似方法以及关于算子不动点存在性的研究，自 Banach 以后又取得了不少重要的进展，甚至成为非线性泛函分析的一个重要内容. 有关不动点的较一般的定理将在下一节中给出.

定义 设 X 是一个非空集，A 是 X 上的映射，称适合方程

$$Ax=x \tag{7.1}$$

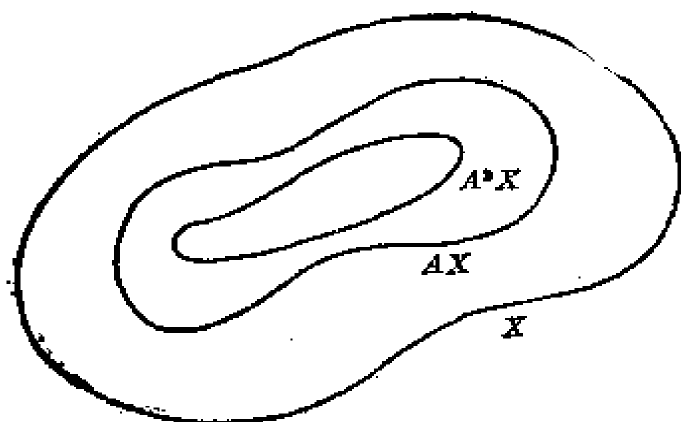
的解 x 为映射 A 的不动点.

如何来求出映射的不动点？先看如下的一个简单事实. 设 X

是 E^n 空间中一个非空集，显然

$$X \supset AX \supset A^2X \supset \cdots \supset A^nX \supset \cdots, \tag{7.2}$$

其中 $A^nX = A(A^{n-1}X)$，$n=1, 2, \cdots$.



从图上可见，如果集 A^nX 的直径 $d(A^nX) = \sup\limits_{x,y\in A^nX} \rho(x, y) \to 0 (n \to \infty)$，那末集列 $\{A^nX\}$ 将"收缩"于一点 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A^nX$，易知 x 必是 A 的不动点. 如何保证集列 $\{A^nX\}$ 的直径序列 $\{d(A^nX)\}$ 收敛于零呢？显然，最简单的就是假设 A 是压缩型的映射就可以了. 这一思想的更一般化便是度量空间中压缩映射的不动点定理.

定义　设 X 是度量空间，A 是 X 到它自身的一个映射. 如果存在数 α，$0 \leqslant \alpha < 1$，使得对一切 $x, y \in X$ 成立着

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha \rho(x, y), \tag{7.3}$$

那末就称 A 是 X 上的一个**压缩映射**（对于线性度量空间，往往又称之为**压缩算子**）.

一个点集经过压缩映射后，它的象中两点间的距离缩短了，至多等于原象距离的 $\alpha(\alpha<1)$ 倍.

显然，压缩映射是连续的. 即对任何收敛点列 $x_n \to x_0$，必有 $Ax_n \to Ax_0$. 事实上

$$\rho(Ax_n, Ax_0) \leqslant \alpha \rho(x_n, x_0),$$

当 $n \to \infty$ 时，由 $\rho(x_n, x_0) \to 0$ 就得到 $\rho(Ax_n, Ax_0) \to 0$.

定理 1　(Banach, 1922) **压缩映射原理**　在完备的度量空间中的压缩映射，必然有唯一的不动点：

证明 设度量空间 X 是完备的，A 是 X 到它自身中的压缩映射. 先证明 A 存在不动点.

在 X 中任取一点 x_0，从 x_0 开始，作一迭代程序：令

$$x_1=Ax_0,\ x_2=Ax_1=A^2x_0,\ \cdots,\ x_n=Ax_{n-1}=\cdots=A^nx_0,$$
$$n=1,\ 2,\ \cdots,$$

这样得到 X 中的一列点 $\{x_n\}$. 如果我们能证明 $\{x_n\}$ 是基本点列，那末它在完备空间 X 中存在唯一的极限 $x^*: x_n\to x^*$. 因为由压缩映射的连续性，又有 $Ax_n\to Ax^*$，但是 $Ax_n=x_{n+1}\to x^*$，又因为收敛点列 Ax_n 的极限是唯一的，必然有 $Ax^*=x^*$，这就是说，x^* 是 A 的不动点.

现在证明 $\{x_n\}$ 是基本点列. 由于 A 是压缩映射，我们有

$$\rho(x_{n+1},\ x_n)=\rho(Ax_n,\ Ax_{n-1})\leqslant\alpha\rho(x_n,\ x_{n-1}),\ (n\geqslant1). \tag{7.4}$$

反复应用此式，不难由归纳法得到

$$\rho(x_{n+1},\ x_n)\leqslant\alpha^n\rho(x_1,\ x_0),\ (n\geqslant1). \tag{7.5}$$

于是，对于任意正整数 p，由三角不等式及(6.5)得到

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+p},\ x_n)&\leqslant\rho(x_{n+p},\ x_{n+p-1})+\rho(x_{n+p-1},\ x_{n+p-2})+\cdots\\&\quad+\rho(x_{n+1},\ x_n)\\&\leqslant(\alpha^{n+p-1}+\alpha^{n+p-2}+\cdots+\alpha^n)\rho(x_1,\ x_0)\\&=\frac{\alpha^n-\alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,\ x_0),\end{aligned} \tag{7.6}$$

由于 $0\leqslant\alpha<1$，所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本点列.

我们再证明不动点的唯一性. 设 x' 也是 A 的不动点，$x'=Ax'$. 于是必有

$$\rho(x^*,\ x')=\rho(Ax^*,\ Ax')\leqslant\alpha\rho(x^*,\ x'),$$

但是 $0\leqslant\alpha<1$，要上式成立，必须 $\rho(x^*,\ x')=0$，所以 $x'=x^*$. 证毕.

我们应注意到，空间 X 的完备性条件，只是为了保证映射 A 的不动点存在；至于不动点的唯一性是直接从映射的压缩性来的，并不要假设空间是完备的.

不动点定理，非但证明了不动点的存在性和唯一性，同时，① 提供了求不动点的方法——迭代法，就是说，在完备的度量空间中，从任意选取的一点"初值"x_0 出发，逐次作点列 $x_n=A^nx_0$，$n=1, 2, \cdots$，它必然收敛到方程 $Ax=x$ 的解. 这种方法也称为逐次逼近法. 此外，② 它还给出第 n 次迭代与精确解的近似估计. 事实上，只要在(7.6)式令 $p\to\infty$，就得到

$$\rho(x^*,\ x_n)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\ \rho(x_1,\ x_0),\tag{7.7}$$

这个估计在近似计算中很有用. (7.7)同时还告诉我们，方程 $Ax=x$ 的解所可能座落的范围. 例如，当 $n=0$，由(7.7)得到

$$\rho(x^*,\ x_0)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\ \rho(x_1,\ x_0).\tag{7.8}$$

此外还应注意，上述定理 1 中，空间 X 的完备性条件不能除去. 例如考察 E^1 的子空间$(0,\ \infty)$到它自身的映射

$$Ax=\alpha x.$$

此处 α 是小于 1 的一个正数，它显然是压缩映射，但是它在$(0, \infty)$中没有不动点.

又条件 $0\leqslant\alpha<1$ 不能减轻为 $0\leqslant\alpha\leqslant1$. 事实上，即使 X 为完备的度量空间，而且对于所有的 $x,\ y\in X$，当 $x\neq y$ 时成立着

$$\rho(Ax,\ Ay)<\rho(x,\ y),\tag{7.9}$$

映射 A 也可能没有不动点. 例如在 E^1 的闭子空间$[0,\ \infty)$中

$$Ax=x+\frac{1}{1+x},$$

容易验证映射 A 适合条件(7.9)，但 A 在$[0,\ \infty)$中没有不动点.

虽然如此，定理 1 还是允许作一些适当的拓广.

定理 2 设度量空间 X 是完备的，$y=Bx$ 是 X 到 X 的映射，如果存在一个自然数 n，使得 B^n 是 X 上的一个压缩映射，那末映射 B 在 X 中必有唯一的不动点.

在 $n=1$ 时，定理 2 就是定理 1.

证明 令 $A=B^n$，则 A 是 X 上的压缩映射，由定理 1，A 有不动点 x^*：$x^*=Ax^*$. 我们证明 x^* 是 B 的不动点. 事实上，映射

$$AB=B^{n+1}=BA,$$

所以 $A(Bx^*)=B(Ax^*)=Bx^*$，因此，Bx^* 也是 A 的不动点，由于压缩映射 A 只有一个不动点，所以必然成立着 $Bx^*=x^*$，即 x^* 也是 B 的不动点.

若 x' 是 B 的任一不动点，由于 $Bx'=x'$，则

$$B^n x'=B^{n-1}x'=\cdots=x',$$

因此，x' 也是 $A=B^n$ 的不动点．又由于 A 的不动点只有一个 x^*，所以 $x'=x^*$，就是说 B 的不动点也只有一个．证毕.

2．应用

现在将给出压缩映射原理在一些分析课题中的应用.

注意，应用于具体场合时，要点是根据所讨论的问题①先适当构造一个度量空间，然后②验证该空间是完备的，最后③要验证映射是否是该空间到自身的映射，并且是压缩的．上述三步完成后，就可直接应用定理 1 或 2，得到所要的不动点.

(I) 应用压缩映射原理，可以证明下面的常微分方程的解的存在定理.

定理 3 设 $f(x, y)$ 是矩形 D_0: $|x-x_0|\leqslant h_0$, $|y-y_0|\leqslant\lambda$ 上二元连续函数，而且对 y 满足 Lipschitz 条件：存在常数 $L>0$，使得当 $(x, y_i)\in D_0(i=1, 2)$ 时，

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

那末一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{7.10}$$

必有适合初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的唯一解.

证明 显然，$y(x)$ 是适合初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的上述微分方程的解的充要条件是 $y(x)$ 是下述积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t, y(t))\,dt$$

的解.

令 $M=\sup\limits_{(x,y)\in D_0}|f(x, y)|$，$D$ 表示矩形：$|x-x_0|\leqslant h$; $|y-y_0|\leqslant$

λ. C_D是$C[x_0-h,\ x_0+h]$中使得图象$(x,\ y(x))\in D$，且满足$y(x_0)=y_0$的连续函数全体. 显然，C_D是Banach空间$C[x_0-h,\ x_0+h]$的闭子空间（因而C_D是完备子空间）. 作$C_D\to C[x_0-h,\ x_0+h]$的映射

$$A:\ \varphi\mapsto y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ \varphi(t))dt,\ \ \varphi\in C_D. \tag{7.11}$$

我们来证明，当$h<\min\left(\frac{\lambda}{M},\ \frac{1}{L}\right)$时，由(7.11)所确定的映射$A$具有下述性质：

(i) 当$\varphi\in C_D$时，$\psi=A\varphi\in C_D$;

(ii) 当$\varphi_1,\ \varphi_2\in C_D$时，$\rho(A\varphi_1,\ A\varphi_2)\leqslant\alpha\rho(\varphi_1,\ \varphi_2)$，而$\alpha=Lh<1$.

事实上，$\psi(x_0)=y_0$是显然的. 当$|x-x_0|\leqslant h$时，$\psi(x)$为连续函数，而且

$$|\psi(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,\ \varphi(t))\,dt\right|\leqslant hM<\lambda,$$

所以$\psi(x)\in C_D$，即(i)成立.

当$\varphi_1,\ \varphi_2\in C_D$时

$$\begin{aligned}\rho(A\varphi_1,\ A\varphi_2)&=\max_{|x-x_0|\leqslant h}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,\ \varphi_1(t))-f(t,\ \varphi_2(t))]dt\right|\\&\leqslant L\cdot\max_{|x-x_0|\leqslant h}\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|dt\\&\leqslant Lh\rho(\varphi_1,\ \varphi_2).\end{aligned}$$

令$\alpha=Lh$，那末$\alpha<1$，即(ii)成立.

由定理1，立即可知从任何函数$\varphi_0\in C_D$出发，经下列迭代程序：

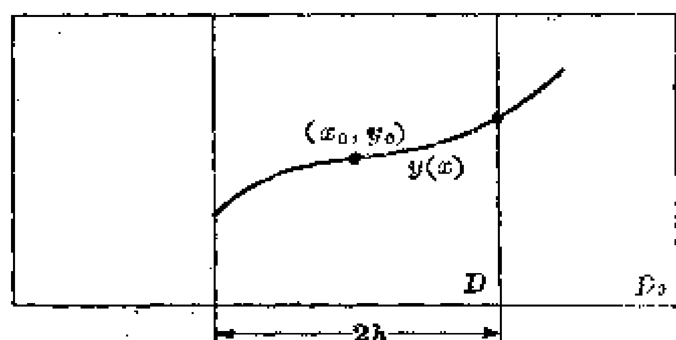
$$\varphi_1=A\varphi_0,\ \varphi_2=A\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{n+1}=A\varphi_n,\ \cdots \tag{7.12}$$

必然是度量空间C_D上收敛序列，并且其极限y是A的唯一的不动点，即下式成立：

$$y(x)=Ay(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ y(t))dt.$$

也就是说，$[x_0-h,\ x_0+h]$上函数$y(x)$是方程(7.10)适合条件

$y|_{x=x_0}=y_0$ 的解，但这只是局部解，因为 $y(x)$ 还不是定义在 $[x_0-h_0, x_0+h_0]$ 上的函数。为了给出(7.10)的 $[x_0-h_0, x_0+h_0]$ 上的解，我们用 $(x_0+h, y(x_0+h))$ 代替 (x_0, y_0) 进行上述讨论，于是可把 $[x_0-h, x_0+h]$ 上的解 $y(x)$ 唯一地延拓到 $[x_0-h, x_0+2h]$ 上，成为(7.10)的解，如此手续只要做有限次，就可获得 $[x_0-h_0, x_0+h_0]$ 上方程(7.10)的唯一的解 $y(x)$. 证毕.



显然，根据定理1后面的说明，易知迭代过程中第 n 次迭代 $\varphi_n(x)$ 与精确解 $y(x)$ 的误差估计是（注意 $\rho(\varphi_0, \varphi_1)=\max\limits_{x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h}|\varphi_0(x)-\varphi_1(x)|<\lambda$）

$$\max_{x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h}|\varphi_n(x)-y(x)|\leqslant\lambda\frac{(Lh)^n}{1-Lh}. \tag{7.13}$$

(II) 应用压缩映射原理可以证明下面的积分方程解的存在定理.

定理4 设 $f(s)$ 为 $a\leqslant s\leqslant b$ 上的连续函数，$K(s, t)$ 为正方形 $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，且有常数 M 使得

$$\int_a^b|K(s, t)|dt\leqslant M<\infty, \quad (a\leqslant s\leqslant b),$$

那末，当 $|\lambda|<\frac{1}{M}$ 时，必有唯一的 $\varphi\in C[a, b]$ 适合方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt. \tag{7.14}$$

证明 在连续函数空间 $C[a, b]$ 上定义映射

$$K: \varphi(s)\mapsto f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt.$$

记 $\alpha=M|\lambda|$，那末 $\alpha<1$，对于任意的 $\varphi,\ \psi\in C[a,\ b]$，有

$$\|K\varphi-K\psi\|=|\lambda|\left\|\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)dt-\int_a^b K(s,\ t)\psi(t)dt\right\|$$

$$\leqslant|\lambda|\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,\ t)||\varphi(t)-\psi(t)|dt$$

$$\leqslant|\lambda|M\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi(t)-\psi(t)|=\alpha\|\varphi-\psi\|.$$

应用压缩映射原理，便知道积分方程(7.14)有唯一的连续解 $\varphi(t)$. 证毕.

下面我们写出利用定理1中的逐次逼近法求解积分方程(7.14)的过程.

取 $x_0=\varphi_0(s)\equiv0$，作 $\varphi_n=K^n\varphi_0(s)$，容易算出

$$\varphi_1(s)=f(s),$$

$$\varphi_2(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)f(t)dt,$$

$$\varphi_3(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)f(t)dt$$

$$+\lambda^2\int_a^b K(s,\ t)\left[\int_a^b K(t,\ t_1)f(t_1)dt_1\right]dt.$$

置 $K_2(s,t_1)=\int_a^b K(s,\ t)K(t,\ t_1)dt$，则

$$\varphi_3(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^b K_2(s,\ t)f(t)dt.$$

一般地有

$$\varphi_{n+1}(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K_1(s,\ t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^b K_2(s,\ t)f(t)dt$$

$$+\cdots+\lambda^n\int_a^b K_n(s,\ t)f(t)dt,$$

这里的 $K_n(s,\ t)$ 由下面的递推关系确定：

$$K_1(s,\ t)=K(s,\ t),\quad K_n(s,\ t)=\int_a^b K(s,\ u)K_{n-1}(u,\ t)du.$$

这一列函数 $\{\varphi_n(s)\}$ 都是 $[a,\ b]$ 上的连续函数，并且在 $[a,\ b]$ 上一致收敛于解 $\varphi(s)$. 又对于给定的正数 ε，只要取 n 使得

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|\varphi_1-\varphi_0\|=\frac{[|\lambda|M]^n}{1-|\lambda|M}\max_{a\leqslant s\leqslant b}|f(s)|<\varepsilon,$$

就可以由(7.7)得到

$$\|\varphi_n-\varphi\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}|\varphi_n(s)-\varphi(s)|<\varepsilon,$$

即积分方程第 n 次逼近解 φ_n 的误差小于 ε.

作为定理 2 的一个应用,我们考察积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy, \tag{7.15}$$

这里 λ 是一常数. 这种类型的方程称为伏尔特拉(Volterra)型积分方程. 某些数学物理问题和某些变分问题均可以归结为解这种积分方程的问题. 近来在二阶椭圆型偏微分方程的研究中,伏尔特拉积分方程也有应用.

我们来证明下面的定理.

定理 5 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, $K(x, y)$ 是三角形 $\{(x, y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant x\}$ 上的连续函数,而且设 $|K(x, y)|\leqslant M$,那末对任何常数 λ,方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy \tag{7.15}$$

在 $[a, b]$ 上有唯一的连续函数解 $\varphi(x)$.

证明 考察 $C[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的映射

$$B: \varphi(x)\mapsto f(x)+\lambda\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy,$$

对于 $C[a, b]$ 中任意两个函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$,当 $x\in[a, b]$ 时

$$|B\varphi_1(x)-B\varphi_2(x)|=\left|\lambda\int_a^x K(x, y)(\varphi_1(y)-\varphi_2(y))dy\right|$$

$$\leqslant|\lambda|M(x-a)\|\varphi_1-\varphi_2\|. \tag{7.16}$$

今用归纳法证明:当 $x\in[a, b]$ 时,

$$|B^n\varphi_1(x)-B^n\varphi_2(x)|\leqslant|\lambda|^nM^n\frac{(x-a)^n}{n!}\|\varphi_1-\varphi_2\|. \tag{7.17}$$

当 $n=1$ 时已经证好,设(7.17)对于 n 成立,现在来推出(7.17)对于 $n+1$ 也成立. 事实上,

$$
\begin{aligned}
&|B^{n+1}\varphi_1(x)-B^{n+1}\varphi_2(x)|\\
&=\left|\lambda\int_a^x K(x,y)(B^n\varphi_1(y)-B^n\varphi_2(y))dy\right|\\
&\leqslant\frac{|\lambda|^n M^{n+1}}{n!}\left|\lambda\int_a^x(y-a)^n dy\right|\|\varphi_1-\varphi_2\|\\
&=\frac{|\lambda|^{n+1}M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|\varphi_1-\varphi_2\|,
\end{aligned}
$$

于是(7.17)得以证明.

取自然数 n,使得

$$\alpha=|\lambda|^n M^n(b-a)^n/n!<1,$$

那末

$$\|B^n\varphi_1-B^n\varphi_2\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|B^n\varphi_1(x)-B^n\varphi_2(x)|\leqslant\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|,$$

利用定理 2 就知道，方程(7.15)在 $C[a,b]$ 中有唯一的解. 证毕.

(III) 应用压缩映射原理,可以证明隐函数存在定理.

定理 6　设函数 $f(x,y)$ 在条形区域

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad -\infty<y<\infty$$

上处处连续,关于 y 处处有偏导数 $f'_y(x,y)$,而且有常数 m、M,$m<M$,使得在上述条形区域中

$$0<m\leqslant f'_y(x,y)\leqslant M,$$

那末方程 $f(x,y)=0$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必有唯一的连续解 $y=\varphi(x)$.

证明　在完备空间 $C[a,b]$ 中作映射

$$A\varphi=\varphi-\frac{1}{M}f(x,\varphi),$$

这是 $C[a,b]$ 到自身的压缩映射. 事实上,对于 $\varphi_1,\varphi_2\in C[a,b]$,由微分中值定理,有 $0<\theta<1$,使得

$$
\begin{aligned}
&|(A\varphi_2)(x)-(A\varphi_1)(x)|\\
&=\left|\varphi_2(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi_2)-\varphi_1(x)+\frac{1}{M}f(x,\varphi_1)\right|\\
&=\left|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)-\frac{1}{M}f'_y(x,\varphi_1(x)+\theta(\varphi_2(x)-\varphi_1(x)))\right.
\end{aligned}
$$

$$\cdot(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\Big|$$

$$\leqslant|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\left(1-\frac{m}{M}\right),$$

由于 $0<\frac{m}{M}<1$，所以 $0<1-\frac{m}{M}<1$，令 $\alpha=1-\frac{m}{M}$，使有

$$|(A\varphi_2)(x)-(A\varphi_1)(x)|\leqslant\alpha|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|,$$

所以

$$\|A\varphi_2-A\varphi_1\|\leqslant\alpha\|\varphi_2-\varphi_1\|,$$

这就说明 A 是 $C[a, b]$ 中的压缩映射．由定理 1，有唯一的 $\varphi\in C[a, b]$，使得

$$A\varphi=\varphi,$$

因此

$$f(x, \varphi(x))\equiv0, \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

证毕．

(IV) 利用压缩映射原理讨论解的连续性．

定义 设 X 是度量空间，对每个 $y\in X$，有一个 X 上的映射 f_y，如果对任何 $y_n\to y_0$，都有

$$f_{y_n}(x)\to f_{y_0}(x), \quad x\in X, \tag{7.18}$$

那末称 f_y 在 y_0 点连续．进一步，又假设对每个 $y\in X$，方程

$$f_y(x)=x \tag{7.19}$$

有唯一解 x_y^*，如果当 $y_n\to y_0$ 时，有 $x_{y_n}^*\to x_{y_0}^*$，那末称方程(7.19)的解在 y_0 点连续．

定理 7 设 X 是度量空间，$\{A_y|y\in X\}$ 是 X 上一族映射，如果存在常数 α，$0<\alpha<1$，对一切 x, x', $y\in X$，都有

$$\rho(A_yx, A_yx')\leqslant\alpha\rho(x, x'), \tag{7.20}$$

那末，当 A_y 在 y_0 点连续时，映射 A_y 的不动点 x_y^* 必在 y_0 点连续．

证明 对每个 $y\in X$，显然 A_y 有唯一的不动点 x_y^*．对任何 $y\in X$，以 $x_{y_0}^*$ 作为求 A_y 的不动点 x_y^* 的初次近似，那末，由(7.8)得到

$$\rho(x_y^*, x_{y_0}^*)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\rho(x_1, x_{y_0}^*)$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\rho(A_yx_{y_0}^*, A_{y_0}x_{y_0}^*),$$

所以当 $y\to y_0$ 时，$\rho(x_y^*, x_{y_0}^*)\to 0$. 证毕.

显然，定理 7 又可应用于具体场合(例如微分方程、积分方程、函数方程等)研究解的连续性.

3. 凸集

为了介绍更一般的不动点定理，先介绍线性空间上的凸集概念,凸集本身也是泛函分析中常用的一个重要概念.它起源于 Minkowski 所考察的有限维空间中的一种几何学. 有关赋范或赋拟范线性空间的许多研究可以转化为凸集的几何学的研究. 泛函分析的一个分支——局部凸拓扑线性空间的理论，就是在这个基础上发展起来的. 凸集的端点理论在许多表示理论中有着较大的影响. 晚近发展起来的凸分析与此密切相关，而且在不同的领域中找到了应用. 这里我们只能按本书今后的需要作极简单的介绍.

定义　设 X 是一个线性空间，A 是 X 的一个子集，如果对 A 中任何两点 x、y，联接它们的线段

$$\{\alpha x+(1-\alpha)y\,|\,0\leqslant\alpha\leqslant 1\}\tag{7.21}$$

都在 A 中，那末称 A 是凸集.

例 1　设 X 是线性空间，$p(\cdot)$是 X 上的一个拟范数，任取 $a\in X$ 及正数 r，利用 $p(\cdot)$ 作 X 中的球 $S(a, r)=\{x\,|\,x\in X,\ p(x-a)\leqslant r\}$，那末 $S(a, r)$ 是一个凸集. 事实上，当 $x, y\in S(a, r)$ 时，由 $p(x-a)\leqslant r$, $p(y-a)\leqslant r$，得到

$$\begin{aligned}p(\alpha x+(1-\alpha)y-a)&=p(\alpha(x-a)+(1-\alpha)(y-a))\\&\leqslant\alpha p(x-a)+(1-\alpha)p(y-a)\leqslant r,\end{aligned}$$

因此 $S(a, r)$是凸集.

例 2　线性空间 X 的每个线性子空间都是凸集.

定义　设 X 是一个线性空间，如果 $\{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是一族凸集，(容易看出) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 也一定是凸集. 因此，如果 B 是 X 中的一个子集，令$\{A_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 中包含 B 的凸集全体，那末 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 就是包含 B 的最小的凸集，称为 B 的凸包，记为 $\operatorname{cov}B$,

易知 B 的凸包是集

$$\left\{\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n \middle| x_\nu\in B,\ \alpha_\nu\geqslant 0,\ \sum_{\nu=1}^n\alpha_\nu=1\right\}. \tag{7.22}$$

定理8 设 X 是线性空间, A 是 X 上子集.

(1) 如果 X 是赋准范线性空间, A 是凸集, 那末 $\overline{A}$ 也是凸集.

(2) 如果 X 是赋范线性空间, A 是完全有界集, 那末 A 的凸包 $\mathrm{cov}\,A$ 是完全有界集.

(3) 如果 X 是 Banach 空间, A 是完全有界集, 那末 $\overline{\mathrm{cov}\,A}$ 是 X 上的凸紧集.

证明 (1) 设 A 是凸集. 对任何 $x,\ y\in\overline{A}$, 必有 A 中点列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$, 分别满足

$$x_n\to x,\ y_n\to y. \tag{7.23}$$

因为 A 是凸的, 所以对任何 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $\alpha x_n+(1-\alpha)y_n\in A$, 又显然

$$\alpha x_n+(1-\alpha)y_n\to\alpha x+(1-\alpha)y,$$

所以 $\alpha x+(1-\alpha)y\in\overline{A}$, 从而 $\overline{A}$ 是凸集.

(2) 设 A 是完全有界集, 所以对任何 $\varepsilon>0$, 必存在 A 的有限 $\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{y_j|j=1,\cdots,k\}$. 取自然数 n, 使得 $\left\|\frac{1}{n}y_j\right\|<\frac{\varepsilon}{2k}$ $(j=1,2,\cdots,k)$. 显然, $B_1=\left\{y\middle|y=\sum_{j=1}^k\tau_jy_j,\ \tau_j=\frac{i}{n},\ i=0,1,\cdots,n\right\}$是有限集. 今证 B_1 构成 $\mathrm{cov}\,A$ 的 ε-网: 事实上, 对任何 $x\in\mathrm{cov}\,A$, 由(7.22)知道, 必存在 A 中有限个点 x_1、$\cdots$、x_m 以及 m 个非负数 α_1、$\cdots$、α_m, $\sum_{i=1}^m\alpha_i=1$, 使得 $x=\sum_{i=1}^m\alpha_ix_i$. 但对每个 x_i, 存在 y_{j_i}, 使得

$$\|x_i-y_{j_i}\|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.24}$$

令 $y=\sum_{i=1}^m\alpha_iy_{j_i}$, 合并 $\{y_j\}$ 的系数, $y=\sum_{j=1}^k a_jy_j$, 显然 $a_j\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^k a_j=1$. 对每个 a_j, 取适当的 τ_{i_j}, 使 $|\tau_{i_j}-a_j|\leqslant\frac{1}{n}$. 从而

$$\left\|x-\sum_{j=1}^k\tau_{i_j}y_j\right\|=\left\|\sum_{i=1}^m\alpha_ix_i-\sum_{j=1}^k\tau_{i_j}y_j\right\|$$

$$\leqslant\left\|\sum_{i=1}^m\alpha_i(x_i-y_{j_i})\right\|+\left\|\sum_{j=1}^k(a_j-\tau_{i_j})y_j\right\|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n}\|y_j\|<\varepsilon, \tag{7.25}$$

所以 cov A 是完全有界的.

(3) 由于 A 是完全有界集, 由(2), cov A 是完全有界集. 再由(1), $\overline{\text{cov}\, A}$ 是凸闭完全有界集, 但 X 是 Banach 空间, 所以 $\overline{\text{cov}\, A}$ 是凸紧集. 证毕.

4. 凸集与凸泛函

定义 设 X 是线性空间, $p(\cdot)$ 是 X 上的函数(允许取无限大值), 如果满足

(i) (非负性) $p(x)\geqslant 0$, $x\in X$, 并且 $p(0)=0$;

(ii) (次可加性) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$, $x, y\in X$;

(iii) (正齐性) $p(\alpha x)=\alpha p(x)$, $x\in X$, $\alpha\geqslant 0$[注1];

那末称 p 是 X 上的凸泛函.

显然, X 上拟范数便是 X 上的凸泛函.

定义 设 f 是定义在度量空间 X 的点集 A 上的允许取 $-\infty$ 值(或允许取 $+\infty$ 值)的实函数, $x_0\in A$. 如果

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in O(x_0,r)\cap A} f(x)\leqslant f(x_0)$$
$$\left(\text{或}\ \lim_{r\to 0}\inf_{x\in O(x_0,r)\cap A} f(x)\geqslant f(x_0)\right), \tag{7.26}$$

那末称 x_0 是 f 的上半连续点(或下半连续点). 如果 A 中每个点都是 f 的上半连续点(或下半连续点), 那末称 f 是 A 上的上半连续函数(或下半连续函数).

引理 1 设 f 是定义在度量空间 X 的点集 A 上的有限实函数, 下列命题等价.

(1) f 是 A 上的下半连续函数.

(2) 对任何 $a\in\mathbb{R}$, 集 $A(f\leqslant a)$ 是相对 A 的闭集.

(3) 对任何 $a\in\mathbb{R}$, 集 $A(f>a)$ 是相对 A 的开集.

[注1] 当 $\alpha=0$ 时, 如式 $p(\alpha x)=\alpha p(x)$ 出现 $0\cdot\infty$, 规定 $0\cdot\infty=0$. 这样, (iii) 包含(i)中的条件 $p(0)=0$.

[注2] 显然, 对任何 r, $\sup\limits_{x\in O(x_0,r)\cap A} f(x)\geqslant f(x_0)$, $\inf\limits_{x\in O(x_0,r)\cap A} f(x)\leqslant f(x_0)$, 所以(7.26)实际上是等式.

(4) 对任何 $x_n\to x_0$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)\geqslant f(x_0)$.

(5) $-f$ 是 A 上的上半连续函数.

证明 (1)⇒(2) 设 $x_0\in\overline{A(f\leqslant a)}\cap A$, 因而对 x_0 的任何环境 $O(x_0, r)$ $(r>0)$, 必含有 $A(f\leqslant a)$ 中的点, 从而 $\inf\limits_{x\in O(x_0,r)\cap A} f(x)\leqslant a$, 由(7.26)立即知道 $f(x_0)\leqslant a$, 从而 $x_0\in A(f\leqslant a)$, 即 $A(f\leqslant a)$ 是相对于 A 的闭集.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) (反证法) 如果有 $x_0\in A$, $\{x_n\}\subset A$, $x_n\to x_0$, 使得 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)<f(x_0)$. 从而存在有限数 $a<f(x_0)$, 使得

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)<a. \tag{7.27}$$

由(3), 集 $A(f>a)$ 是相对于 A 的开集, 但 $x_0\in A(f>a)$, 因而存在 X 中的环境 $O(x_0, r)$, 使得 $O(x_0, r)\cap A\subset A(f>a)$. 由于 $x_n\to x_0$, 从而存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时, $x_n\in O(x_0, r)\cap A(\subset A(f>a))$, 显然, 这与(7.27)相矛盾.

(4)⇒(1) 今证任何 A 中点 x_0 必是 f 的下半连续点: 取 $r=\frac{1}{n}(n=1, 2, \cdots)$, 对任何 $\varepsilon>0$, 易知必存在 $x_n\in O\left(x_0, \frac{1}{n}\right)\cap A$, 使得

$$f(x_n)-\varepsilon<\inf_{x\in O(x_0,\frac{1}{n})\cap A} f(x). \tag{7.28}$$

注意, 对任何 $r'<r$, 总有

$$\inf_{x\in O(x_0,r)\cap A} f(x)\leqslant\inf_{x\in O(x_0,r')\cap A} f(x),$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\inf_{x\in O(x_0,r)\cap A} f(x)&=\lim_{n\to\infty}\inf_{x\in O(x_0,\frac{1}{n})\cap A} f(x)\\&=\varliminf_{n\to\infty}\inf_{x\in O(x_0,\frac{1}{n})\cap A} f(x)\geqslant\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)-\varepsilon\\&\geqslant f(x_0)-\varepsilon,\end{aligned}$$

再令 $\varepsilon\to 0$, 立即知道 f 在 x_0 点下半连续.

(5)和(1)的等价性是显然的. 证毕.

系　设 f 是定义在度量空间 X 的点集 A 上的有限实函数，那末 f 是连续的充要条件是 f 既是上半连续函数，又是下半连续函数.

证明　利用连续函数的充要条件是开集的原象必是开集，从引理 1 中的(2)、(3)易知系中的必要性是显然的. 反之，如果 f 既是 A 上的上半连续函数，又是下半连续函数，那末对任何 $a<b$，$A(a<f<b)$ 必是相对于 A 的开集，再由直线上开集的构造定理，易知对直线上任何开集 G，$A(f\in G)$ 必是相对于 A 的开集，从而 f 是 A 上连续函数. 证毕.

定义　设 A 是线性空间 X 上的子集. 如果对每个 $x\in X$，必存在正数 α，使得 $\alpha x\in A$，那末称 A 是 X 的吸收集，如果 A 满足如下性质：当 $x\in A$ 时，对任何 $\alpha\in \mathbb{\Lambda}$，$|\alpha|=1$，都有 $\alpha x\in A$，那末称 A 是均衡集(当 X 是实空间时，称 A 是对称集)[注].

显然，如果 A 是吸收集，必然 $0\in A$. 又线性空间 X 中的任何线性子空间未必是吸收集，但总是均衡集.

例如 E^2 上单位圆周是均衡集，但不是吸收集. 赋准范线性空间中任何包含了 0 点的某个环境的集 A 必是吸收集，当然，A 未必是均衡集.

引理 2　设 X 是 Fréchet 空间，A 是 X 上均衡凸闭吸收集，那末必存在开球 $O(0, a)$，使得 $O(0, a)\subset A$.

证明　对任何数 $a\in \mathbb{\Lambda}$，记 $aA=\{ax\mid x\in A\}$. 因为 A 是吸收集，所以 $0\in A$，又因为 A 是凸集，所以当 $x\in A$ 时，一切 $\alpha x\in A(0\leqslant\alpha\leqslant1)$，由此可知 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}nA$. 由于 A 是闭的，根据 §4 定理 16 的系，$nA(n=1, 2, \cdots)$ 必都是闭集. 根据完备度量空间的第二纲性，必有某个 nA 在某个开球 $O(x_0, r)$ 中稠密，因为 nA 是闭的，所以 $nA\supset S(x_0, r)$ $(S(x_0, r)=\{x\mid \|x-x_0\|\leqslant r\})$. 由于 A 是对称集，所以 $nA\supset S(-x_0, r)$. 注意，由于 A 是凸的，易知 $nA(n=1,$

[注]　本书中的均衡集与一般其它书中的均衡集略有不同(那里假设 $|\alpha|\leqslant1$，$\alpha x\in A$).

2, …)都是凸的,因而对任何 $y\in O(0, r)$,

$$y=\frac{1}{2}(x_0+y)+\frac{1}{2}(-x_0+y)\in nA,$$

从而 $nA\supset O(0, r)$,即 $A\supset\frac{1}{n}O(0, r)$. 但 $\frac{1}{n}O(0,r)$是包含 0 点的开集,从而存在 a,使得 $A\supset O(0, a)$. 证毕.

下面给出凸集,凸泛函之间的联系.

定理 8 在线性空间 X 上,下列命题成立.

(1) A 是 X 的凸集,并且对任何 $x_0\in A$,集$\{\alpha|\alpha\geqslant 0, \alpha x_0\in A\}$是直线上包含 0 点的闭集的充要条件是存在 X 上唯一的凸泛函 p,使得 $A=X(p\leqslant 1)$. 而且,A 包含射线 $\{\alpha x_0|\alpha\geqslant 0\}$ 的充要条件是$p(x_0)=0$.

(2) A 是 X 的凸吸收集,并且对任何 $x_0\in A$,集 $\{\alpha|\alpha\geqslant 0, \alpha x_0\in A\}$ 是直线上闭集的充要条件是存在 X 上唯一的有限凸泛函 p,使得 $A=X(p\leqslant 1)$.

(3) 设 X 是赋准范线性空间,A 是 X 的凸、闭吸收集的充要条件是存在 X 上唯一的有限的下半连续凸泛函 p,使得 $A=X(p\leqslant 1)$.

(4) 设 X 是赋准范线性空间. A 是 X 的均衡凸闭吸收集的充要条件是存在 X 上唯一的关于准范数下半连续的拟范数 p,使得 $A=X(p\leqslant 1)$.

(5) 设 X 是赋准范线性空间,A 是 X 的不包含任何线性子空间的均衡凸闭吸收集的充要条件是存在 X 上唯一的关于准范数下半连续的范数 p,使得 $A=X(p\leqslant 1)$.

(6) 设 X 是 Banach 空间,范数是$\|\cdot\|$. A 是 X 的有界均衡凸闭吸收集的充要条件是存在 X 上的唯一的范数$\|\cdot\|'$,使得 $A=\{x|\|x\|'\leqslant 1\}$,并且此时$(X, \|\cdot\|)$与$(X, \|\cdot\|')$拓扑同构.

证明 本定理的核心在于证明(1).

(1) 充分性 设 p 是 X 上的凸泛函,令

$$A=X(p\leqslant 1),$$

对任何 $x, y\in A$ 以及 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，因为 p 是凸泛函，所以

$$p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant p(\alpha x)+p((1-\alpha)y)$$
$$=\alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)\leqslant 1, \quad (7.29)$$

所以 A 是凸集．又因为 $p(0)=0$，所以 $0\in A$．对任何 $x_0\in A$，由 A 的凸性和 $0\in A$，所以 $rx_0\in A(0\leqslant r\leqslant 1)$，因此，$\{\alpha|\alpha\geqslant 0, \alpha x_0\in A\}$ 是包含 0 点的线段．固定 $x_0\in A$，从 $p(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$ 以及 $p(x_0)\leqslant 1$，易知 $p(\alpha x_0)$ 是 $[0,\infty)$ 上 α 的连续函数，从而 $\{\alpha|\alpha\geqslant 0, p(\alpha x_0)\leqslant 1\}$ 是直线上闭集．因此 $\{\alpha|\alpha\geqslant 0, \alpha x_0\in A\}$ 还是直线上闭线段．

必要性 利用给定的集 A，作 X 上的函数：

$$p(x)=\inf\left\{\lambda|\lambda>0, \frac{x}{\lambda}\in A\right\}. \quad (7.30)$$

注意，如果对某个 $x\in X$，不存在 $\lambda>0$，使得 $\frac{x}{\lambda}\in A$，那末规定 $p(x)=\infty$．显然，p 是 X 上非负函数．因为 $0\in A$，所以 $p(0)=0$．对任何 $\alpha>0$，以及 $x\in X$，

$$p(\alpha x)=\inf\left\{\lambda|\lambda>0, \frac{\alpha x}{\lambda}\in A\right\}$$
$$=\inf\left\{\lambda|\lambda>0, \frac{x}{\frac{\lambda}{\alpha}}\in A\right\}$$
$$=\inf\left\{\alpha\tau|\tau>0, \frac{x}{\tau}\in A\right\}=\alpha p(x),$$

这样，p 满足了凸泛函的条件(i)，(iii)．

为证 p 是凸泛函，仅需它满足条件(ii)，即次可加性．对任何 $x, y\in X$，如果 $p(x)$、$p(y)$ 中有一个是无限大，易知 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ 已成立．所以不妨设 $p(x)$、$p(y)$ 均为有限的．这时，对任何 $\varepsilon>0$，由(7.30)，$0\in A$ 以及 A 的凸性，易知

$$\frac{x}{p(x)+\frac{\varepsilon}{2}}\in A, \quad \frac{y}{p(y)+\frac{\varepsilon}{2}}\in A.$$

记 $\alpha=\dfrac{p(x)+\frac{\varepsilon}{2}}{p(x)+p(y)+\varepsilon}$，再由 A 的凸性，易知

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+\varepsilon}=\alpha\frac{x}{p(x)+\frac{\varepsilon}{2}}+(1-\alpha)\frac{y}{p(y)+\frac{\varepsilon}{2}}\in A,$$

因此 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)+\varepsilon$，再令 $\varepsilon\to 0$，又得到 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$.

再证 $A=X(p\leqslant 1)$. 显然，对任何 $x_0\in A$，$p(x_0)\leqslant 1$，所以，$A\subset X(p\leqslant 1)$. 反之，对任何 $y_0\in X(p\leqslant 1)$，由(7.30)易知 $\frac{y_0}{1+\frac{1}{n}}\in A(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 再根据 $\{\alpha|\alpha\geqslant 0,\ \alpha y_0\in A\}$ 是闭集的假设得到 $y_0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_0}{1+\frac{1}{n}}\in A$，即 $A\supset X(p\leqslant 1)$. 因此，$A=X(p\leqslant 1)$.

最后证明适合 $A=X(p\leqslant 1)$ 的 p 的唯一性. 事实上，如果再有凸泛函 p'，使得 $A=X(p'\leqslant 1)$. 利用凸泛函的正齐性，立即知道对任何 $a>0$，

$$X(p\leqslant a)=\left\{x\,\middle|\,\frac{x}{a}\in A\right\}=X(p'\leqslant a). \tag{7.31}$$

由(7.31)易知 $p=p'$. 事实上，如果有 $x_0\in X$，使得 $p(x_0)\neq p'(x_0)$，不妨设有 a，使得 $p(x_0)>a>p'(x_0)$，显然这和(7.31)相矛盾.

显然，由(7.30)易知 A 包含射线 $\{\alpha x_0|\alpha\geqslant 0\}$ 的充要条件是 $p(x_0)=0$.

(2) 由于(1)，易知只要证明 A 的吸收性和 p 的有限性等价即可. 如果 A 是吸收的，那末对任何 $x\in X$，必有 $\alpha>0$，使得 $\alpha x\in A$，由(7.30)知道 $p(x)<\infty$，从而 p 是 X 上有限函数. 反之，如果 p 是有限凸泛函，显然集 $X(p\leqslant 1)$ 必是吸收的.

(3) 当 p 是下半连续时，由引理1，集 $X(p\leqslant 1)$ 是闭集. 反之，如果给定的集 A 是凸闭吸收集，由吸收性可知 $0\in A$，再由闭凸性可知，对任何 $x_0\in A$，集 $\{\alpha|\alpha\geqslant 0,\ \alpha x_0\in A\}$ 是直线上闭线段. 由闭性可知(7.30)所作的有限凸泛函 p 所对应的集 $X(p\leqslant 1)=A$ 是闭的. 注意在赋准范线性空间中，对任何 $a\in\mathbb{K}$ 以及闭集 A，集 $aA=\{ax|x\in A\}$ 必是闭集，从而对任何 $a>0$，集 $X(p\leqslant a)=aA$

是闭集．而当 $a=0$ 时，令 $L_0=X(p=0)$，因为 $L_0\subset A$，而 A 是闭的，所以 $\overline{L}_0\subset A$．对任何 $x\in\overline{L}_0$，必有 $\{x_n\}\subset L_0$，并且 $x_n\to x$．对任何 $\alpha>0$，由于 $x_n\in L_0$，即 $p(x_n)=0$，从而 $p(\alpha x_n)=\alpha p(x_n)=0$，$\alpha x_n\in L_0\subset A$．但是 $\alpha x_n\to\alpha x$，A 是闭的，所以 $\alpha x\in A$．从而 $p(x)=0$，即 L_0 是闭集．这样，对一切 $a\in\mathbb{R}$，$X(p\leqslant a)$ 是闭集．由引理 1，p 是下半连续的．

(4) 由 (3) 可知，仅需证明 A 的均衡性等价于 p 的一次绝对齐性．当 p 具有绝对齐性时，显然，对任何 $x\in X(p\leqslant 1)$，以及 $\alpha\in\mathbb{A}$，$|\alpha|=1$，有

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x)\leqslant 1, \tag{7.32}$$

所以 $\alpha x\in X(p\leqslant 1)$，即 $X(p\leqslant 1)$ 必是均衡的．反之，如果给定的凸闭吸收集 A 还具有均衡性，那末对任何 $x\in X$ 以及 $\alpha\in\mathbb{A}$，$|\alpha|=1$，由 (7.30) 所作的凸泛函 p 必满足

$$\begin{aligned}p(\alpha x)&=\inf\left\{\lambda\,|\,\lambda>0,\ \frac{\alpha x}{\lambda}\in A\right\}\\&=\inf\left\{\lambda\,|\,\lambda>0,\ \frac{x}{\lambda}\in A\right\}=p(x),\end{aligned}$$

再由 p 的正齐性，易知 p 具有一次绝对齐性．

(5) 显然，由 (4)、(1) 可知 A 不包含非零线性空间的充要条件是 $\{x\,|\,p(x)=0\}=\{0\}$，即充要条件是 p 为范数．

(6) 记 (5) 中 p 为 $\|\cdot\|'$，$\|\cdot\|'$ 是范数．因为 A 是有界集，所以存在 $M>0$，使得任何 $x\in A=\{x\,|\,\|x\|'\leqslant 1\}$，$\|x\|\leqslant M$．因此，对任何 $y\in X$，

$$\|y\|\leqslant M\|y\|'. \tag{7.33}$$

另一方面，因为 A 是均衡凸闭吸收集，根据引理 2，存在 $a>0$，使得 $O(0,a)\subset A$．对任何 $y\neq 0$，由于 $\dfrac{ay}{2\|y\|}\in O(0,a)$，所以

$$\|y\|'\leqslant\frac{2}{a}\|y\|.$$

从上式和 (7.33) 易知 X 上的恒等映射是 $(X,\|\cdot\|)$ 到 $(X,\|\cdot\|')$ 的拓扑映射．证毕．

细心考察定理 8 的(1)的必要性证明,不难得到下列系.

系 1 设 X 是线性空间, A 是包含 O 点的凸集,那末必存在唯一凸泛函 p,使得

$$X(p<1)\subset A\subset X(p\leqslant 1). \tag{7.34}$$

证明 从定理 8 的(1)的必要性证明中,易知由(7.30)所作的 $p(x)$就满足(7.34), 所以只要证明唯一性, 类似于定理 8 的(1)的唯一性证明,显然, 只要证明: 如果又有凸泛函 p', 使得 $X(p'<1)\subset A\subset X(p'\leqslant 1)$,那末必有 $X(p\leqslant 1)=X(p'\leqslant 1)$就可以了.

事实上,任取 $x\in X(p'\leqslant 1)$. 如果 $p'(x)<1$,那末 $x\in A$,从而 $p(x)\leqslant 1$, 即 $x\in X(p\leqslant 1)$; 如果 $p'(x)=1$, 那末对任何 $0<\alpha<1$, $p'(\alpha x)=\alpha p'(x)=\alpha<1$,所以 $\alpha p(x)=p(\alpha x)\leqslant 1$,再令 $\alpha\to 1$,立即得到 $p(x)\leqslant 1$,即 $x\in X(p\leqslant 1)$. 这样,$X(p'\leqslant 1)\subset X(p\leqslant 1)$. 对调 p' 和 p 的地位,就得到 $X(p'\leqslant 1)=X(p\leqslant 1)$, 从而 $p=p'$. 证毕.

今后, 称满足(7.34)的 p 为由凸集 A 决定的凸泛函(或 Minkowski泛函). 同样, 对给定的凸泛函 p, 称集 $A=X(p\leqslant 1)$为由 p 决定的凸集.

系 2 设 X 是赋准范线性空间.

(1) 如果 A 是 X 中包含 O 点的凸集, p 是由 A 决定的泛函, 那末 p 连续的充要条件是 A 包含 O 点的某邻域.

(2) X 上存在非零连续凸泛函的充要体是 X 中存在包含 O 点的某邻域,但不是全空间的凸集.

证明 (1) 充分性 当 p 连续时, $X(p<1)$是包含 O 点的凸开集,自然,由 $A\supset X(p<1)$立即得到 A 含有 0 点某邻域.

必要性 A 既含有 O 点某邻域,例如 $O(0, r)$ $(r>0)$, A 就是吸收集. 这时 p 是有限的凸泛函. 对任何给定的 $1>\varepsilon>0$, 由 p 的正齐性,对任何 $z\in\varepsilon O(0, r)=\{\varepsilon x|x\in O(0, r)\}$,

$$p(z)=p(\varepsilon x)=\varepsilon p(x)\leqslant\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon O(0, r)$ 是 X 中开集, 所以存在 $\delta>0$, 使得 $O(0, \delta)\subset\varepsilon O(0, r)$, 从而对任何 $z\in O(0, \delta)$, $p(z)\leqslant\varepsilon$. 再利用 p 的次可加性,立即得到对任何 $x\in X$, $z\in O(0, \delta)$ (从而 $-z\in O(0, \delta)$),有

$$p(z+x)\leqslant p(x)+p(z),$$
$$p(x)\leqslant p(z+x)+p(-z),$$

即 $|p(z+x)-p(x)|\leqslant\varepsilon$. 这就是说, p 是连续的.

(2) 必要性 当非零凸泛函 p 连续时, 显然, $X(p<1)$ 是包含 O 点但不是全空间的凸开集.

充分性 如果 A 是包含 O 点某邻域的凸开集, 那末由(1), 由 A 所决定的凸泛函 p 是连续的. 由系 1, (7.34)成立. 由(7.34)可知, 当 A 不是全空间时, p 必是非零凸泛函, 证毕.

注意, 不是每个赋准范线性空间都有非零连续凸泛函的.

例 在 Fréchet 空间 $S([0, 1], m)$ 上不存在非零的连续凸泛函. 事实上, 根据上述系, 我们只要证明 $S([0, 1], m)$ 上任何包含 $O(0, \varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 的凸集 U 必是全空间就可以了. 用 I 表示 $[0, 1]$ 上长度为 $\frac{1}{n}$ 的区间, 显然, 对任何 $x(t)\in S([0, 1], m)$, 总有

$$\int_I \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}dt\leqslant\frac{1}{n}, \tag{7.35}$$

特别, 取某个 n, 使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 并将 $[0, 1]$ n 等分, 令 $I_i=\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$, 因此

$$x(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}nx(t)\chi_{I_i}(t),$$

其中 $\chi_{I_i}(t)$ 是区间 I_i 的特征函数. 由(7.35), 易知 $nx(t)\chi_{I_i}(t)\in O(0, \varepsilon)$. 又因为 U 是凸集, 所以 $x(t)\in U$, 即 $U=S([0, 1], m)$.

5. Brouwer 不动点定理

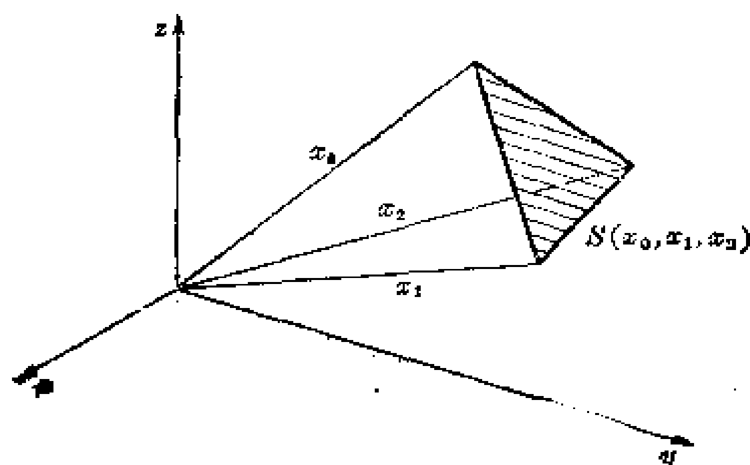
这是拓扑学中一个基本定理, 在有限维空间理论中它占有重要的地位. 在它的基础上可以得到更一般的不动点定理.

定义 设 X 是赋范线性空间, x_0、$\cdots$、x_n 是 X 中 $n+1$ 个向量. 如果 $\{x_i-x_0|i=1, 2, \cdots, n\}$ 是 X 上的线性无关的向量, 称集 $\{x_i\}$ 的凸闭包 $S(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 为 n 维单纯形, 简称为**单纯形**.

称 x_0、x_1、$\cdots$、x_n 为单纯形 $S(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的顶点. 如果在

x_0、x_1、…、x_n 中去掉某 k 个向量 x_{i_1}、…、x_{i_k}，那末余下的向量构成 $(n-k)$ 维单纯形，称它为 $S(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 中反位于顶点 x_{i_1}、…、x_{i_k} 的 $(n-k)$ 维境界.

例如，E^3 上由 x_0、x_1、x_2 所构成的单纯形就是下图中描有斜线的三角形. 反位于顶点 x_0 的境界便是联接 x_1、x_2 的线段，反位于 x_0、x_1 的境界便是单点 x_2（它是零维单纯形）.



注意，由(7.22)以及 $\{x_i-x_0|i=1, 2, \cdots, n\}$ 是线性无关的，易知对任何 $x\in S(x_0, \cdots, x_n)$，必存在唯一的 $n+1$ 个非负实数 α_0、α_1、…、α_n，$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i=1$，使得

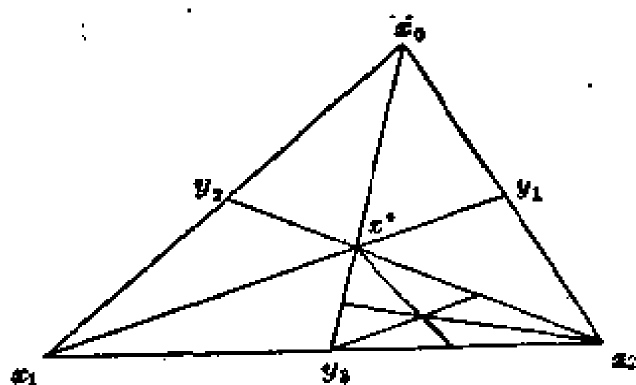
$$x=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x_i. \tag{7.36}$$

今后，称 $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ 是点 x 相应于 $\{x_i\}$ 的坐标. 显然，反位于 x_{i_1}，…，x_{i_k} 的境界中点的坐标 $\alpha_{i_1}=\cdots=\alpha_{i_k}=0$. 称 S 中坐标满足 $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\dfrac{1}{n+1}$ 的点 x^* 是 $S(x_0, \cdots, x_n)$ 的重心.

下面用归纳法引入单纯形的子单纯形概念.

定义 对于一维单纯形 $S(x_0, x_1)$，称 $S\left(x_0, \frac{1}{2}(x_0+x_1)\right)$，$S\left(x_1, \frac{1}{2}(x_0+x_1)\right)$ 是 S 的 1 级子单纯形. 如果对 $n-1$ 维单纯形已经定义了 1 级子单纯形，那末 n 维单纯形 $S(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的 1 级子单纯形定义如下：取 S 的某个 $n-1$ 维境界，如果它的 1 级子单纯形为 S_1、…、S_m，那末在 $S_k(k=1, 2, \cdots, m)$ 上加入 S 的重心

x^*，得到m个n维单纯形，如此对每个$n-1$维境界所得到的一切n维单纯形(计$m(n+1)$个)都称为$S(x_0, \cdots, x_n)$的1级子单纯形．$S(x_0, x_1, \cdots, x_n)$的每个$k-1$级子单纯形的1级子单纯形称为$S(x_0, x_1, \cdots, x_n)$的k级子单纯形．



例如$S(x_0, x_1, x_2)$的1级子单纯形有6个：$S(x_0, y_2, x^*)$，$S(x_0, x^*, y_1)$，$S(y_2, x_1, x^*)$，$S(x_1, y_3, x^*)$，$S(y_3, x^*, x_2)$，$S(x^*, x_2, y_1)$等，其中$y_1=\dfrac{x_0+x_2}{2}$，$y_2=\dfrac{x_0+x_1}{2}$，$y_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$x^*=\dfrac{x_0+x_1+x_2}{3}$，而$S(x_0, x_1, x_2)$的2级子单纯形将是$6^2=36$个．

显然，当$X=E^n$时，$S(x_0, \cdots, x_n)$的任何一级子单纯形彼此之间最多只有公共境界，没有公共内点，并且随着子单纯形的级数k趋向无限大，相应于k级子单纯形的直径必趋于零．因为任何n维赋范线性空间必是彼此拓扑同构的(见§5定理12的系)，因而对任何n维赋范线性空间X，$S(x_0, \cdots, x_n)$的任何同一级单纯形彼此间最多只有公共境界，没有公共内点；并且随着级数k趋向无限大，子单纯形的直径必趋于零．

设$S=S(x_0, \cdots, x_n)$是n维单纯形．S_1、$\cdots$、S_m是S的某一级的子单纯形全体．ν是定义在S_1、$\cdots$、S_m的所有顶点的集Z上而取值于$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$中的函数．$\nu(S_i)$表示所有S_i的顶点的值的全体．如果

$$\nu(S_i)=\{0, 1, 2, \cdots, n\}, \qquad (7.37)$$

那末称S_i是(关于ν)正常的．

显然，如果 $\nu(z)(z\in Z)$ 没有适当的限制，对于 $\nu(z)$，可以没有正常的子单纯形．例如，对一切 $z\in Z$，$\nu(z)=0$，这种 $\nu(z)$ 就没有正常的子单纯形．但是有下列命题：

引理 3 如果 $\nu(z)(z\in Z)$ 满足下列条件：当 z 是落在 S 的某个 k 维境界 $S(x_{i_0}, \cdots, x_{i_k})$ 时，$\nu(z)$ 必是 i_0、$\cdots$、i_k 中的一个数，那末，任何一级的子单纯形全体 S_1、$\cdots$、S_m 中必有一个是正常的．

证明(用归纳法) 我们只要证明正常子单纯形的个数是奇数就可以了．对于零维单纯形，S 退化为一个点 x_0，引理 3 显然成立．假设对维数为 $n-1$ 的单纯形，引理已成立，今证维数是 n 时引理也成立．

事实上，考察子单纯形 S_k 的 $n-1$ 维境界 S_k^i，如果 S_k^i 满足 $\nu(S_k^i)=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，称 S_k^i 是值得注意的境界．显然，如果 S_k 是正常的，那末 S_k 的值得注意的境界的个数 P_k 是 1；反之，$P_k=0$ 或 2．这样，和 $P=\sum\limits_{k=1}^{m} P_k$ 与 S_1、$\cdots$、S_m 中正常子单纯形全体的个数的奇偶性是一致的．据此，将 S_1、$\cdots$、S_m 中所有值得注意的境界分为两组：(I)是不含在 S 的某 $n-1$ 维境界中的，这一组被注意的境界全体的个数记为 P'．由于这种境界必是 S_1、$\cdots$、S_m 中某两个的公共境界．所以在和 P 中应算两次．(II) 是含在 S 的某 $n-1$ 维境界中的，因为这种境界仅能作为 S_1、$\cdots$、S_m 中的一个 $n-1$ 维境界，所以它的全体的个数 $P''=P-2P'$．由此可知，P 与 P'' 的奇偶性一致．根据引理的假设，显然，(II)组中所有值得注意的境界必在 $S(x_0, \cdots, x_{n-1})=S'$ 中．然而 S_1、$\cdots$、S_m 中所有可能落在 S' 上的 $n-1$ 维境界个数，正是构成 S' 上相应同一级的 S' 的子单纯形中为正常的个数．由归纳法假设，它必是奇数．引理证毕．

引理 4 设 $S=S(x_0, \cdots, x_n)$ 是 n 维赋范线性空间 X 上的 n 维单纯形，F_0、F_1、$\cdots$、F_n 是 X 上的 $n+1$ 个闭集．如果

$$S(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})\subset \bigcup_{j=0}^{k} F_{i_j}, \tag{7.38}$$

对 0、1、2、…、n 中任何 $k+1$ 个数 i_0、i_1、…、i_k 都成立，那末 $\bigcap_{k=0}^{n} F_k \neq \emptyset$.

证明 假设 S_1、…、S_m 是 S 的 p 级子单纯形全体，Z 是它们的顶点全体. 当 Z 中的点 $z \in S(x_{i_0}, \cdots, x_{i_k})$[注1] $\subset \bigcup_{j=0}^{k} F_{i_j}$ 时，必存在 i_s，使得 $z \in F_{i_s}$. 这时，定义 $\nu(z)=i_s$. 易知这样的 $\nu(z)$ 适合引理 3 的条件. 由引理 3，对于 $\nu(z)$ 必有一个正常的子单纯形 S_i. 既然 $\nu(S_i)=\{0, 1, \cdots, n\}$，按 $\nu(z)$ 的定义知道 S_i 必与每个 $F_j(j=0, 1, \cdots, n)$ 的交集不空(至少包含 S_i 中适合 $\nu(z)=j$ 的顶点 z). 设 S_i 的顶点为 $z_0^{(p)}$、…、$z_n^{(p)}$，从而

$$z_k^{(p)} \in F_k,\ k=0, 1, \cdots, n;\ p=1, 2, \cdots. \tag{7.39}$$

由于 S 是列紧闭集，并注意到当 $p \to \infty$ 时，S_i 的直径 $d(S_i) \to 0$，因而必存在子序列 $\{p_j\}$，和点 $z^* \in S$，使得

$$z_k^{(p_j)} \to z^*\ (p_j \to \infty),\ k=0, 1, \cdots, n. \tag{7.40}$$

因为对任何 j，$z_k^{(p_j)} \in F_k$，而 F_k 是闭集，所以 $z^* \in F_k(k=0, 1, \cdots, n)$，从而 $\bigcap_{k=0}^{n} F_k \neq \emptyset$. 证毕.

定理 9(Brouwer) 设 $S=S(x_0, \cdots, x_n)$ 是 n 维赋范线性空间 X 中的 n 维单纯形，A 是 S 到自身的连续映射，那末 A 必有不动点.

证明 对任何 $x \in S$，设 $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ 是 x 关于 $\{x_i\}$ 的坐标表示. 令

$$\beta_j = f_j(\alpha_0, \cdots, \alpha_n),\ j=0, 1, \cdots, n,$$

是点 Ax[注2]关于 $\{x_i\}$ 的坐标. 于是 $\beta_j \geqslant 0$，$\sum_{j=0}^{n} \beta_j = 1$. 由 A 的连续性假设，易知 $f_j(j=0, 1, \cdots, n)$ 都是连续函数. 令 F_j 是 S 中适合

$$\alpha_j \geqslant \beta_j \quad (\text{即} 0 \geqslant \beta_j - \alpha_j) \tag{7.41}$$

[注1] 这里对给定的 z，$S(x_{i_0}, \cdots, x_{i_k})$ 应理解为适合 $z \in S(x_{i_0}, \cdots, x_{i_k})$ 条件中维数最小的一个 k 维境界.

[注2] Aa 是 a 在映射 A 下的象的另一种简写法.

的点 x 的全体，因 f_j 是连续的，所以 F_j 是 S 的闭子集.

现在证明 $\{F_j\}$ 满足引理 4 的条件：事实上，设 $x\in S(x_{i_0},\cdots,x_{i_k})$，如果 $x\overline{\in}\bigcup_{j=0}^{k}F_{i_j}$，于是由(7.41)得到

$$\alpha_{i_j}<\beta_{i_j},\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ k. \tag{7.42}$$

而当 $i\neq i_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ k)$ 时，$\alpha_i=0$，因而

$$\alpha_i\leqslant\beta_i,\ i\neq i_j,\ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ k). \tag{7.43}$$

由(7.42)、(7.43)得到下述矛盾：

$$1=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i<\sum_{i=0}^{n}\beta_i=1,$$

所以 $\{F_j\}$ 满足引理 4 的条件.

按引理 4，存在 $z^*\in\bigcap_{k=0}^{n}F_k$. 如记 z^*、Az^* 的坐标分别为 $(\alpha_0^*,\cdots,\alpha_n^*)$、$(\beta_0^*,\cdots,\beta_n^*)$，由(7.41)

$$\alpha_j^*\geqslant\beta_j^*,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n,$$

从而 $1=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^*\geqslant\sum_{j=0}^{n}\beta_j^*=1$. 由此可知，只有 $\alpha_j^*=\beta_j^*$，即 $z^*=Az^*$. 证毕.

为了得到更一般的结果，我们还需要下面的引理.

引理 5 设 Ω 是 Banach 空间 X 上的有界闭凸体（含有内点的凸集称为凸体），S_1 是 X 上的闭单位球. 那末必存在 Ω 到 S_1 的拓扑映射(即度量子空间 Ω 与度量子空间 S_1 必拓扑同构).

证明 因为 X 上移动映射 τ_a: $x\mapsto x+a$ 必是 X 上拓扑映射，所以可不妨设 $O\in\Omega$，并且 O 是 Ω 的内点. 又由于 Ω 是有界闭凸集，由定理 8 系 2 的充分性可知，相应于 Ω 的满足 $\Omega=X(p\leqslant1)$ 的凸泛函 p 必是连续的，并且 $\{x|p(x)=0\}=\{0\}$.

再根据 Ω 的有界性，存在常数 $M>0$，当 $x\in\Omega$ 时，$\|x\|\leqslant M$. 由于对任何 $y\neq0$，$\dfrac{y}{p(y)}\in\Omega$，所以

$$\|y\|\leqslant Mp(y). \tag{7.44}$$

而当 $y=0$ 时，上式显然也成立，即(7.44)对一切 $y\in X$ 成立.

作映射 $T: x \mapsto \frac{p(x)}{\|x\|} x$，并规定 $T0=0$，易知 T 可视为 Ω 到 S_1 的映射．下面证明 T 是拓扑映射．

对任何 $x_1, x_2 \in \Omega$（不妨设 $x_2 \neq 0$），如果

$$p(x_1)\frac{x_1}{\|x_1\|}=p(x_2)\frac{x_2}{\|x_2\|}, \tag{7.45}$$

从而 $\frac{x_1}{\|x_1\|}=\frac{x_2}{\|x_2\|}$，即 $x_1=cx_2$，并且 $p(cx_2)=p(x_2)$．显然只有 $c=1$，即 $x_2=x_1$，从而 T 是单射．利用 $p(0)=0$，以及 p 是连续的，易知 T 是连续的．对任何 $y\in S_1$，$y\neq 0$，取 $x=\frac{\|y\|}{p(y)}y$，显然，$x\in\Omega$，并且 $Tx=y$．而当 $y=0$ 时，取 $x=0$，显然，$Tx=0$，所以 $T\Omega=S_1$，即 T 是 Ω 到 S_1 的连续双射．下面再证 T^{-1} 连续：注意 $T^{-1}y=\frac{\|y\|}{p(y)}y\ (y\neq 0)$，而当 $y=0$ 时，$T^{-1}0=0$．显然，对任何 $y\in S_1$，当 $y\neq 0$ 时，y 必是 T^{-1} 的连续点，故剩下仅需证明 $y=0$ 是连续点．任取 S_1 中收敛于 0 的点列 $\{y_n\}$（不妨设 $y_n\neq 0$，$n=1, 2, \cdots$），由 $T^{-1}y_n=\frac{\|y_n\|}{p(y_n)}\|y_n\|$ 和 (7.44)，易知当 $y_n\to 0$ 时，必然 $T^{-1}y_n\to 0$．从而 $y=0$ 也是 T^{-1} 的连续点．这样，T 是 Ω 到 S_1 的拓扑映射．证毕．

由引理 5 立即可以得到下面的系．

系 Banach 空间上任何两个闭凸体必拓扑同构．

定理 9′（Brouwer） 设 Ω 是 n 维赋范线性空间 X 上的有界闭凸体，A 是 Ω 到 Ω 的连续映射，那末 A 必有不动点．

证明 先设 X 是实空间．在 X 上任取 n 个线性无关的向量 x_1、$\cdots$、x_n，令 $x_0=0$，$S=S(x_0, x_1, \cdots, x_n)$，$S$ 是 X 上有界闭凸体，又任取 S 到 Ω 的拓扑映射 T．显然 $A_0=T^{-1}AT$ 是 S 到 S 的连续映射，由定理 9，A_0 有不动点 z^*．记 $z=Tz^*$．由于

$$Az=ATz^*=TT^{-1}ATz^*=Tz^*=z, \tag{7.46}$$

所以 z 是 A 的不动点．

当 X 是 n 维复 Banach 空间时，易知可以视 X 为 $2n$ 维的实

Banach 空间. 利用对实空间已证明的事实，立即可得到复空间上定理也成立. 证毕.

Brouwer 不动点定理最初是出于研究维数不变性问题的，今天已被推广，并成为研究各类方程求解的重要工具. 下面将介绍它在一般 Banach 空间的推广——Schauder 不动点定理(在拓扑线性空间中还有进一步的推广，见 §8).

6. Schauder 不动点定理

定理 10 设 Ω 是 Banach 空间 X 上的凸紧集，A 是 Ω 到 Ω 的连续映射，那末 A 必有不动点.

证明 本定理证明的主要想法是利用 Ω 的紧性把无限维空间中问题有限维化，然后利用极限过渡，求出 A 的不动点.

(I) 有限维化 任取 $\varepsilon>0$，因 Ω 是紧的，Ω 有有限 ε-网

$$x_1、\cdots、x_n \tag{7.47}$$

由 $x_1、\cdots、x_n$ 张成的凸闭包记为 Ω_0. 显然 $\Omega_0\subset\Omega$，并且 Ω_0 是 X 的维数不超过 n 的线性子空间 L 的闭凸体[注]. 不妨设 $L=\text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, $\dim L=m$. 对维数用归纳法，不难证明 Ω_0 必可分解为满足下面条件的某些单纯形的和.

(i) (7.47)中每个点都至少是一个单纯形的顶点.

(ii) 两个单纯形或者不相交，或者交是某个 $k(0\leqslant k<m-1)$ 维境界.

由于 A 在 Ω 上连续，Ω 是紧的，所以必存在 $\delta>0$，当 $\|x-x'\|<\delta$ 时，

$$\|Ax-Ax'\|<\varepsilon,\ x,\ x'\in\Omega. \tag{7.48}$$

必要时，我们还可将满足(i)、(ii)所得单纯形继续剖分成子单纯形，增加子单纯形的级数，以使所得到的每个单纯形的直径小于 $\min(\varepsilon, \delta)$. 记如此所得的单纯形全体为

$$S_1、S_2、\cdots、S_t,\ \Omega_0=\bigcup_{j=1}^{t} S_j. \tag{7.49}$$

作 $\Omega_0\to\Omega_0$ 的映射 A_ε 如下：设 z 是(7.49)中某单纯形的顶点，由于

[注] 凸体的意义见引理 5.

$Az\in\Omega$，所以在(7.49)中至少必有一个单纯形的顶点 $\bar{z}$，使得

$$\|\bar{z}-Az\|<\varepsilon, \tag{7.50}$$

这时规定 $A_\varepsilon z=\bar{z}$. 规定好顶点的象后，对 $x\in\Omega_0$，但 x 不是(7.49)中任何单纯形的顶点，必存在 k，使得 $x\in S_k$，令 S_k 的顶点为 $x_0^{(k)}$、…、$x_m^{(k)}$，于是有唯一的表示式

$$x=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i^{(k)}x_i^{(k)}, \tag{7.51}$$

其中 $\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i^{(k)}=1$, $\alpha_i^{(k)}\geqslant 0$, $i=0, 1, \cdots, m$. 对这种 x，规定

$$A_\varepsilon x=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i^{(k)}A_\varepsilon x_i^{(k)}. \tag{7.52}$$

显然，当包含 x 的单纯形只有一个 S_k，上述定义是没有问题的；如果又有 $S_r(r\neq k)$ 包含 x，那末就要证明 $A_\varepsilon x$ 不依赖于 S_k 或 S_r 的选取. 事实上，设境界 $S_k\cap S_r$ 的顶点是 $x_{i_0}^{(k)}$、…、$x_{i_t}^{(k)}$ $(0\leqslant t\leqslant m-1)$，只要调整 $x_j^{(r)}$ 的下标，可以做到

$$x_{i_j}^{(k)}=x_{i_j}^{(r)},\ j=0, 1, \cdots, t, \tag{7.53}$$

其中 $x_{i_j}^{(r)}(j=0, 1, \cdots, t)$ 是 S_r 的顶点. 令 x 在 S_r 中的表示式为

$$x=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i^{(r)}x_i^{(r)}, \tag{7.54}$$

其中 $\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i^{(r)}=1$, $\alpha_i^{(r)}\geqslant 0$, $i=0, 1, \cdots, m$. 因为 $x\in S_k\cap S_r$，所以

$$\alpha_i^{(k)}=\alpha_i^{(r)}=0,\ i\neq i_j,\ (j=0, 1, \cdots, t). \tag{7.55}$$

由于 x 的表示是唯一的，从(7.55)立即得到 $\alpha_{i_j}^{(r)}=\alpha_{i_j}^{(k)}(j=0, 1, \cdots, t)$. 从(7.53)、(7.55)和(7.52)立即得到

$$A_\varepsilon x=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i^{(k)}A_\varepsilon x_i^{(k)}=\sum_{j=0}^{t}\alpha_{i_j}^{(k)}A_\varepsilon x_{i_j}^{(k)}$$
$$=\sum_{j=0}^{t}\alpha_{i_j}^{(r)}A_\varepsilon x_{i_j}^{(r)},$$

这就是说，$A_\varepsilon x$ 不依赖于包含 x 的单纯形的选取.

显然，A_ε 是 Ω_0 到 Ω_0 的映射. 下面证明 A_ε 是 Ω_0 上连续映射：把 A_ε 限制在单纯形 S_k 上看(当然 $A_\varepsilon S_k\subset S_k$ 未必成立)，如果 S_k 中一列点 $\{x_l\}$ 收敛于 x，从而 $\{x_l\}$ 在 S_k 中的每个坐标序列必

收敛于 x 的相应坐标$(\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \cdots, \alpha_m^{(k)})$. 由(7.52)式可知必有 $A_\varepsilon x_n \to A_\varepsilon x$. 因此 A_ε 限制在 S_k 上是连续的. 从而不仅每个单纯形 S_k 中不属于境界上的点都是作为 Ω_0 上定义的 A_ε 的连续点，而且境界上点也是作为 Ω_0 上定义的 A_ε 的连续点，即 A_ε 是 Ω_0 上连续映射.

根据定理 9′, A_ε 在 Ω_0 中存在不动点 x_ε, $A_\varepsilon x_\varepsilon = x_\varepsilon$.

(II) 极限过渡 下面主要是令 $\varepsilon \to 0$, 从 $\{x_\varepsilon\}$ 中抽出收敛的子序列，并证明它的极限就是 A 的不动点.

固定 ε，令 z_0、z_1、$\cdots$、z_m 是(7.49)中含有 x_ε 的某个单纯形的顶点. 由于$\|z_i - z_j\| < \delta(i, j=0, 1, \cdots, m)$，所以

$$\|Az_i - Az_j\| < \varepsilon, \ (i, j=0, 1, \cdots, m). \tag{7.56}$$

按 $A_\varepsilon z_i$ 的定义(参见(7.50))，又有

$$\|A_\varepsilon z_i - Az_i\| < \varepsilon, \ (i=0, 1, \cdots, m), \tag{7.57}$$

由此得到

$$\|A_\varepsilon z_i - A_\varepsilon z_j\| < 3\varepsilon, \ (i, j=0, 1, \cdots, m). \tag{7.58}$$

令 $x_\varepsilon = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^{(\varepsilon)} z_i$，其中 $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i^{(\varepsilon)} = 1$, $\alpha_i^{(\varepsilon)} \geqslant 0$, $i=0, 1, \cdots, m$. 于是

$$x_\varepsilon = A_\varepsilon x_\varepsilon = \sum \alpha_i^{(\varepsilon)} A_\varepsilon z_i.$$

由(7.58)，又可得到

$$\|x_\varepsilon - A_\varepsilon z_j\| = \left\|\sum_{i=0}^{m} \alpha_i^{(\varepsilon)} (A_\varepsilon z_i - A_\varepsilon z_j)\right\| < 3\varepsilon, \ (j=0, 1, \cdots, m).$$

又因为 $\|x_\varepsilon - z_i\| < \delta$，所以

$$\|Ax_\varepsilon - Az_i\| < \varepsilon, \ (i=0, 1, \cdots, m),$$

因此

$$\|x_\varepsilon - Ax_\varepsilon\| \leqslant \|x_\varepsilon - A_\varepsilon z_j\| + \|A_\varepsilon z_j - Az_j\| + \|Az_j - Ax_\varepsilon\| < 5\varepsilon. \tag{7.59}$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$，由于 Ω 是紧的，所以可从 $\{x_{\frac{1}{n}}\}$ 中取出一个收敛子序列，不妨设为$\{x_{\frac{1}{n}}\}$本身，令 z 是$\{x_{\frac{1}{n}}\}$的极限. 显然，$z \in \Omega$，并且

$$\|z - Az\| \leqslant \|z - x_{\frac{1}{n}}\| + \|x_{\frac{1}{n}} - Ax_{\frac{1}{n}}\| + \|Ax_{\frac{1}{n}} - Az\|. \tag{7.60}$$

在(7.60)中令 $n\to\infty$，并注意到(7.59)，立即得到 $z=Az$，即 z 是 A 的不动点．证毕．

定理 10′ 设 Ω 是 Banach 空间 X 的凸闭集，A 是 Ω 到 Ω 的连续映射，并且 $\mathscr{R}(A)$ 是紧集，那末 A 必有不动点．

证明 因为 $\mathscr{R}(A)\subset\Omega$，所以 $\overline{\mathrm{cov}\,\mathscr{R}(A)}\subset\Omega$，并且 $\overline{\mathrm{cov}\,\mathscr{R}(A)}$ 是 Ω 的凸紧子集．显然，$A\overline{\mathrm{cov}\,\mathscr{R}(A)}\subset A\Omega\subset\overline{\mathrm{cov}\,\mathscr{R}(A)}$．因此，$A$ 可视为凸紧集 $\overline{\mathrm{cov}\,\mathscr{R}(A)}$ 到自身的连续映射．由定理 10，A 在 $\overline{\mathrm{cov}\,\mathscr{R}(A)}$ 上必有不动点．证毕．

下面给出定理 10 的一个应用．

定理 11 设 $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 是 $[a,b]$ 到 E^n 的连续映射．又设 $\psi(y,t)=(\psi_1(y,t),\cdots,\psi_n(y,t))$ 是集 D：$y\in E^n$，$\|y-y_0\|<\delta$，$t\in[a,b]$，到 E^n 的映射，对给定的 y，$\psi_i(y,t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 $[a,b]$ 上 t 的Lebesgue可测函数，对每个 $t\in[a,b]$，$\psi(y,t)$ 是 y 的连续映射，并且关于 $t\in[a,b]$ 是一致的．如果 $M=\sup\limits_{(y,t)\in D}\|\psi(y,t)\|<\infty$，并且 $b-a\leqslant\dfrac{\delta}{M}$，那末，常微分方程(组)

$$\frac{dx(t)}{dt}=\psi(x(t),t) \tag{7.61}$$

必有满足初始条件 $x(a)=y_0$ 的解．

证明 作映射

$$A:x(t)\mapsto y_0+\int_a^t\psi(x(\tau),\tau)d\tau.$$

令 $C([a,b],E^n)$ 表示 $[a,b]$ 到 E^n 的连续映射全体．对每个 $x(t)\in C([a,b],E^n)$，规定

$$\|x(t)\|'=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\|x(t)\|, \tag{7.62}$$

易知 $\|\cdot\|'$ 是 $C([a,b],E^n)$ 上范数，并且 $C([a,b],E^n)$ 按 $\|\cdot\|'$ 成为 Banach 空间．在 $C([a,b],E^n)$ 上取集 Ω 是适合

$$\|x(t)-y_0\|\leqslant\delta,\ t\in[a,b] \tag{7.63}$$

[注] 读者容易证明，在定理 11 中有关 $\psi(y,t)$ 的假设下，对任何 $x(\tau)\in\Omega$（见(7.63)），积分 $\int_a^t\psi(x(\tau),\tau)d\tau$ 是存在的．

的 x 全体，易知 Ω 是 $C([a, b], E^n)$ 的凸闭集.

由于对任何 $x\in\Omega$

$$\|(Ax)(t)-y_0\|\leqslant\int_a^t\|\psi(x(\tau), \tau)\|d\tau\leqslant M(b-a)\leqslant\delta,$$

所以 A 是 Ω 到 Ω 的映射. 又如果 $\{x_n\}$ 是 Ω 中按 $\|\cdot\|'$ 收敛于 x_0 的点列，那末由 $\psi(y, t)$ 对 y 的连续性关于 t 是一致的假设

$$\|Ax_n-Ax_0\|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_0^t\|\psi(x_n(\tau),\tau)-\psi(x_0(\tau),\tau)\|d\tau\to 0(n\to\infty),$$

所以 A 是 Ω 上连续映射. 如能证明 $A\Omega$ 是 $C([a, b], E^n)$ 上紧集，那末，由定理 10，有不动点 $x\in\Omega$，显然 $x=x(t)$ 就是(7.61)的适合 $x(a)=y_0$ 的解.

现在证 $A\Omega$ 是紧集. 事实上，关于 $C[a,b]$ 上列紧性(致密性)定理——Arzela-Ascoli 定理(参见 §6 定理 5)可以毫无困难地推广到 $C([a, b], E^n)$ 上. 由此可知，只要证明 $A\Omega$ 是 $[a, b]$ 上等度连续的函数族就可以了.

对 $x\in\Omega$，显然

$$\|(Ax)(t)-(Ax)(t')\|=\left\|\int_t^{t'}\psi(x(\tau), \tau)d\tau\right\|\leqslant M|t-t'|,$$

即 $A\Omega$ 是等度连续族. 证毕.

习 题

1. 设 F 是 n 维欧几里德空间 E^n 中的有界闭集，A 是 F 到自身中的映射，并且适合如下条件：对于任何 $x, y\in F$，$x\neq y$，有

$$\rho(Ax, Ay)<\rho(x, y).$$

求证：映射 A 在 F 中存在唯一的不动点. 对于不闭的有界集，这个事实能否成立?

2. 设 X 为完备度量空间，A 是 X 上的映射，记

$$a_n=\sup_{x\neq x'}\frac{\rho(A^nx, A^nx')}{\rho(x, x')}.$$

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$，那末映射 A 有唯一的不动点.

3. 设 $a_{jk}(j, k=1, 2, \cdots, n)$ 为一组实数，适合条件

$$\sum_{j,k=1}^{n}(a_{jk}-\delta_{jk})^2<1,$$

其中 δ_{jk} 当 $j=k$ 时为 1，否则为 0. 证明代数方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

对任何一组固定的 b_1、b_2、…、b_n，必有唯一的解 x_1、x_2、…、x_n.

4. 写出并且利用不动点原理证明方程组

$$\frac{dy_\nu}{dx}=f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n), \ \nu=1, 2, \cdots, n,$$

的解的存在性与唯一性定理.

5. 在定理 3 的假设下，证明方程(6.14)的解为

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K_\lambda(s, t)f(t)dt,$$

这里 $K_\lambda(s, t)$ 为如下的连续函数：

$$K_\lambda(s, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b\cdots\int_a^b K(s, t_1)K(t_1, t_2)\cdots K(t_{n-1}, t)dt_1\cdots dt_{n-1}.$$

6. 设 $f(x)$ 为 $0<x<\infty$ 上的连续函数，用定理 4 的方法证明方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x e^{s-x}\varphi(s)ds+f(x)$$

具有唯一的连续函数解：

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{(\lambda+1)(x-s)}f(s)ds.$$

7. 设函数 $K(x, s)$ 为

$$K(x, s)=\begin{cases} x, \text{当 } 0\leqslant x\leqslant s \text{ 时}, \\ s, \text{当 } s\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

求出方程
$$\varphi(x)-\frac{1}{10}\int_0^1 K(x, s)\varphi(s)ds=1$$

的近似的连续函数解，其误差不超过 10^{-4}.

8. 证明：对于定理 2 的映射 B，自然数 n，以及 X 中任何一点 x_0，有

$$\rho(x^*, B^m x_0)\leqslant C\frac{a^{\left[\frac{m}{n}\right]}}{1-a},$$

这里，$C=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\rho(B^k x_0, B^{n+k}x_0)$，$\left[\frac{m}{n}\right]$表示 $\frac{m}{n}$ 的整数部分.

9. 设 f 是$[a, b]$上的实函数，存在正数 μ、r：$\mu<\frac{1}{r}$，$\mu\leqslant f'(x)\leqslant\frac{1}{r}$，且 $f(a)<0<f(b)$（即 $f(x)$ 在$[a, b]$中有零点）. 证明(1)映射

$$\tilde{f}: x\mapsto x-rf(x)$$

是度量空间$[a, b]$上的压缩映射；(2) x_0 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 x_0 为 $\tilde{f}$ 的

不动点；(3)给出求 $f(x)$ 根的迭代过程及误差估计。

10．在轨道力学中，常遇到下列方程：

$$\xi=\eta-e\sin\eta,$$

其中，e 例如是某卫星轨道的偏心率，η 是近地点中心角，$\xi=2\pi t/p$（p 是周期，t 是近地点时刻）。显然，对给定的 ξ，求上述方程的解 η 等价于求映射

$$f: \eta\mapsto\eta-e\sin\eta-\xi$$

的根。利用习题 9$\left(\text{取 } \mu=1-e,\ r=\dfrac{1}{1+e}\right)$，证明当 $e<1$ 时，对任何 $\xi<2\pi$，f 在 $[0, 2\pi]$ 中必有根，并给出迭代过程及误差估计。

11．用压缩映射原理，给出 $[0, T]$ 上非线性微分方程

$$\frac{dy(x)}{dx}=y^2(x)+2$$

满足 $y(0)=0$ 的解的存在性和近似解的迭代过程，并指出 T 的范围。

12．证明下面的方程必有唯一解 $x=(x_1, x_2, x_3)$：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

并给出近似解序列以及误差估计。

13．用压缩映射原理计算 $\sqrt[3]{5}$ 的近似值。

14．证明一族凸集的交集必是凸集。

15．X、Y 是两个线性空间，T 是 $X\to Y$ 的线性映射，即对任何 $x_1, x_2\in X$，$\alpha, \beta\in K$，$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2$。证明 X 上凸集 A 的象 TA 必是 Y 上的凸集。

16．设 E、F 是线性空间 X 的两个子集，$E+F$ 表示集 $\{a+b \mid a\in E, b\in F\}$。证明当 E、F 是凸集时，$E+F$ 必是凸集。

17．设 E、F 是实线性空间 X 的两个不相交的凸集。证明必存在互不相交的凸集 A、B，使得 $E\subset A$，$F\subset B$，并且 $A\cup B=X$（提示：用 Zorn 引理）。

18．证明一族下半连续函数的上确界函数必是下半连续函数。

19．在定理 11 的假设下，证明对任何 $C([a, b], E^n)$ 中满足(7.63)条件的 $x(t)$，积分 $\int_a^t \psi(x(\tau), \tau)d\tau$ 存在。

附　录

§8 拓扑线性空间简介

1. 拓扑空间

我们在前面几节中，利用距离引进了收敛以及开集、闭集、紧集等概念，从而建立了度量空间上的极限论，它概括了分析数学中许多具体场合出现的种种不同的极限概念。但是，分析数学中还有一些极限概念并不能用距离来描述。例如函数列处处收敛的概念就是如此。

例 1 设 X 是一个集，$F(X)$ 表示 X 上的函数全体。又设 $\{f_n\}\subset F(X)$，$f\in F(X)$。如果对一切 $x\in X$，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

那末称函数列 $\{f_n\}$ 在 X 上处处收敛于 f。当 X 是有限集或可列集时，这种收敛概念可以纳入度量空间中收敛的范畴。例如，设 $X=\{x_n|n=1,2,\cdots\}$。当 $f,g\in F(X)$ 时，规定

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{1+|f(x_n)-g(x_n)|},$$

那末 $(F(X),\rho)$ 是一个度量空间，而且 $\{f_n\}$ 在 X 上处处收敛于 f 就等价于

$$\rho(f_n,f)\to 0.$$

然而，当 X 是一个不可列集时，就无法定义 $F(X)$ 中的距离 $\rho(f,g)$，使得 $\{f_n\}$ 在 X 上处处收敛于 f 等价于 $\rho(f_n,f)\to 0$。例如，设 $D(x)$ 是 $[0,1]$ 上 Dirichlet 函数，$\{r_i\}$ 是 $[0,1]$ 上有理点全体，显然，$D(x)$ 是 $\{\varphi_n(x)\}$ 处处收敛的极限，其中

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x=r_1,\cdots,r_n \text{ 时},\\ 0, \text{当 } x\neq r_1,\cdots,r_n \text{ 时},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

又显然，对每个 n，$\varphi_n(x)$ 是某一列非负实连续函数 $\{f_{n,k}(x)\}$ 的极限(读者易于作出这样的函数列 $\{f_{n,k}(x)\}$)。如果 $[0,1]$ 上函数列处处收敛能用距离收敛来描述，那末由 §1 习题 7，在 $\{f_{n,k}(x),n=1,2,\cdots,k=1,2,\cdots\}$ 必有某个子序列，记为 $\{f_n(x)\}$，$\{f_n(x)\}$ 处处收敛于 $D(x)$。我们证明这是不可能的。事实上，如果 $\{f_n(x)\}$ 处处收敛于 $D(x)$，记 $E=[0,1]$，那末

$$E(D=0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}E\left(f_m\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

因为 $E\left(f_m\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 是闭集，因而 $F_n=\bigcap_{m=n}^{\infty}E\left(f_m\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 也是闭集。显然，F_n

是疏朗的(如果不疏朗，它必包含$[0, 1]$中某个区间(α, β)，$\alpha\neq\beta$，从而$E(D=0)$也包含(α, β)，这不可能)，从而$[0, 1]$上无理点全体$E(D=0)$可以表示成可列个疏朗闭集的和，根据第一章§ 4 习题 22，这是不可能的.

因此，我们现在需要沿别的途径来建立比度量空间更为一般的极限理论. 在§ 4 中，我们知道点列收敛的概念可以不用距离来描述而用环境来描述，而环境是用开集来定义的，因此，如果我们在一个空间中用某种方法来规定其中某些集为开集，这样就可以利用开集来定义环境，再利用环境来定义收敛点列的极限等. 根据§ 4，开集应该满足定理 2 中的三个条件，我们就利用这三个条件来作为规定开集的三条公理.

定义 设S是非空的集，$\mathfrak{G}$是S的某些子集组成的一个集类. 如果它满足条件：

(O1) 空集ϕ与全空间S在$\mathfrak{G}$中；

(O2) $\mathfrak{G}$中任意个集的和集在$\mathfrak{G}$中；

(O3) $\mathfrak{G}$中任意两个集的通集在$\mathfrak{G}$中；

那末我们称$\mathfrak{G}$为空间S中的一个**拓扑**(结构)，而称$(S, \mathfrak{G})$为一**拓扑空间**，有时简写$(S, \mathfrak{G})$为S. $\mathfrak{G}$中的集称为S的**开集**，空间S中的元素称为点. 如果开集U含有点x，称U为点x的**环境**(或邻域). 任何开集$O\in\mathfrak{G}$的余集$S-O$称为**闭集**.

如果$(S, \mathfrak{G})$又满足如下的条件：

对任何两个$x, y\in S$，当$x\neq y$时，必然分别有x、y的环境U和V，使得

$$U\cap V=\emptyset,$$

那末称$(S, \mathfrak{G})$是 **Hausdorff 空间**.

在度量空间中，我们总是把按§ 4 的方法定义的开集全体作为拓扑(称为**由距离导出的拓扑**). 因此度量空间自然地成为一个拓扑空间，而且是 Hausdorff 空间. 例如，E^n是欧几里德空间，按欧几里德距离导出的拓扑$\mathfrak{G}_e$称做欧几里德拓扑，$(E^n, \mathfrak{G}_e)$称为**欧几里德拓扑空间**.

例 2 设S是非空集. 令$\mathfrak{G}$是S的子集全体，显然这时$\mathfrak{G}$成为一个拓扑，称做**离散拓扑**. 离散拓扑空间是 Hausdorff 空间. 如果我们取

$$\mathfrak{G}=\{\phi, S\},$$

这时$\mathfrak{G}$也成为一个拓扑，称它为**平凡拓扑**. 当S中不止含有一点时，S按照平凡拓扑不是 Hausdorff 空间.

一般说来，除了特殊的一些拓扑外，要直接给出一个空间中的拓扑有时是比较费事的. 例如在度量空间中我们是先给出每点的一种特殊的α-环境，然后再定义一般环境以及开集. 因此，有时我们也要利用在一点的一族特殊的环境来定义开集.

定义　设$(S, \mathfrak{S})$是一个拓扑空间，$x\in S$．又设$\mathscr{U}(x)$是x点的某些环境所成的环境族，如果对x点的任何环境V，必有$U\in\mathscr{U}(x)$，使得$U\subset V$，那末称$\mathscr{U}(x)$是拓扑$\mathfrak{S}$在x点的环境基．

例如，当X是一个度量空间，$x\in X$，取$\mathscr{U}(x)=\{O(x, r)\,|\,r$是正数$\}$，那末它就是在$x$点的环境基．

引理1　设$(S, \mathfrak{S})$是拓扑空间，$\mathscr{U}(x)$是在x点的环境基，那末它必然满足条件：

(N1)　每个$U\in\mathscr{U}(x)$含有点x；

(N2)　对任何$U_1, U_2\in\mathscr{U}(x)$，必有$U\in\mathscr{U}(x)$，使得$U\subset U_1\cap U_2$；

(N3)　设$U\in\mathscr{U}(x)$，而且$y\in U$，必有$V\in\mathscr{U}(y)$，使得$V\subset U$．

证明　由环境的定义得到(N1)．当$U_1, U_2\in\mathscr{U}(x)$时，$U_1\cap U_2$也是开集而且也含有$x$，因此，它是$x$点的环境．由$\mathscr{U}(x)$是环境基的定义，有$U\in\mathscr{U}(x)$，使得$U\subset U_1\cap U_2$，所以满足(N2)．今证(N3)：设$U\in\mathscr{U}(x)$，那末$U$是开集．如果$y\in U$，那末$U$是$y$的环境，由于$\mathscr{U}(y)$是$y$的环境基，有$V\in\mathscr{U}(y)$，使$V\subset U$．证毕．

上述三个条件不但是集族成为环境基的必要条件，而且也是充分条件：

引理2　设S是一个集，如果对每点$x\in S$，都有S的子集族$\mathscr{U}(x)$满足(引理1中的)条件(N1)、(N2)、(N3)，那末必有S上的唯一的拓扑$\mathfrak{S}$，使得$\mathscr{U}(x)$成为$\mathfrak{S}$在x点的环境基．

证明　我们利用$\mathscr{U}(x), x\in S$定义$\mathfrak{S}$如下：任意取S中若干点(允许重复取)$\{x_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$，并且对每点$x_\lambda$，任意取$\mathscr{U}(x_\lambda)$中的一个集$U_\lambda$，作$S$的子集

$$U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda. \tag{8.1}$$

由$\mathscr{U}(x), x\in S$，造出的这种类型的集U的全体，再加上空集ϕ，记为$\mathfrak{S}$．现在证明它满足拓扑的三个条件．

对每个$x\in S$，取一个$U_x\in\mathscr{U}(x)$，由$\mathscr{U}(x)$的(引理1中)条件(N1)可知，$S=\bigcup\limits_x U_x\in\mathfrak{S}$，所以$\mathfrak{S}$满足条件(O1)．条件(O2)是显然被满足的，今证(O3)：设$W_1, W_2\in\mathfrak{S}$，任取

$$y\in W=W_1\cap W_2,$$

由于$y\in W_\nu(\nu=1, 2)$，必有$U_\nu\in\mathscr{U}(x_\nu)$，使得$y\in U_\nu\subset W_\nu$．由条件(N3)，必有$V_\nu\in\mathscr{U}(y)$，使得$V_\nu\subset U_\nu$．由于$V_1, V_2\in\mathscr{U}(y)$，由条件(N2)，存在$V_y\in\mathscr{U}(y)$，使得

$$y\in V_y\subset\bigcap_{\nu=1}^{2}V_\nu\subset\bigcap_{\nu=1}^{2}U_\nu\subset W,$$

因此

$$W=\bigcup_{y\in W}V_y,$$

这样一来，$W\in\mathfrak{G}$。所以，$\mathfrak{G}$ 成为拓扑。

还要证明 $\mathscr{U}(x)(x\in S)$ 是这样造出来的 $\mathfrak{G}$ 的环境基。首先，对每个 $U\in\mathscr{U}(x)$，我们取点族 $\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 为单点 $\{x\}$，在 $\mathscr{U}(x)$ 中就取 U，由(8.1)知道 $U\in\mathfrak{G}$。再由条件($N1$)，$\mathscr{U}(x)$ 确实是拓扑 $\mathfrak{G}$ 在 x 点的一族环境。任取 $\mathfrak{G}$ 在 x 点的一个环境 O，由于 $O\in\mathfrak{G}$，根据(8.1)，必有某个 $y\in S$，$U\in\mathscr{U}(y)$，使得 $x\in U\subset O$。因此，由条件($N3$)，有 $V\in\mathscr{U}(x)$，使得 $V\subset U\subset O$，所以 $\mathscr{U}(x)$ 是 x 的环境基。

我们再证拓扑的唯一性：如果有另一个拓扑 $\mathfrak{G}'$，由于 $\mathscr{U}(x)\subset\mathfrak{G}'$，所以 $\mathfrak{G}$ 中任一个 $U=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathfrak{G}'$。反过来，如果 U' 是 $\mathfrak{G}'$ 中任何一个元素，对任何 $x\in U'$，必有 $O(x)\subset U'$，$O(x)\in\mathscr{U}(x)$，因而 $U'=\bigcup\limits_{O(x)\subset U'}O(x)\in\mathfrak{G}$，所以 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}'$。证毕。

定义 称引理 2 中的拓扑 $\mathfrak{G}$ 为 $\mathscr{U}(x)(x\in S)$ **导出的拓扑**。

如果我们要给出拓扑，根据引理 2，只要给出满足条件($N1\sim N3$)的集族 $\mathscr{U}(x)(x\in S)$ 就行了。

例 3 我们考察例 1 中的集 $F(X)$ 中任何一个子集 S。对每个 $f\in S$，每个正数 a 和任意有限个 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$，定义

$$U(f;x_1,\cdots,x_n;a)=\{g|g\in S,\ |g(x_\nu)-f(x_\nu)|<a,\ \nu=1,\cdots,n\}.$$

我们又令 $\mathscr{U}(f)=\{U(f;x_1,\cdots,x_n;a)|n$ 为自然数，$x_\nu\in X$，$a>0\}$，那末 $\mathscr{U}(f)$，$f\in S$ 满足条件($N1$)、($N2$)、($N3$)。由引理 2，它导出唯一的拓扑 $\mathfrak{G}$，使 $\mathscr{U}(f)(f\in S)$ 是环境基。从而，$(S,\mathfrak{G})$ 是拓扑空间。

我们仿照度量空间的情况，一样地引入点列收敛的概念。

定义 设 $(S,\mathfrak{G})$ 是一个拓扑空间，$\{x_n\}$ 是 S 中的点列，$x\in S$。如果对于 x 的任何环境 O，有自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$x_n\in O$，那末称 x_n（按拓扑 $\mathfrak{G}$）**收敛于** x。记为 $x_n\xrightarrow{\mathfrak{G}}x$ 或 $x_n\to x$。

我们来证明这时在例 3 中的函数列 $\{f_n\}\subset S$ 处处收敛于 f 的充要条件是 $f_n\xrightarrow{\mathfrak{G}}f$。

先证充分性：设 $f_n\xrightarrow{\mathfrak{G}}f$，对任何 $x\in X$，任何正数 ε，由于 $U(f;x;\varepsilon)$ 是 f 的环境，这时必有自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$f_n\in U(f;x;\varepsilon)$，即是 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，因此 $\{f_n(x)\}$ 处处收敛于 f。反过来，如果 $\{f_n\}$ 处处收敛于 f，对于 f 的任何环境 O，必有 $x_1,\cdots,x_n\in X$，$a>0$，使 $U(f;x_1,\cdots,x_n;a)\subset O$。由于 $\{f_n\}$ 处处收敛于 f，对每个 x_ν，必有自然数 N_ν，使得当 $n\geqslant N_\nu$ 时，$|f_n(x_\nu)-f(x_\nu)|<\varepsilon$，因此只要取 $N=\max(N_1,\cdots,N_n)$，那末，当 $n\geqslant N$ 时，

$$f_n\in U(f;x_1,\cdots,x_n;a)\subset O.$$

证毕.

定义 设$(S, \mathfrak{G})$是拓扑空间.如果S的每点x都存在一个环境基$\mathfrak{V}(x)$, $\mathfrak{V}(x)$是可列集,那末称$(S, \mathfrak{G})$是满足第一可列公理的.

显然,度量空间(X, ρ)是满足第一可列公理的. 因为$\mathfrak{V}(x)=\{O(x, r)\mid r$为正有理数$\}$就是$x$点的可列的环境基. 可以证明:如果例3中的$S$取为$F(x)$,当$X$是不可列集时,它不满足第一可列公理. 事实上,假如满足第一可列公理,对$f\equiv 0$,就有可列环境基$\{u_n(0)\mid n=1, 2, \cdots\}$. 记$u_n(0)=U(0; x_1^{(n)}, \cdots, x_{m_n}^{(n)}; a_n)$,显然$A_0=\{x_i^{(n)}\mid i=1, 2, \cdots, m_n, n=1, 2, \cdots\}$是可列集. 由于$X$不可列,因而$X-A_0$不空. 任取$x_0\in X-A_0$以及数$a>0$. 考察$f\equiv 0$的环境$U(0; x_0; a)$. 显然,函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}a+1, & \text{当 } x=x_0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\in X-\{x_0\} \text{ 时},\end{cases}$$

属于$u_n(0)$, $n=1, 2, \cdots$. 但是$\varphi(x)\,\overline{\in}\,U(0; x_0; a)$. 因而对任何$n$, $u_n(0)\not\subset U(0; x_0; a)$. 这就与假设$\{u_n(0)\}$是环境基相矛盾. 所以在例3中,当$S$取为$F(X)$,而$X$是不可列集时,拓扑空间$X$不满足第一可列公理.

可以仿照§4定理5,证明下面的结论:

引理3 设$(S, \mathfrak{G})$是拓扑空间,$A\subset S$. 如果A是闭集,那末A中任何收敛点列必收敛于A中一点. 设$(S, \mathfrak{G})$又是满足第一可列公理的,那末当A中任何收敛点列必收敛于A中的一点时,A是闭集.

因此,在满足第一可列公理的拓扑空间中,能够用收敛点列的极限来描述闭集,也就是描述拓扑. 但是我们注意,引理3中$(S, \mathfrak{G})$满足第一可列公理的条件不可除去.

例4 设$\mathbf{R}$是实数直线,但其中规定拓扑如下: 令$\mathfrak{G}=\{\mathbf{R}-B\mid B$或是$\mathbf{R}$中的任一有限子集,或可列子集,或空集,或$\mathbf{R}\}$.这时,容易看出$(\mathbf{R}, \mathfrak{G})$中没有一个收敛点列. 因此,任取$(\mathbf{R}, \mathfrak{G})$中一个不闭的集$A$,例如$A=[0, \infty)$,它满足这样的条件:“$A$中任何收敛点列必收敛于$A$中一点”(因为$A$中根本就没有收敛点列). 但是,$A$不是闭集.

所以在不满足第一可列公理的空间中,不能由收敛点列来描述拓扑. 需要把点列的概念推广如下:

定义 设Λ是一个半序集,而且对任何$\lambda_1, \lambda_2\in\Lambda$,有$\lambda\in\Lambda$,使得$\lambda_1\prec\lambda$, $\lambda_2\prec\lambda$,那末称Λ是定向半序集.

S是一空间,设Λ是一个定向半序集,$\lambda\mapsto x_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$是Λ到S的一个映射,称$\{x_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$为半序点列或定向点列.

显然,当N是自然数全体按自然顺序所成的全序集时,通常点列$\{x_n\mid n\in N\}$就是一种特殊的半序点列.

例 5 设$(S, \mathfrak{G})$是一个拓扑空间，$x \in S$，$\mathscr{U}(x)$是x点的一个环境基，我们在$\mathscr{U}(x)$中规定：当$U \subset V$时，$V \succ U$，那末这个顺序称为逆包含顺序。显然，$\mathscr{U}(x)$按逆包含顺序成为定向半序集。对每个$U \in \mathscr{U}(x)$，任取$x_U \in U$，那末$\{x_U | U \in \mathscr{U}(x)\}$就是一个半序点列。

我们现在把点列收敛的概念推广到半序点列。

定义 设$(S, \mathfrak{G})$是拓扑空间，$\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$是$S$中半序点列，$x_0 \in S$。如果对$x_0$的每个环境$O$，必有$\Lambda$中指标$\lambda_0$，使得当$\lambda_0 \prec \lambda$时

$$x_\lambda \in O,$$

那末称半序点列$\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$收敛于$x_0$，记为$x_\lambda \xrightarrow{\mathfrak{G}} x_0$，或者$x_\lambda \to x_0$。

容易看出，Hausdorff 空间中任何一个收敛的半序点列必然只收敛于一点。

例 6 容易看出：例 5 中的半序点列$x_U \xrightarrow{\mathfrak{G}} x$。

利用半序点列就可以描述闭集，因此也就可以描述拓扑了。

引理 4 设$(S, \mathfrak{G})$是一个拓扑空间，$A \subset S$，那末A成为闭集的充要条件是A中任一收敛半序点列必收敛于A中的一点。

证明 必要性 设A是闭集，$\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$是$A$中的半序点列，$x_\lambda \to x$。如果$x \overline{\in} A$，那末$S - A$是$x$的环境，由于$x_\lambda \to x$，必存在$\lambda_0$，当$\lambda \succ \lambda_0$时，$x_\lambda \in S - A$，这和$x_\lambda \in A$相矛盾，所以$x \in A$。

充分性 设A中每个收敛的半序点列$\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$必收敛于$A$中一点。今证$S - A$是开集。不然的话，必有$x \in S - A$，而且对$x$的环境基$\mathscr{U}(x)$中每个环境$U$，必有$x_U \in A$，因此，半序点列$\{x_U | U \in \mathscr{U}(x)\}$是收敛于$x$的，但是$x \overline{\in} A$，这和假设冲突。因此$A$是闭集。证毕。

当然，在拓扑空间中也可引入集的极限点、闭包、核、境界、以及联络等等。和一般的度量空间一样，成立着和§4定理 4～定理 12 相似的定理（不过要将§4定理 4～定理 12 中点列收敛换成现在的半序点列收敛）。这里不想复述。

定义 设S是一个集，$\mathfrak{G}_\nu (\nu = 1, 2)$是$S$中的两个拓扑，如果$\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2$，就称拓扑$\mathfrak{G}_1$弱于$\mathfrak{G}_2$，或$\mathfrak{G}_2$强于$\mathfrak{G}_1$。

注意，这里$\mathfrak{G}_1$弱于$\mathfrak{G}_2$，包括$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$的情况。

显然，任何拓扑弱于离散拓扑，强于平凡拓扑（见例 2）。

引理 5 设S是一集，$\mathfrak{G}_\nu (\nu = 1, 2)$是$S$上两个拓扑，$\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2$。设$\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$是$S$中的半序点列，$x_0 \in S$。如果$x_\lambda \xrightarrow{\mathfrak{G}_2} x_0$，那末$x_\lambda \xrightarrow{\mathfrak{G}_1} x_0$。

换句话说，半序点列如果按强拓扑收敛，必然按弱拓扑也收敛于同一点。

证明 因为对x_0的每个环境$O \in \mathfrak{G}_1$，自然有$O \in \mathfrak{G}_2$，由半序点列收敛的

定义立即可以得到引理5. 证毕.

例如在集 S 中一个点列 $\{x_n\}$，如按离散拓扑收敛于 x_0，那末当 n 充分大后，$x_n=x_0$，因此按任何别的拓扑都有 $x_n\to x_0$. 又 S 中任何半序点列 $\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 总按平凡拓扑收敛于 S 中每一点.

又如，X 上有界函数全体 $B(X)$ 按距离

$$\rho(f,\ g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

所决定的拓扑强于例3中所定义的处处收敛的拓扑.

我们现在把度量空间中的列紧集推广到拓扑空间.

定义　设 $(S,\ \mathfrak{G})$ 是一个拓扑空间，$A\subset S$，如果 A 中的任何一个点列 $\{x_n\}$ 必有收敛子点列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 A 中的一点，那末我们就称 A 是**列紧的**.

下面我们再把度量空间中的有限覆盖性质加以抽象化，引入如下的概念：

设 S 是一个集，$A\subset S$，$\{O_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 S 的一族子集. 如果 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\supset A$，就称 $\{O_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 A 的一族覆盖. 如果 S 又是拓扑空间，$\{O_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 又都是开集，那末称它是一族**开覆盖**.

定义　设 $(S,\ \mathfrak{G})$ 是拓扑空间，$A\subset S$. 如果 A 的任何一族开覆盖 $\{O_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 中必可挑出有限个 $\{O_{\lambda_1},\ \cdots,\ O_{\lambda_n}\}$ 来覆盖 A，那末称 A 是一个**紧集**.

显然，在离散拓扑空间 $(S,\ \mathfrak{G})$ 中，只有 S 的有限子集才是紧集. 当 $(S,\ \mathfrak{G})$ 是平凡的拓扑空间时，S 的每个子集都是紧集.

我们又可以把§4的连续映射概念推广到拓扑空间中来.

定义　设 $(S_\nu,\ \mathfrak{G}_\nu)(\nu=1,\ 2)$ 是两个拓扑空间，$A\subset S_1$，f 是 $A\to S_2$ 的映射，又设 $x_0\in A$. 如果对于 $f(x_0)$ 在 $\mathfrak{G}_2$ 中的每个环境 $O(f(x_0))$，必有 x_0 在 $\mathfrak{G}_1$ 中的环境 $O(x_0)$，使得

$$f(O(x_0)\cap A)\subset O(f(x_0)),$$

那末称 f 在 x_0 点**连续**. 如果 f 在 A 上每点都是连续的，那末称 f 是**连续映射**.

显然，f 是连续映射的充要条件是对每个 $O\in\mathfrak{G}_2$，

$$f^{-1}(O)=\{x|x\in A,\ f(x)\in O\}\in\mathfrak{G}_1.$$

如果 S_1 上另有拓扑 $\mathfrak{G}_1'$，它强于 $\mathfrak{G}_1$，那末 $(S_1,\ \mathfrak{G}_1)$ 到 $(S_2,\ \mathfrak{G}_2)$ 的连续映射 f，必也是 $(S_1,\ \mathfrak{G}_1')$ 到 $(S_2,\ \mathfrak{G}_2)$ 的连续映射.

例如，当 $\mathfrak{G}_\nu(\nu=1,\ 2)$ 是 S 上的两个拓扑时，恒等映射

$$I:x\mapsto x,\ x\in S,$$

作为 $(S,\ \mathfrak{G}_2)$ 到 $(S,\ \mathfrak{G}_1)$ 的映射成为连续映射的充要条件是 $\mathfrak{G}_1\subset\mathfrak{G}_2$.

定义　设 f 是 $(S_1,\ \mathfrak{G}_1)$ 到 $(S_2,\ \mathfrak{G}_2)$ 的单射. 如果 f 以及它的逆映射 f^{-1}

都是连续的，那末称 f 是**拓扑映射**.

当 f 是 $S_1\to S_2$ 的双射时，显然 f 成为拓扑映射的充要条件是 $\mathfrak{G}_2=\{f(O)|O\in\mathfrak{G}_1\}$.

现在我们进一步定义乘积拓扑空间.

定义 设 $(S_\nu,\ \mathfrak{G}_\nu)(\nu=1,\ 2)$ 是两个拓扑空间. 令 $S=S_1\times S_2$，我们作

$$\mathfrak{G}=\{\bigcup_{\lambda_1,\lambda_2} O_{\lambda_1}\times O_{\lambda_2}|O_{\lambda_j}\in\mathfrak{G}_j,\ j=1,2\}$$

(显然，上述 $\mathfrak{G}$ 确实为拓扑)，称 $(S,\ \mathfrak{G})$ 是 $(S_1,\ \mathfrak{G}_1)$ 和 $(S_2,\ \mathfrak{G}_2)$ 的**乘积拓扑空间**，记为 $(S_1,\ \mathfrak{G}_1)\times(S_2,\ \mathfrak{G}_2)$.

乘积拓扑空间的概念可以推广到任意个拓扑空间的乘积的情况.

设 $\{(S_\lambda,\ \mathfrak{G}_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ 是一族拓扑空间，在乘积空间 $S=\underset{\lambda\in\Lambda}{\times}S_\lambda$ 上引入拓扑

$$\mathfrak{G}=\{\bigcup_{\lambda_1,\cdots\lambda_n,} O_{\lambda_1}\times O_{\lambda_2}\times\cdots\times O_{\lambda_n}|O_{\lambda_i}\in\mathfrak{G}_{\lambda_i},\ \lambda_i\in\Lambda,\ i=1,\ 2,\cdots,\ n,\ n=1,\ 2,\cdots\}.$$

称 $(S,\ \mathfrak{G})$ 是 $\{(S_\lambda,\ \mathfrak{G}_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ 的**乘积拓扑空间**.

例如，欧几里德拓扑空间 $(E^n,\ \mathfrak{G}^n)$ 与 $(E^m,\ \mathfrak{G}^m)$ 的拓扑积，就是欧几里德拓扑空间 $(E^{n+m},\ \mathfrak{G}^{n+m})$.

定理 1(Тихонов) 如果 $\{(S_\lambda,\ \mathfrak{G}_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ 是一族紧拓扑空间，那末它们的乘积拓扑空间 $(S,\ \mathfrak{G})$ 也是紧拓扑空间.

2. 拓扑线性空间

比赋范线性空间更为广泛的是拓扑线性空间.

定义 设 $(X,\ \rho)$ 是一个度量空间，X 又是线性空间. 如果 X 中的线性运算是连续的，就是说：(a) 加法运算是连续的，即如果 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\subset X$，$x_n\to x$，$y_n\to y$，那末 $x_n+y_n\to x+y$；(b) 数乘运算是连续的，即如果 $\{a_n\}\subset\Lambda$，$a_n\to a$，$\{x_n\}\subset X$，$x_n\to x$，那末 $a_nx_n\to ax$. 这时，我们就说 $(X,\ \rho)$ 是一个**度量线性空间**.

例 7 赋准范线性空间就是度量线性空间.

定义 设 X 是数域 Λ 上线性空间，又设 $(X,\ \mathfrak{G})$ 是一个拓扑空间. 它满足如下的条件：

(i) $(X,\ \mathfrak{G})$ 是 Hausdorff 空间；

(ii) X 中的线性运算是连续的：(a) 加法运算 $(x,\ y)\mapsto x+y$ 作为

$$(X,\ \mathfrak{G})\times(X,\ \mathfrak{G})\to(X,\ \mathfrak{G})$$

的映射是连续的，而且 (b) 数乘运算 $(a,\ x)\mapsto ax$ 作为

$$(\Lambda,\ \mathfrak{G}^1)\times(X,\ \mathfrak{G})\to(X,\ \mathfrak{G})$$

的映射也是连续的，其中 $\mathfrak{G}^1$ 是 $\mathfrak{G}$ 上的拓扑，即欧几里德拓扑，那末称 $(X,\mathfrak{G})$ 是**拓扑线性空间**(或**拓扑向量空间**).

显然，如果(X, ρ)是一个度量线性空间，在X中按距离ρ引入拓扑$\mathfrak{T}$，那末$(X, \mathfrak{G})$成为拓扑线性空间.

在拓扑线性空间$(X, \mathfrak{G})$中，如果$\mathscr{U}(0)$是0点的环境基，那末$x+\mathscr{U}(0)=\{x+A \mid A\in\mathscr{U}(0)\}$便是点$x$的环境基.

和赋准范空间情况相仿地可以证明（当然要把点列换成半序点列，环境$O(x, \varepsilon)$换成x的一般的环境）如下一些基本事实.

定理2 (1) 拓扑线性空间中任何有限维子空间必拓扑线性同构于同维数的E^n. 从而有限维空间是闭的.

(2) L是拓扑线性空间X的闭线性子空间，E是有限维子空间，那末$E+L$是闭线性子空间.

在分析数学中最常用的是下面的一类拓扑线性空间.

定义 设X是线性空间，$\{p_\alpha(x), \mid \alpha\in\Lambda\}$是$X$上的一族拟范数，如果它们再满足条件：对每个$x\in X$，当$x\neq 0$时，必有$\alpha\in\Lambda$，使得$p_\alpha(x)\neq 0$，那末称$X$按$\{p_\alpha, \mid \alpha\in\Lambda\}$成为赋一族拟范线性空间.

特别，当Λ是可列集时，称X是赋可列拟范空间.

例8 设$[a, b]$是一有限区间，$C^\infty[a, b]$是$[a, b]$上无限次可微的函数全体所成的线性空间，我们在$C^\infty[a, b]$上引入一列拟范数

$$\|x\|_n=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(n)}(t)|, \quad x\in C^\infty[a, b], \quad n=1, 2, \cdots.$$

这样$C^\infty[a, b]$按$\{\|\cdot\|_n; n=1, 2, \cdots\}$成为赋可列拟范空间.

例9 设X是任一集，$R(X)$是X上的有限实函数全体所成的线性空间，在$R(X)$上定义一族拟范数$\{p_x(\cdot), \mid x\in X\}$如下：$p_x(f)=|f(x)|$，$f\in R(X)$. 那末$R(X)$按$\{p_x(f), \mid x\in X\}$成为赋一族拟范线性空间.

对赋一族拟范线性空间X，如果$\{p_\alpha, \mid \alpha\in\Lambda\}$是它的拟范数族，我们引进类似于例3的一族环境基如下：当$x\in X$时，任取有限个$\alpha_1, \cdots, \alpha_n\in\Lambda$，任取正数$\varepsilon$，作

$$U(x; \alpha_1, \cdots, \alpha_n; \varepsilon)=\{y \mid p_{\alpha_\nu}(y-x)<\varepsilon, \ \alpha_\nu\in\Lambda, \ \nu=1, 2, \cdots, n\}. \tag{8.2}$$

对于每个$x\in X$，记

$$\mathfrak{U}(x)=\{U(x; \alpha_1, \cdots, \alpha_n; \varepsilon) \mid n \text{为自然数}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\in\Lambda, \ \varepsilon>0\},$$

那末容易验证它满足引理1中的条件(N1)、(N2)、(N3). 由引理2，它导出唯一的拓扑，称它是由拟范数族$\{p_\alpha, \mid \alpha\in\Lambda\}$导出的拓扑，容易证明$X$按这个拓扑成为拓扑线性空间. 此后，对赋一族拟范线性空间总是这样地引入拓扑. 这样得到的拓扑线性空间又叫做局部凸的拓扑线性空间（因为由(8.2)定义的$U(x; \alpha_1, \cdots, \alpha_n; \varepsilon)$是包含点$x$的凸集）.

显然，拓扑线性空间成为局部凸的充要条件是存在0点的一族均衡凸

吸收的环境基，并且这族环境基的交仅含0点.

§7中的不动点定理可以推广到局部凸的拓扑线性空间的情况.

定理7(Schauder-Тихонов) 设X是一个局部凸的拓扑线性空间，A是X中的凸紧集. 又设f是$A\to A$中的一个连续映射，那末，必有$p\in A$，使得$f(p)=p$.

关于这个定理的证明参见[15].

第五章 线性算子

§1 线性算子

1. 线性算子与线性泛函

算子概念(参见第一章§2)起源于运算. 例如代数运算、求导运算、求不定积分和定积分、把平面上的向量绕坐标原点旋转一个角度等等. 有时就泛称映射为算子. 而取值于实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 的算子也称为泛函数, 简称为泛函. 本书中着重考察线性空间上的线性算子, 这是线性泛函分析的主要研究对象之一.

定义 设 $\mathbb{A}$ 是实数或复数域, X 及 Y 是域 $\mathbb{A}$ 上的两个线性空间, D 是 X 的线性子空间, T 是 D 到 Y 中的一个映射, 对 $x\in D$, 记 x 经过 T 映射后的象为 Tx 或者 $T(x)$[注]. 如果对任何 x, $y\in D$ 及数 α, $\beta\in\mathbb{A}$, 成立着

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$

就称 T 是线性算子, 称 D 是 T 的定义域, 也记为 $\mathscr{D}(T)$, 而称集

$$TD=\{Tx\,|\,x\in D\}$$

是 T 的值域(或象域), 记为 $\mathscr{R}(T)$. 取值为实数或复数的线性算子 T(即 $\mathscr{R}(T)\subset\mathbb{A}$)分别称做实的或复的线性泛函, 统称为线性泛函.

下面举一些例子.

例1 设 X 是 n 维(实系数或复系数)向量空间, 在 X 中取一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 相应于任意一个 $n\times n$ 阵$(t_{\mu\nu})$, 作 $X\to X$ 的算子 T 如下: 当 $x=\sum\limits_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$ 时,

$$y=Tx=\sum_{\mu=1}^{n}y_\mu e_\mu,$$

[注] 对泛函, 较多用 $T(x)$; 对一般的算子, 较多用 Tx.

而 $y_\mu=\sum\limits_{\nu=1}^{n}t_{\mu\nu}x_\nu$, $\mu=1, 2, \cdots, n$. 显然，这样定义的 T 是一个线性算子，这个算子在线性代数中称为线性变换. 在基 $\{e_i\}$ 下，算子 T 显然由阵 $(t_{\mu\nu})$ 唯一确定，有时就直接记为 $T=(t_{\mu\nu})$.

反过来，设 T 是 $X\to X$ 的任何一个线性算子，由于 Te_ν 是 e_1、e_2、…、e_n 的线性组合，所以必有阵 $(t_{\mu\nu})$，使得

$$Te_\nu=t_{1\nu}e_1+\cdots+t_{n\nu}e_n, \quad \nu=1, 2, \cdots, n. \tag{1.1}$$

因此，当 $x=\sum\limits_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$ 时，由 T 的线性可得

$$Tx=\sum_{\mu=1}^{n}y_\mu e_\mu,$$

而这里的 $y_\mu=\sum\limits_{\nu=1}^{n}t_{\mu\nu}x_\nu$，即 T 是对应于阵 $(t_{\mu\nu})$ 的算子.

由此可知，在有限维线性空间上，如果将基选定后，线性算子与矩阵是相对应的.

设 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是一组数，那末当 $x=\sum\limits_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu\in X$ 时，

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu \tag{1.2}$$

必为 X 上的线性泛函. 反过来，如果 f 是 X 上的线性泛函记

$$\alpha_\nu=f(e_\nu), \quad \nu=1, 2, \cdots, n,$$

根据 f 的线性可知，f 必表示为形式(1.2). 由此可知，n 维线性空间上线性泛函与数组 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 相对应.

例 2 设 $P(t)=\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu t^\nu$ 是常系数的多项式，那末将函数 $x(t)$ 映射成 $P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)$ 的算子

$$P(D):\ x(t)\mapsto P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)$$

是 $C^k[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的线性算子.

又对于 $[a, b]$ 中任一定数 t_0，映射

$$f:\ x(t)\mapsto P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)\big|_{t=t_0}$$

是 $C^k[a, b]$ 上的线性泛函.

例 3 设 X 是线性空间,映射

$$T:\ x\mapsto \alpha x(\alpha\text{ 是定数}),\quad x\in x,$$

是 X 上的线性算子,记做 αI,称为相似算子(或称数倍单位算子). 如果 $\alpha=0$ 时,T 是零算子,记做 0; 当 $\alpha=1$ 时,称为单位算子或恒等算子(参见第一章 §2 恒等映射),记做 I.

例 4 设 (Ω, B, μ) 是测度空间,$K(s, t)$ 是 $(\Omega\times\Omega, B\times B, \mu\times\mu)$ 上可测函数,并且

$$\iint |K(s, t)|^2 d\mu(s)d\mu(t)<\infty. \tag{1.3}$$

容易知道

$$(Tx)(s)=\int_\Omega K(s, t)x(t)d\mu(t)$$

是 $L^2(\Omega, B, \mu)\to L^2(\Omega, B, \mu)$ 的线性算子. 它是线性积分方程理论中最基本的算子之一,通常称为 Hilbert-Schmidt 型积分算子.

证明 为证 $(Tx)(s)$ 是可测函数,先假设 $\mu(\Omega)<\infty$,因为 $x(t)$ 一元可测,自然 $x(t)$ 可视为 $(\Omega\times\Omega, B\times B, \mu\times\mu)$ 上可测函数,又因为 $\quad x(t)\in L^2(\Omega, B, \mu),\ \mu(\Omega)<\infty,$

所以 $\quad x(t)\in L^2(\Omega\times\Omega, B\times B, \mu\times\mu),$

由 Schwarz 不等式知道

$$K(s, t)x(t)\in L(\Omega\times\Omega, B\times B, \mu\times\mu),$$

从而由 Fubini 定理知道 $(Tx)(s)$ 是 (Ω, B, μ) 上可测函数.

对于一般的 Ω,总存在一列互不相交的可测集 $\{\Omega_n\}$,

$$\mu(\Omega_n)<\infty\quad (n=1, 2, \cdots)$$

并且 $$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n.$$

因此,对任何 k,$\sum_{n=1}^{k}\int_{\Omega_n}K(s, t)x(t)d\mu(t)$ 是可测函数,并且

$$\sum_{n=1}^{k}\left|\int_{\Omega_n} K(s,\ t)x(t)\,d\mu(t)\right|$$

$$\leqslant\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{k}\Omega_n}|K(s,\ t)x(t)|\,d\mu(t)$$

$$\leqslant\left(\int_{\Omega}|K(s,\ t)|^2 d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|x(t)|^2 d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}},$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} K(s,\ t)x(t)d\mu(t)$ 几乎处处（关于 μ）绝对收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} K(s,\ t)x(t)d\mu(t)$是可测函数. 利用积分的可列可加性，立即知道

$$(Tx)(s)=\int_{\Omega}K(s,\ t)x(t)d\mu(t)$$

$$=\lim\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{k}\Omega_n}K(s,\ t)x(t)d\mu(t),$$

所以$(Tx)(s)$是可测函数.

再由 Schwarz 不等式

$$|(Tx)(s)|^2\leqslant\int_{\Omega}|K(s,\ t)|^2 d\mu(t)\int_{\Omega}|x(t)|^2 d\mu(t),$$

并利用(1.3)，立即知道$(Tx)(s)\in L^2(\Omega,\ B,\ \mu)$. 证毕.

例 5 设 $x(t)\in L(-\infty,\ \infty)$，那末算子

$$T:\ x(t)\mapsto(Tx)(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha t}x(t)dt$$

是 $L(-\infty,\ \infty)\to C(-\infty,\ \infty)$ 中的线性算子.

特别，对任何固定的 $\alpha_0\in(-\infty,\ \infty)$，

$$f:\ x(t)\mapsto x(\alpha_0)$$

便是 $L(-\infty,\ \infty)$ 上的线性泛函.

通常在某个函数空间中，由微分运算（包括初始条件或边界条件，如例 2 中的 $P(D)$）和积分运算（如例 4、例 5 中算子）所定义的算子，分别泛称为**微分算子**和**积分算子**.

2. 线性算子的有界性与连续性

在度量空间中，已介绍过连续映射的概念. 线性算子由于具

有可加性，即 $T(x+y)=Tx+Ty$，所以关于连续性有更进一步的结果.

定理 1 设 T 是赋准范线性空间 X 到赋准范线性空间 Y 的线性算子，假如 T 在某一点 $x_0\in\mathscr{D}(T)$ 连续，那末在 $\mathscr{D}(T)$ 上处处连续.

证明 对任意一点 $x\in\mathscr{D}(T)$，设 $x_n\in\mathscr{D}(T)$，且 $x_n\to x$，于是 $x_n-x+x_0\to x_0$. 由假设 T 在 x_0 处连续，所以当 $n\to\infty$ 时，

$$T(x_n-x+x_0)=Tx_n-Tx+Tx_0\to Tx_0,$$

因此 $Tx_n\to Tx$，即 T 在 x 点是连续的.

由此可知，要验证线性算子 T 是连续的，只需验证 T 在 0 点连续就可以了.

例 6 有限维赋准范线性空间中线性算子是连续算子. 事实上，因为第四章 § 5 定理 11、12 已证明有限维赋准范线性空间中依准范数收敛等价于依 Euclid 范数收敛，或等价于按坐标收敛. 用 Euclid 空间上线性算子显然是连续的，所以有限维赋准范线性空间中一切线性算子是连续的.

定义 设 X、Y 是两个赋准范线性空间，T 是 $X\to Y$ 的线性算子，定义域为 $\mathscr{D}(T)$. 如果算子 T 将其定义域中的每个有界集映射成一个有界集，就称 T 是**有界(线性)算子**，不是有界的算子就称为**无界(线性)算子**.

赋准范线性空间中的相似算子显然是有界的.

定理 2 设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子[注]，那末下面几件事是等价的.

(1) T 是有界线性算子.

(2) 存在常数 $M\geqslant 0$，使得对一切 $x\in X$，

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|. \tag{1.4}$$

(3) T 是连续的线性算子.

证明 (1)⇒(2) 设 T 是有界的线性算子，那末 T 把单位球面

[注] 未明确指出 T 的定义域时，约定意味着 $\mathscr{D}(T)=X$，参见第一章 § 2 的映射小节.

$S=\{y\mid\|y\|=1,\ y\in X\}$ 映射成一个有界集，所以有一个常数 $M\geqslant 0$，对于 $y\in S$，有 $\|Ty\|\leqslant M$. 当 $x=0$ 时，(1.4) 自然成立. 当 $x\neq 0$ 时，作 $y=\frac{x}{\|x\|}$，那末由 $y\in S$，得到

$$\left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\|=\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant M,$$

因而(1.4)对一切 $x\in X$ 成立.

(2)⇒(3) 显然，对任何 $x_n\to 0$，由(1.4)立即可知 $Tx_n\to 0$，即 T 在 $x=0$ 点连续. 由定理 1，T 在 X 上连续.

(3)⇒(1) 如果 T 不是有界的，即存在$\{x_n\}$，$\|x_n\|=1$，$n=1, 2, \cdots$，使得 $\|Tx_n\|\geqslant n$. 令 $y_n=\frac{x_n}{n}$. 显然，$y_n\to 0$，然而

$$\|Ty_n\|=\left\|\frac{Tx_n}{n}\right\|\geqslant 1,\quad n=1, 2, \cdots.$$

这与 T 在 $y=0$ 点连续的假设相矛盾，所以 T 是有界的. 证毕.

因此，对赋范线性空间中的线性算子，以后可以用(1.4)式作为连续性或有界性的定义.

注意，当 X、Y 是赋准范线性空间时，定理 2 是不成立的，即线性算子的有界性与连续性并不等价(读者自行举出反例). 所以在赋范空间的线性算子理论中，算子有界性是重要的. 与有界性有关地，引入如下概念.

定义 设 X、Y 是两个赋范线性空间，T 是 $X\to Y$ 的有界线性算子，称

$$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

为算子 T 的范数.

由定理 2，立即得到有界线性算子的范数是有限的.

引理 设 T 是赋范线性空间 X 上的有界线性算子，那末

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|,\ (x\in X), \tag{1.4'}$$

并且

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| \tag{1.5}$$

证明　(1.4′)是显然的，今证(1.5)．事实上，从(1.4′)立即可得

$$\|T\|\geqslant\sup_{\|x\|<1}\|Tx\|\geqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|.$$

另一方面，对任何$y\neq 0$，由于$\frac{y}{\|y\|}$是范数为1的向量，因此

$$\left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|,$$

上式左边取上确界后得到$\|T\|\leqslant\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$，由此得到(1.5)．

显然，当$X=Y$，$T=I$(单位算子)时，$\|I\|=1$．

称$\|Tx\|/\|x\|$为T在x方向的伸张系数，$\|T\|$的几何意义是一切方向伸张系数的上确界．

现在举一个具体空间中具体算子范数求法的例子．

例 7　对任何$f\in L[a, b]$，作

$$(Tf)(x)=\int_a^x f(t)dt. \tag{1.6}$$

把T视为$L[a, b]\to C[a, b]$的算子时，$\|T\|=1$．

事实上，任取$f\in L[a, b]$，使$\|f\|_L$[注]$=1$，由于

$$\|Tf\|_{C[a,b]}=\max_x|(Tf)(x)|=\max_x\left|\int_a^x f(t)dt\right|$$

$$\leqslant\max_x\int_a^x|f(t)|dt\leqslant\int_a^b|f(t)|dt=1,$$

即$\|T\|\leqslant 1$．另一方面，取$f_0=\frac{1}{b-a}$，显然$\|f_0\|_L=1$，那末又有

$$\|T\|=\sup_{\|f\|=1}\|Tf\|_{C[a,b]}\geqslant\|Tf_0\|_{C[a,b]}=\max_{a<x<b}\int_a^x\frac{1}{b-a}dt$$

$$=\int_a^b\frac{1}{b-a}dt=1,$$

即$\|T\|\geqslant 1$．所以$\|T\|=1$．

如将(1.5)式所定义的算子看成$L[a, b]\to L[a,b]$的算子时，那末$\|T\|=b-a$．

事实上，任取$f\in L[a, b]$，使$\|f\|_L=1$，由于

[注]　为防止混淆，对某些范数加上下标空间以示区别．

$$\|Tf\|_L=\int_a^b\left|\int_a^x f(t)\,dt\right|dx\leqslant\int_a^b\int_a^x|f(t)|\,dt\,dx$$
$$\leqslant\int_a^b\int_a^b|f(t)|\,dt\,dx=\int_a^b 1\,dx=b-a,$$

即$\|T\|\leqslant b-a$. 另一方面,对任何使得$a+\frac{1}{n}<b$的自然数n,作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & \text{当 } x\in\left[a,\ a+\frac{1}{n}\right]\text{时},\\ 0, & \text{当 } x\in\left(a+\frac{1}{n},\ b\right]\text{时},\end{cases}$$

显然,$\|f_n\|_L=1$,而且

$$\|Tf_n\|_L=\int_a^b\left|\int_a^x f_n(t)\,dt\right|dx=\int_a^{a+\frac{1}{n}}n(x-a)\,dx+\int_{a+\frac{1}{n}}^b 1\cdot dx$$
$$=b-a-\frac{1}{2n},$$

所以又有$\|Tx\|\geqslant\sup\limits_n\|Tf_n\|_L=b-a$. 从而$\|T\|=b-a$.

例 7 告诉我们,虽然形式上是一样的算子(例如都是由(1.6)式定义的积分算子),但由于视为不同空间的映射,它们的范数未必相同.

例 8 设T为$E^n\to E^n$的线性算子,在基$\{e_i|i=1,2,\cdots,n\}$(其中$e_i=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{i},0,\cdots,0)$)下的矩阵表示为$T=(t_{\mu\nu})$,并且是对称的,即$t_{\mu\nu}=t_{\nu\mu}$. 由于对称性,根据线代数知识,必存在$E^n$上另一组单位正交基$\{e_i'|i=1,2,\cdots,n\}$,$T$在这组基下对角化,即$T=(t'_{\mu\nu})$,$t'_{\mu\nu}=\lambda_\mu\delta_{\mu\nu}$(当$\mu=\nu$时,$\delta_{\mu\nu}=1$;当$\mu\neq\nu$时,$\delta_{\mu\nu}=0$),其中$\lambda_\mu$是矩阵$(t_{\mu\nu})$(也是$(t'_{\mu\nu})$)的(实)特征值.而任何$x\in E^n$,在基$\{e_i'\}$下有唯一表示$x=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i'$,$\|x\|^2=\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^2$,而

$$Tx=\sum_{i=1}^n x_i\lambda_ie_i',\tag{1.7}$$

因而 $$\|Tx\|^2=\sum_{i=1}^n|\lambda_ix_i|^2\leqslant\max|\lambda_i|^2\|x\|^2,$$

所以
$$\|T\|\leqslant\max|\lambda_i|.$$
不妨设$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_i|$，$i=2, 3, \cdots, n$，特别取$x=e_1'$，易知
$$\|Te_1'\|\geqslant|\lambda_1|=\max_i|\lambda_i|.$$
因此$\|T\|$是对称矩阵$(t_{\mu\nu})$的特征值的绝对值中最大者.

如果$(t_{\mu\nu})$是非对称的阵，令$(t_{\nu\mu})$是$(t_{\mu\nu})$的转置矩阵，那末由线代数知识可知，$T=(t_{\mu\nu})$的范数是乘积矩阵$(t_{\nu\mu})(t_{\mu\nu})$的最大特征值(必为非负数)的平方根.

一般说来，求一个具体算子的范数并不容易. 例 8 中空间E_n算是比较简单的了，求一个线性算子的范数就需要线代数中有关的许多知识，要是把E^n换成一般的n维赋范线性空间，即便是Minkowski空间，想给出它上面一般算子的范数是很困难的，因此，在很多场合只能对范数作出估计.

显然，并非每个线性算子都是连续的. 例如X是$C[a, b]$中连续可微函数全体所成的线性子空间. 视微分算子$\frac{d}{dt}$是以X为定义域的$X\to C[a, b]$的线性算子，易知$\frac{d}{dt}$就是不连续的算子. 例如在$C[a, b]$上取$x_n(t)=e^{-n(t-a)}(n=1, 2, \cdots)$，易知对每个$n$，$\|x_n\|=1$，然而
$$\left(\frac{d}{dt}x_n\right)(t)=-ne^{-n(t-a)},$$
即
$$\left\|\left(\frac{d}{dt}x_n\right)(t)\right\|=n\to\infty\quad(n\to\infty),$$
所以$\frac{d}{dt}$不是$X\to C[a, b]$的连续的算子.

对于赋准范线性空间上的线性泛函f，我们总视f为X到数域Λ所成的赋范(即对$\alpha\in\Lambda$，规定$\|\alpha\|=|\alpha|$)线性空间的线性算子. 因此，有关泛函的有界性、连续性以及它们的关系就不再复述. 对于赋范空间X上连续线性泛函f，由于$f(x)\in\Lambda$，所以
$$\|f(x)\|=|f(x)|,$$
因而f的范数就是

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|. \tag{1.8}$$

对于线性泛函，还有下面的与连续性等价的定理.

定理 3 设 X 是赋范线性空间，f 是 X 上线性泛函. 那末，

(1) f 是连续的充要条件是 f 的零空间

$$\mathscr{N}(f)=\{x|f(x)=0\}$$

是 X 的闭线性子空间.

(2) 不恒为零的线性泛函 f 是不连续的充要条件是 $\mathscr{N}(f)$ 在 X 中稠密.

证明 (1) 就是第四章 §5 的引理 1.

(2) 必要性 由定理 1, f 必在 $x=0$ 点不连续，从而存在 $\{x_n\}$, $x_n\to 0$, 但 $|f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0>0$ (此地 ε_0 为某个常数). 对任何 $x\in X$, 显然

$$x-\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n\in\mathscr{N}(f),$$

并且

$$x-\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n\to x,\quad (n\to\infty),$$

所以 $\mathscr{N}(f)$ 在 X 中稠密.

充分性 如果 f 是连续的，那末从 $\mathscr{N}(f)$ 的稠密性立即可知 $f=0$, 这与假设 $f\neq 0$ 矛盾. 证毕.

3. 有界线性算子全体所成的空间

现在我们考察线性算子之间的初等运算.

设 X、Y 是两个线性空间. 我们以 $(X\to Y)$ 表示由 X 到 Y 的线性算子的全体. 类似于函数的初等运算，我们也可引入算子的初等运算.

当 A, $B\in(X\to Y)$, $\alpha\in\mathbb{A}$ 时，作算子 $A+B$, αA 如下：对于任何 $x\in X$, 规定

$$(A+B)x=Ax+Bx,$$

$$(\alpha A)x=\alpha(Ax).$$

显然，$A+B$. αA 都是属于 $(X\to Y)$. 称 $A+B$ 为算子 A 与 B 的

和，αA 为 α 与 A 的数乘. 容易知道$(X\to Y)$按照上述的线性运算构成一线性空间.

设 Z 又是一个线性空间，如果 $B\in(X\to Y)$，$A\in(Y\to Z)$，作 X 到 Z 的算子如下：

$$(A\cdot B)x=A(Bx),\quad x\in X.$$

显然 $A\cdot B$(即 A 与 B 的复合映射 $A\circ B$) 是由 X 到 Z 的线性算子，称 $A\cdot B$ 为算子 A 与 B 的积，常简写为 AB. 特别地，当 $X=Y=Z$ 时，如果 $A, B\in(X\to X)$，那末 $AB\in(X\to X)$，并且易知$(X\to X)$按照上述线性运算及乘积成为一个线性代数[注]，并以 I 为单位元. 一般说来 AB 不一定等于 BA. 如果 $AB=BA$，就称 A、B 是可交换的.

当 X、Y 是赋范线性空间时，以 $\mathscr{B}(X\to Y)$表示由 X 到 Y 的有界线性算子的全体. 假如 $A, B\in\mathscr{B}(X\to Y)$，那末

$$A+B\in\mathscr{B}(X\to Y),\ \alpha A\in\mathscr{B}(X\to Y),$$

这里 α 是任意的数，并且

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|, \tag{1.9}$$

$$\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|. \tag{1.10}$$

等式(1.10)是显然的. 至于(1.9)可证明如下：任取 $x\in X$，那末

$$\|(A+B)x\|\leqslant\|Ax\|+\|Bx\|\leqslant\|A\|\|x\|+\|B\|\|x\|,$$

从而(1.9)成立. 又显然 $\|A\|\geqslant 0$，而 $\|A\|=0$ 只限于 $A=0$. 所以得到的结论如下：

定理 4 设 X、Y 是赋范线性空间，$\mathscr{B}(X\to Y)$是 X 到 Y 的有界线性算子全体，那末 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 按通常的线性运算及算子范数成为赋范线性空间.

此后，如不另外说明，我们总是把 $\mathscr{B}(X\to Y)$了解为上述的赋

[注] 设 E 是线性空间，如果对 E 中任意两个元素 x、y，规定了积 $x\cdot y\in E$，适合如下条件(i)乘法结合律：当 $x, y, z\in E$ 时，$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$；(ii)乘法对加法的分配律：当 $x, y, z\in E$ 时，$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$，$(y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x$；(iii)当 α 是数，$x, y\in E$ 时，$\alpha(x\cdot y)=(\alpha x)\cdot y=x\cdot(\alpha y)$，就称 E 为线性代数.

赋范线性空间.

定义 设 $\mathfrak{A}$ 是赋范线性空间，同时又是代数，如果其中元素的乘积满足

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|,$$

就称 $\mathfrak{A}$ 是赋范代数. 完备的（作为赋范空间是完备的）赋范代数又称为 Banach 代数.

设 X 是赋范线性空间，当 $A,\ B\in\mathscr{B}(X\to X)$ 时，AB 也是有界线性算子，而且

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|. \tag{1.11}$$

事实上，当 $x\in X$ 时，

$$\|ABx\|\leqslant\|A\|\|Bx\|\leqslant\|A\|\|B\|\|x\|,$$

从而得到(1.11)，所以 $\mathscr{B}(X\to X)$ 是赋范代数.

定理 5 设 X 是赋范线性空间，Y 是 Banach 空间，那末 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是 Banach 空间.

证明 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 中一列元素，并且是基本的，即对于任何 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n,\ m\geqslant N$ 时，

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon,$$

因此对任何 $x\in X$，当 $n,\ m\geqslant N$ 时，

$$\|T_nx-T_mx\|\leqslant\varepsilon\|x\|. \tag{1.12}$$

所以固定 x 时，$\{T_nx\}$ 是 Y 中的基本点列，由于 Y 是完备的，所以存在 y，使得

$$y=\lim_{n\to\infty}T_nx.$$

作算子 T 如下：对每个 $x\in X$，令

$$Tx=y=\lim_{n\to\infty}T_nx.$$

容易知道 T 是 $X\to Y$ 的线性算子. 在(1.12)中，令 $m\to\infty$，就得到：当 $n\geqslant N$ 时，

$$\|T_nx-Tx\|=\lim_{m\to\infty}\|T_nx-T_mx\|\leqslant\varepsilon\|x\|,$$

由于 ε 不依赖于 x，所以上式说明，当 $n\geqslant N$ 时

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|(T_n-T)x\|\leqslant\varepsilon,$$

即 $T_n - T \in \mathscr{B}(X\to Y)$，从而 $T = T_n + (T - T_n) \in \mathscr{B}(X\to Y)$，并且 $\lim\|T_n - T\| = 0$. 因而 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是完备的赋范线性空间. 证毕.

我们从定理 6 还可以得到下面的结果.

定理 6 当 X 是 Banach 空间时，$\mathscr{B}(X\to X)$ 是 Banach 代数.

下面是 Banach 代数中一个重要的结果，在本书的第七章中将用到它.

定理 7 设 X 是 Banach 代数，$T\in X$，那末 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$ 存在，并且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_n \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

证明 令 $r = \inf\limits_n \sqrt[n]{\|T^n\|}$，显然 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} \geqslant r$，所以只要证明

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant r$$

就可以了.

事实上，对任何 $\varepsilon > 0$，由下确定义，必有自然数 m，使得

$$\sqrt[m]{\|T^m\|} < r + \varepsilon.$$

取定 m 后，对每个自然数 n，必存在非负整数 k_n、l_n，$0 \leqslant l_n < m$，使得

$$n = k_n m + l_n.$$

重复应用 Banach 代数中的不等式 $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$，便得到对任何自然数 k，$\|T^k\| \leqslant \|T\|^k$，从而

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant \sqrt[n]{\|T^{l_n}\|}\sqrt[n]{\|T^{k_n m}\|}$$

$$\leqslant \|T\|^{\frac{k_n}{n}}\|T^m\|^{\frac{k_n}{n}} \leqslant \|T\|^{\frac{k_n}{n}}(r+\varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}},$$

因此

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant r + \varepsilon,$$

再令 $\varepsilon \to 0$，立即得到 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|} \leqslant r$. 证毕.

从定理 6、7 立即得到下面的系

系 设 X 是 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(X\to X)$，那末

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}=\inf_n\sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

下面举一些 Banach 代数的例子.

例 9 设 X 是赋范线性空间, B_0 是仅由单位算子 I 的倍数 αI 全体所构成的集, 即 $B_0=\{\alpha I,\ \alpha\in\Lambda\}$, 显然 B_0 是 Banach 代数.

例 10 取 $X=L[a,\ b]$, $x(t)$ 是 $[a,\ b]$ 上的连续函数. 对每个 x, 作相应的 $X\to X$ 的线性算子如下: 对任何 $f\in L[a,\ b]$,

$$x:\ f(t)\mapsto x(t)f(t). \tag{1.13}$$

显然, 算子 x 是 $X\to X$ 的线性算子, 通常称它为乘积算子. 今证 x 是有界算子, 并且

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|. \tag{1.14}$$

事实上, 对任何 $f\in L[a,\ b]$, 由于

$$\int_a^b|x(t)f(t)|dt\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\int_a^b|f(t)|dt,$$

即
$$\|xf\|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\|f\|,$$

因此
$$\|x\|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|.$$

另一方面, 闭区间上连续函数 $|x(t)|$ 的极值是可达到的, 必有 t_0, 使

$$|x(t_0)|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,\quad t_0\in[a,\ b].$$

因此, 对任何 $\varepsilon>0$, 必有 $\delta>0$, 当 $t\in(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$ 时,

$$|x(t_0)|-\varepsilon<|x(t)|. \tag{1.15}$$

在 $L[a,\ b]$ 中取 f_δ 如下:

$$f_\delta(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } t\in(t_0-\delta,\ t_0+\delta)\text{ 时},\\ \dfrac{1}{2\delta}, & \text{当 } t\in(t_0-\delta,\ t_0+\delta)\text{ 时}.\end{cases}$$

显然, $f_\delta(t)\geqslant 0$, 且 $\|f_\delta\|=1$. 根据 (1.15), 就有

$$\int_a^b(|x(t_0)|-\varepsilon)f_\delta(t)dt\leqslant\int_a^b|x(t)f_\delta(t)|dt,$$

即
$$\|xf_\delta\|\geqslant|x(t_0)|-\varepsilon=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|-\varepsilon,$$

也就是说
$$\|x\|\geqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 便得到

$$\|x\|\geqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|.$$

因此, (1.14)成立.

(1.14)说明: 如果把 $C[a, b]$ 中元素 x 作为 $L[a, b]\to L[a,b]$ 的乘积算子时, 作为算子的范数和作为 Banach 空间 $C[a, b]$ 的元素的范数是一致的.

此外, $C[a, b]$ 中所有元素 x, 按(1.13)方式作为 $L[a, b]\to L[a, b]$ 算子时, 显然构成一个代数, 易知这个代数是 Banach 代数. 证毕.

例 10′ 显然, $C[a, b]$ 本身按通常函数的线性运算和乘法构成一个线性代数, 并且在范数 $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$ 下成为 Banach 代数.

例 11 W 表示一切满足 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|<\infty$ 的数列所产生的 $[0, 2\pi]$ 上函数 $x(\theta)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta}$ 全体 (即绝对收敛的三角级数全体), 按通常函数的线性运算构成线性空间. 当 $x=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta}$, $y=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}d_ne^{in\theta}$ 时, 如果规定乘法运算(即普通函数的乘法)为

$$(x\cdot y)(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{n-k}d_k\Big)e^{in\theta},$$

易知 W 成为线性代数. 如果在 W 中规定每个 $x(\theta)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta}$ 的

$$\|x\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|,$$

也很容易证明 W 在 $\|\cdot\|$ 下成为 Banach 代数.

例 12 在 Banach 空间 $L((-\infty, \infty), m)$ 上, 对任何 f、g 引入乘法运算

$$(f\cdot g)(s)=\int f(s-t)g(t)dt.$$

利用第二章 §3 的有关结果, 容易证明 $L((-\infty, \infty), m)$ 在添入上述乘法后成为 Banach 代数.

在赋范代数 $\mathfrak{A}$ 中，如果 $\mathfrak{A}$ 中某两个元 x、y 满足

$$xy=yx$$

那末称 x，y 是可交换的．如果 $\mathfrak{A}$ 中任何两个元都可交换，那末称 $\mathfrak{A}$ 是交换的赋范代数．自然，如果 $\mathfrak{A}$ 是一个交换的赋范代数，同时又是 Banach 空间，那末称 $\mathfrak{A}$ 是交换的 Banach 代数．

如果赋范代数 $\mathfrak{A}$ 的子集 A 本身也是一个代数，那末称 A 是赋范子代数．如果 A 作为子空间还是完备的，那末称 A 是 $\mathfrak{A}$ 的 Banach 子代数．

有关 Banach 代数的理论，现在已发展成为具有广泛应用的一个泛函分析的分支．

习　　题

1．在例 1 中，如果规定向量 $x=\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$ 的范数为 $\|x\|=\max_\nu|x_\nu|$，求出例 1 中算子 T 的范数；如果规定向量 x 的范数为

$$\|x\|=\left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

证明例 1 中算子的范数适合

$$\max\left(\sum_{\mu=1}^{n}|t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|T\|\leqslant\left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}|t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2．作线性赋范空间 $l^p(\infty>p>1)$ 中算子 T 如下：当 $x=\{x_\nu\}\in l^p$ 时，$Tx=\{y_\mu\}$，其中

$$y_\mu=\sum_{\nu=1}^{\infty}t_{\mu\nu}x_\nu,\quad \mu=1,\ 2,\ \cdots,$$

并且设 $\sum_\mu\left(\sum_\nu|t_{\mu\nu}|^q\right)^{p/q}<\infty$，又 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$．证明 T 为有界线性算子．又问：l^p 到 l^p 的有界线性算子是否都是这个形式？

3．T 是 $C[a,\ b]$ 到 $C[a,\ b]$ 的积分算子：

$$(T\varphi)(s)=\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)dt,\ \varphi\in C[a,\ b],$$

其中 $K(s,\ t)$ 是 $[a,\ b]\times[a,\ b]$ 上二元连续函数．证明

$$\|T\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,\ t)|dt.$$

4．设 T 是 $C[a,\ b]$ 上有界线性算子，令

$$f_n(t)=Tt^n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

证明 T 完全由函数列 $\{f_n(t)\}$ 唯一确定.

5．设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子．如果 T 的零空间 $\mathcal{N}(T)=\{x|Tx=0\}$ 是闭集，问 T 是否有界？当 T 是有界算子时，$\mathcal{N}(T)$ 是闭集吗？

6．求出例 10 中的乘积算子(1.13)在 $L^p(E, \mu)(p\geqslant 1)$ 上的范数，此地 μ 是 E 上 $(L-S)$ 测度，E 是 $(L-S)$ 可测集.

7．证明 $L^p(E^n, m)(p\geqslant 1)$ 上算子

$$T_\tau: f(t)\mapsto f(t+\tau),\ f\in L^p(E^n, m),\ \tau\in E^n$$

是有界线性算子，并且 $\|T_\tau\|=1(\tau\in E^n)$.

8．$C(-\infty, \infty)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上一致连续的有界函数全体，并在范数

$$\|g\|=\sup_t|g(t)|$$

下成为 Banach 空间．又设 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上支集有界的连续函数．证明算子

$$T_f:\ g(t)\mapsto(f*g)(t)=\int f(t-x)g(x)dx$$

是 $C(-\infty, \infty)$ 上有界线性算子，并求出 T_f 的范数.

如果视 T_f 为 $L((-\infty, \infty), m)$ 上算子，证明 T_f 也是有界线性算子，并给出 T_f 的范数估计.

9．设 $K(s, t)\in L^p([a, b]\times[a, b], m)(\infty>p>1)$，证明对任何 $\varphi\in L^q([a, b], m)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，算子

$$T_K:\ \varphi(s)\mapsto\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt$$

是 $L^q([a, b], m)$ 到 $L^p([a, b], m)$ 的有界线性算子．并将上述结果推广到 $a=-\infty$, $b=\infty$，测度 m 换成一般的 $(L-S)$ 测度的情况.

§2　连续线性泛函的延拓与表示

本节主要讨论某个线性空间的子空间上线性泛函能否延拓成全空间的线性泛函，以及某些具体的赋范线性空间上的连续线性泛函的表示问题.

1．线性泛函的存在性

设 X 是线性空间，显然，恒取值为零的泛函是 X 上的线性泛函，它是 X 上最平凡的线性泛函．自然会问：在任何的线性空间

X(自然假设是非空的)上，是否一定存在非零的线性泛函．与这个问题等价的是问：如果f是X的某个线性子空间L上的线性泛函，是否能将f延拓成整个X上的线性泛函．这个问题的回答是肯定的，而且我们可以做到f的延拓是按某种限制条件下的延拓，这类延拓定理通常称为Hahn-Banach泛函延拓定理．

定理1 设X是实线性空间，p是X上具有非负齐性和次可加的泛函，即满足

(i)(非负齐性) $p(\alpha x)=\alpha p(x)$, $\alpha\geqslant 0$, $x\in X$;

(ii)(次可加性) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$, x, $y\in X$.

又设L是X的线性子空间，f是L上的线性泛函，并且在L上被p从上控制，即

$$f(x)\leqslant p(x),\ x\in L, \tag{2.1}$$

那末f必能延拓成全空间X上的线性泛函，并且使得

$$f(x)\leqslant p(x),\ x\in X. \tag{2.2}$$

证明 任取$x_0\in X-L$，记$L_1=\operatorname{span}\{L, x_0\}$．现在先考察如何将$f$在保持(2.2)的条件下，从$L$延拓成$L_1$上的$f_1$.

显然，对L_1中任何y，必有唯一的$x\in X$, $\alpha\in\mathbb{R}$，使得

$$y=x+\alpha x_0. \tag{2.3}$$

任取$c\in\mathbb{R}$，规定

$$f_1(y)=f(x)+\alpha c, \tag{2.4}$$

显然f_1是f在L_1上的延拓．当$y_i=x_i+\alpha_i x_0\ (i=1, 2)$是$L_1$中两个向量，$\lambda$, $\mu\in\mathbb{R}$时，按f_1的定义(2.4)，

$$\begin{aligned}f_1(\lambda y_1+\mu y_2)&=f_1(\lambda x_1+\mu x_2+(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2)x_0)\\&=f(\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2)C\\&=\lambda f_1(y_1)+\mu f_1(y_2),\end{aligned}$$

即f_1还是线性泛函．但为了保证L_1上的f_1适合(2.2)，数c是不能随便选取的．下面考察如何选取c，使得(2.2)成立．

根据(2.2)，对一切$x\in L$, $\alpha\in\mathbb{R}$, c应适合下列不等式：

$$f(x)+\alpha c\leqslant p(x+\alpha x_0). \tag{2.5}$$

(2.5)等价于：当$\alpha>0$时$\left(令\ u=\dfrac{x}{\alpha}\right)$

$$f(u)+c\leqslant p(u+x_0),\ u\in L; \tag{2.6}$$

而当 $\alpha<0$ 时 $\left(令\ u'=\dfrac{x}{-\alpha}\right)$

$$f(u')-c\leqslant p(u'-x_0),\ u'\in L. \tag{2.7}$$

(当 $\alpha=0$ 时,(2.5)恒成立). 而(2.6)、(2.7)等价于

$$f(u')-p(u'-x_0)\leqslant c\leqslant p(u+x_0)-f(u),$$
$$u,\ u'\in L. \tag{2.8}$$

可见，所选择的 c 必须适合(2.8). 因此，这种 c 能选到的充要条件是

$$\sup_{u'\in L}\{f(u')-p(u'-x_0)\}\leqslant\inf_{u\in L}\{p(u+x_0)-f(u)\}. \tag{2.9}$$

现在，只要说明在定理假设条件下，(2.9)确实成立即可了. 事实上,对任何 $u,\ u'\in L$, 由从上控制假设

$$f(u+u')\leqslant p(u+u')\leqslant p(u+x_0)+p(u'-x_0),$$

即对任何 $u,\ u'\in L$ 都有

$$f(u')-p(u'-x_0)\leqslant p(u+x_0)-f(u). \tag{2.10}$$

因为 u 和 u' 是彼此独立的,在(2.10)中固定 u',不等式右边先对 u 取下确界，然后再在左边对 u' 取上确界，立即知道(2.9)成立.

既然(2.9)成立，所以适合(2.8)的 c 存在，只要取一个这种 c,所作的 f_1 便是 f 在 L_1 上的延拓,并且在 L_1 上能保持(2.2)式.

这样，我们就严格地证明了从 L 上的 f 能在保持 (2.2) 的条件下延拓到 $L_1=\mathrm{span}\{L,\ x_0\}$(比 L 增加一维空间). 由此又可将 f_1 从 L_1 延拓到 $L_2=\mathrm{span}\{L_1,\ x_1\}$(其中 $x_1\overline{\in} L_1$). 如此手续可以一直做下去,直至延拓到整个 X 上. 当然,一般说来这是无限次过程,涉及到无限过程可能性的逻辑问题,下面我们用 Zorn 引理来证明 L 上 f 可延拓到 X 上.

设$(\mathscr{F},\ \mathscr{L})$是一个集合，其中的元素$(f_M,\ M)$规定如下：$M$ 是 X 中包含 L 的线性子空间，而 f_M 是 f 在 M 上的(线性)延拓，并在 M 上适合条件(2.2). 今在$(\mathscr{F},\ \mathscr{L})$上规定序如下：当 $M_2\supset M_1$, f_{M_2} 是 f_{M_1} 的延拓时，规定$(f_{M_1},\ M_1)\prec(f_{M_2},\ M_2)$. 容易证明$\prec$是$(\mathscr{F},\ \mathscr{L})$上的序关系.

今验证半序集$(\mathscr{F}, \mathscr{L})$中任何一个全序子集$\{(f_{M_\alpha}, M_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$必有上界. 事实上，令$M=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$, 显然，$M$是$X$的线性子空间，并且$M\supset M_\alpha(\alpha\in\Lambda)$. 在$M$上规定$f_M$如下：对任何$x\in M$, 必有$\alpha\in\Lambda$, 使得$x\in M_\alpha$, 这时定义

$$f_M(x)=f_{M_\alpha}(x). \tag{2.11}$$

先证明上述定义是恰当的. 事实上，如果又有$x\in M_{\alpha'}(\alpha'\neq\alpha)$, 由于全序性，$(f_{M_\alpha}, M_\alpha)\prec(f_{M_{\alpha'}}, M_{\alpha'})$或$(f_{M_{\alpha'}}, M_{\alpha'})\prec(f_{M_\alpha}, M_\alpha)$中必有一个成立，例如$(f_{M_\alpha}, M_\alpha)\prec(f_{M_{\alpha'}}, M_{\alpha'})$, 即$M_\alpha\subset M_{\alpha'}$, $f_{M_{\alpha'}}$是f_{M_α}的延拓，从而

$$f_M(x)=f_{M_\alpha}(x)=f_{M_{\alpha'}}(x),$$

即$f_M(x)$的定义，并不因视x属于不同的M_α而有不同的值. 因而$f_M(x)$的定义是恰当的. 其次，验证f_M是M上线性泛函，并且在M上满足(2.2)条件. 事实上，对任何$x, y\in M$, 必存在$\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, 使得$x\in M_\alpha$, $y\in M_\beta$. 同上述全序性的理由，可不妨设$M_\alpha\subset M_\beta$, 因而对任何$\lambda, \mu\in\mathbb{R}$, $\lambda x+\mu y\in M_\beta$, 按(2.11)和$f_{M_\beta}$在$M_\beta$上满足(2.2)条件，立即得到

$$\begin{aligned}f_M(\lambda x+\mu y)&=f_{M_\beta}(\lambda x+\mu y)=\lambda f_{M_\beta}(x)+\mu f_{M_\beta}(y)\\&=\lambda f_M(x)+\mu f_M(y),\\f_M(x)&=f_{M_\beta}(x)\leqslant p(x).\end{aligned}$$

这样就得到$(f_M, M)\in(\mathscr{F}, \mathscr{L})$. 显然对全序集$\{(f_{M_\alpha}, M_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$, 任何$(f_{M_\alpha}, M_\alpha)$都满足$(f_{M_\alpha}, M_\alpha)\prec(f_M, M)$, 即$(f_M, M)$是上述全序集的上界.

由 Zorn 引理，立即知道$(\mathscr{F}, \mathscr{L})$中必存在极大元$(f_{M_0}, M_0)$. 剩下仅需说明$M_0=X$就可以了.

事实上，如果$M_0\neq X$, 那末存在$x_0\in X$, $x_0\bar{\in}M_0$, 这时用M_0作为L, f_{M_0}作为f, 利用前面的证明，可在保持(2.2)条件下，延拓f_{M_0}到$M'=\mathrm{span}\{M_0, x_0\}$上成为$f_{M'}$, 显然，

$$(f_{M_0}, M_0)\prec(f_{M'}, M')\in(\mathscr{F}, \mathscr{L}),$$

并且$M'\neq M$, 这与(f_{M_0}, M_0)是$(\mathscr{F}, \mathscr{L})$的极大元相矛盾. 证毕.

利用实空间上的延拓定理，可以证明下面复空间上的延拓定理.

定理2 设 p 是线性空间 X 上的拟范数，L 是 X 的线性子空间，f 是 L 上的线性泛函，并且

$$|f(x)|\leqslant p(x),\ x\in L, \tag{2.12}$$

那末，f 必能延拓成全空间 X 上的线性泛函，并且使得

$$|f(x)|\leqslant p(x),\ x\in X. \tag{2.13}$$

证明 (I) 当 X 是实线性空间时，因为拟范数必具有非负齐性且是次可加泛函，而由(2.12)可得到(2.1)，因此，由定理1，立即知道存在 f 在 X 上的线性延拓 f，使得

$$f(x)\leqslant p(x),\ x\in X, \tag{2.2}$$

从而

$$-f(x)=f(-x)\leqslant p(-x)=p(x),\ x\in X. \tag{2.14}$$

由(2.14)、(2.2)立即得到(2.13).

(II) 当 X 是复空间时，作分解

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x),\ x\in L, \tag{2.15}$$

其中 f_1、f_2 分别是 f 的实部、虚部. 因为

$$f(ix)=if(x)=-f_2(x)+if_1(x),\ x\in L,$$

所以
$$f_1(ix)=-f_2(x),\ f_2(ix)=f_1(x), \tag{2.16}$$

即 f_1, f_2 并不独立，由(2.15)、(2.16),

$$f(x)=f_1(x)-if_1(ix). \tag{2.17}$$

这启发了我们，考虑 f 的延拓，关键是考虑 L 上的实泛函 f_1 的延拓.

视 X 为实线性空间，视 L 为 X 的实线性子空间，由于 f 是 L 上的线性泛函，当然也是 L 上的实线性泛函(即对实线性组合，具有线性，这并不意味着 $f(x)$ 必须是实数)，从而 f 的实部 f_1 是 L 上的实线性泛函，并且

$$|f_1(x)|\leqslant|f(x)|\leqslant p(x),\ x\in L.$$

由(I)中已证明的事实，立即可知 f_1 在 X 上有线性延拓 $\tilde{f}_1$，并且

$$|\tilde{f}_1(x)|\leqslant p(x),\ x\in X. \tag{2.18}$$

作 X 上的泛函

$$\tilde{f}(x)=\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix), \tag{2.19}$$

首先，对任何 $x\in X$，由(2.19)和 $\tilde{f}_1$ 是实线性泛函，

$$\begin{aligned}\tilde{f}(ix)&=\tilde{f}_1(ix)-i\tilde{f}(-x)=i(\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix))\\&=i\tilde{f}(x),\end{aligned} \tag{2.20}$$

其次，对任何 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C},\ x,\ y\in X$，由于 $\tilde{f}_1$ 是 X 上实线性泛函，由(2.19)，

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\alpha x+\beta y)&=\tilde{f}_1(\alpha x+\beta y)-i\tilde{f}_1(i(\alpha x+\beta y))\\&=\alpha\tilde{f}_1(x)+\beta\tilde{f}_1(y)-i[\alpha\tilde{f}_1(ix)+\beta\tilde{f}_1(iy)]\\&=\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{f}(y).\end{aligned} \tag{2.21}$$

由(2.20)，(2.21)，易知 $\tilde{f}$ 对任何 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$，(2.21)也成立，即 $\tilde{f}$ 是复线性空间 X 上线性泛函。

最后再证 $\tilde{f}$ 满足(2.13)：事实上，对任何 $x\in X$，令

$$\theta=\arg\tilde{f}(x),$$

于是

$$|\tilde{f}(x)|=e^{-i\theta}\tilde{f}(x)=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)=\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)\leqslant p(e^{-i\theta}x)=p(x).$$

证毕。

由定理1、2，立即得到下面的线性泛函存在定理。

定理3 设 X 是线性空间，如果 $X\neq\{0\}$，那末在 X 上必存在非零线性泛函。

证明 当 X 是实空间时，任取 $x_0\neq 0$，令 $L=\operatorname{span}\{x_0\}$，又任取非零实数 c，作 L 上的泛函

$$f:\ \alpha x_0\mapsto\alpha c\quad(\text{即 } f(\alpha x_0)=\alpha c), \tag{2.22}$$

易知 f 是 L 上非零线性泛函。只要将定理1的证明中所有关于从上控制的讨论去掉，保留其余部分，便可知道 f 必可线性延拓成 X 上的 $\tilde{f}$，显然 $\tilde{f}$ 不是零泛函。

同样，当 X 是复空间时，也只要将定理2中所有有关从上控制的讨论去掉，保留其余部分，便可知道本定理成立。证毕。

2. 连续线性泛函的延拓

人们很自然地会问：当 X 是赋准范线性空间，并且 $X\neq\{0\}$，

是否在 X 上必存在非零的连续线性泛函，或者，等价地问：赋准范线性空间的子空间上的连续线性泛函，是否必可延拓成全空间上的连续线性泛函。只要注意到由连续线性泛函 f 所作的 $p(x)=|f(x)|$ 必是 X 上连续的拟范数（自然是凸泛函），由第四章§7定理8的系后面的例子，可知确有赋准范空间，在它上面没有非零的连续凸泛函，所以这个问题，一般说来是做不到的。但我们利用定理 2，可以得到下面的 Hahn-Banach 延拓定理。

定理 4　设 X 是赋范线性空间，L 是 X 的线性子空间，f 是 L 上连续线性泛函，$\|f\|_L$ 表示 f 在 L 上的范数（即 $\|f\|_L=\sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\x\in L}}|f(x)|$），那末 f 必可延拓成 X 上连续线性泛函 $\tilde{f}$，并且

$$\|\tilde{f}\|=\|f\|_L.$$

证明　事实上，只要取 $p(x)=\|f\|_L\|x\|$，易知定理 2 的一切假设都满足，从而 f 在 X 上有线性延拓 $\tilde{f}$，适合

$$|\tilde{f}(x)|\leqslant\|f\|_L\|x\|,\ x\in X,$$

即 $\tilde{f}$ 是连续的，并且

$$\|\tilde{f}\|\leqslant\|f\|_L.$$

另一方面，因为 $\tilde{f}$ 是 f 的延拓，所以

$$\|\tilde{f}\|=\sup_{\|x\|=1}|\tilde{f}(x)|\geqslant\sup_{\substack{\|x\|=1\\x\in L}}|f(x)|=\|f\|_L,$$

从而 $\|f\|_L=\|\tilde{f}\|$。证毕。

下面是直接应用定理 4 所得到的常用的几个重要推论。

定理 5　设 X 是赋范线性空间，下列命题成立：

(1) 设 L 是 X 的线性子空间，$x_0\overline{\in}L$，并且 $\rho(x_0, L)>0$，那末，必存在 X 上连续线性泛函 f，满足

(i) 对任何 $x\in L$，$f(x)=0$；

(ii) $f(x_0)=\rho(x_0, L)$；

(iii) $\|f\|=1$。

(2) 对任何 $x_0\in X$，必存在 X 上连续线性泛函 f，满足

(i) $f(x_0)=\|x_0\|$；

(ii) $\|f\|=1$。

(3) 记 X^* 是 X 上连续线性泛函全体，对任何 $x_0\in X$，必有

$$\|x_0\|=\sup_{\substack{\|f\|=1\\ f\in X^*}}|f(x_0)|.$$

证明 (1) 令 $L_1=\text{span}\{L, x_0\}$，记 $c=\rho(x_0, L)>0$. 对 L_1 中任何 $y=x+\alpha x_0(x\in L, \alpha\in\mathbb{K})$，作 L_1 上泛函

$$g:\ y\mapsto\alpha c(\text{即 } g(x_0+\alpha x_0)=\alpha c), \tag{2.23}$$

易知 g 在 L 上恒等于零，而 $g(x_0)=\rho(x_0, L)$.

今证 $\|g\|_{L_1}=1$. 事实上，当 $\alpha\neq0$ 时，由(2.23)，

$$\|y\|=\|x+\alpha x_0\|=|\alpha|\|x_0+x/\alpha\|\geqslant|\alpha|\rho(x_0, L)$$
$$=|\alpha|c=|g(y)|,$$

所以 $\|g\|_{L_1}\leqslant1$，从而 g 是 L_1 上连续线性泛函. 反之，因 g 在 L 上恒等于零，所以又有

$$\rho(x_0, L)=|g(x_0)|=|g(x_0+x)|\leqslant\|g\|_{L_1}\|x_0+x\|,\ x\in L. \tag{2.24}$$

在(2.24)中取 x 为一列$\{x_n\}$，使得 $\|x_n+x_0\|\to\rho(x_0, L)$，由(2.24)立即得到$\|g\|_{L_1}\geqslant1$. 因此，$\|g\|_{L_1}=1$.

根据定理 4，L_1 上的 g 必可保持范数不变地延拓成 X 上的连续线性泛函 f. 显然，f 就满足(1)中(i)、(ii)、(iii)的要求.

(2) 当 $x_0=0$ 时，(2)显然成立. 因此不妨设 $x_0\neq0$，这时只要将(1)中的 L 取为$\{0\}$即可得到.

(3) 当 $f\in X^*$，$\|f\|=1$ 时，显然

$$|f(x_0)|\leqslant\|f\|\|x_0\|=\|x_0\|,$$

因此 $\sup\limits_{\substack{\|f\|=1\\ f\in X^*}}|f(x_0)|\leqslant\|x_0\|$. 反之，由(2)，存在 $f_0\in X^*$，$\|f_0\|=1$，使得 $f_0(x_0)=\|x_0\|$，因而

$$\sup_{\substack{\|f\|=1\\ f\in X^*}}|f(x_0)|\geqslant|f_0(x_0)|=\|x_0\|,$$

从而 $\|x_0\|=\sup\limits_{\substack{\|f\|=1\\ f\in X^*}}|f(x_0)|$. 证毕.

注意，由定理 5 的(2)，立即可知对任何赋范线性空间 X，如果 $X\neq\{0\}$，那末在 X 上必存在非零的连续线性泛函. 其次，赋

范线性空间的子空间上的连续线性泛函的保持范数不变的延拓并不唯一.

例 1　设 $X=\mathbb{R}^2$，即 X 是点 $x=(x_1, x_2)$ 的全体，其中 x_1、x_2 为实数，但规定 $\|x\|=|x_1|+|x_2|$. 又设 $L=\{(x_1, 0)\}$，f 是定义在 L 上的泛函：$f((x_1, 0))=x_1$. 显然，f 是 L 上连续线性泛函，而且 $|f((x_1, 0))|=|x_1|=\|(x_1, 0)\|$，即 $\|f\|_L=1$. 然而，对任何数 β，X 上的连续线性泛函 $\tilde{f}((x_1, x_2))=x_1+\beta x_2$ 都是 f 的延拓. 由于

$$|\tilde{f}((x_1, x_2))|=|x_1+\beta x_2|\leqslant\max(1, |\beta|)\|(x_1, x_2)\|,$$

所以，只要 $|\beta|\leqslant 1$，$\tilde{f}$ 都是 f 的保持范数不变的延拓.

3. 线性泛函的几何意义

现在引入与线性泛函有关的一些几何概念.

定义　设 X 是线性空间，f 是 X 上的线性泛函. 如果 f 不是零泛函，那末对任何数 c，称 X 的子集

$$L_c(f)=\{x\,|\,f(x)=c\}$$

为 X 的超平面. 特别，当 $c=0$ 时，超平面 $L_0(f)$ 成为 X 的线性子空间，即泛函 f 的零空间 $\mathscr{N}(f)$.

例如，X 是 n 维空间，采用 § 1 中例 1 的记号，任何一个线性泛函 f 形如 § 1 的(1.2)，这时，超平面 $L_c(f)$ 就是通常几何学中所说的超平面：

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=c,$$

$a=(a_1, \cdots, a_n)$ 便是超平面 $L_c(f)$ 的法向量.

定理 6　设 X 是线性空间，f、g 是 X 上的两个线性泛函，下列命题成立：

(1) 如果 $f\neq 0$，那末 $X/\mathscr{N}(f)$ 必是一维线性空间.

(2) 如果 $\mathscr{N}(f)=\mathscr{N}(g)$，那末 f 与 g 只相差一个常数倍.

(3) 如果存在 $c\in\mathbb{K}$，$c\neq 0$，使得 $L_c(f)=L_c(g)$，那末 $f\equiv g$.

证明　(1) 因为 $f\neq 0$，所以存在 $x_0\in X$，使得 $f(x_0)\neq 0$，从而 $x_0\notin\mathscr{N}(f)$，因此 $X/\mathscr{N}(f)\neq\{0\}$，即 $\dim X/\mathscr{N}(f)\geqslant 1$. 再证明 $\dim X/\mathscr{N}(f)=1$：任取 $x\in X$，显然

$$x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\in\mathcal{N}(f),$$

从而相应地对 $\tilde{x}\in X/\mathcal{N}(f)$ 有

$$\tilde{x}=\widetilde{x-\left(x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right)}=\widetilde{\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0}=\frac{f(x)}{f(x_0)}\tilde{x}_0,\quad(2.25)$$

即 $X/\mathcal{N}(f)$ 中任一向量 $\tilde{x}$ 必是 $\tilde{x}_0$ 的常数倍，因而

$$\dim X/\mathcal{N}(f)=1.$$

(2) 如果 $f\equiv0$，那末因 $X=\mathcal{N}(f)=\mathcal{N}(g)$，立即得到 $g\equiv0$。所以不妨设 $f\not\equiv0$. 按(1)，存在 $x_0\neq0$，而对一切 $x\in X$，

$$x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\in\mathcal{N}(f),$$

但 $\mathcal{N}(f)=\mathcal{N}(g)$，从而 $g\left(x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right)=0$，即

$$g(x)=\frac{g(x_0)}{f(x_0)}f(x),\ x\in X.\quad(2.26)$$

换言之，g 是 f 的 $\frac{g(x_0)}{f(x_0)}$ 倍.

(3) 首先注意，对于非零线性泛函 f，必对任何 $c\neq0$ 有 $L_c(f)\neq\emptyset$. 事实上，因为 $f\not\equiv0$，从而必有 x_0, $f(x_0)\neq0$，因此取 $\beta=\frac{c}{f(x_0)}$ 时，$f(\beta x_0)=c$，即 $\beta x_0\in L_c(f)$. 由此可知，对于 $c\neq0$，当 $L_c(f)=\emptyset$ 时，必然有 $f\equiv0$，根据(3)的假设，$L_c(g)=L_c(f)=\emptyset$，又有 $g\equiv0$，从而 $f=g$. 因此，下面在证明(3)时，不妨设

$$L_c(f)=L_c(g)\neq\emptyset.$$

先证 $\mathcal{N}(f)=\mathcal{N}(g)$.（反证法）如果 $\mathcal{N}(f)\neq\mathcal{N}(g)$，不妨设有 $x_0\in\mathcal{N}(g)$ 而 $x_0\bar{\in}\mathcal{N}(f)$，从而

$$y=\frac{cx_0}{f(x_0)}\in\mathcal{N}(g),\quad(2.27)$$

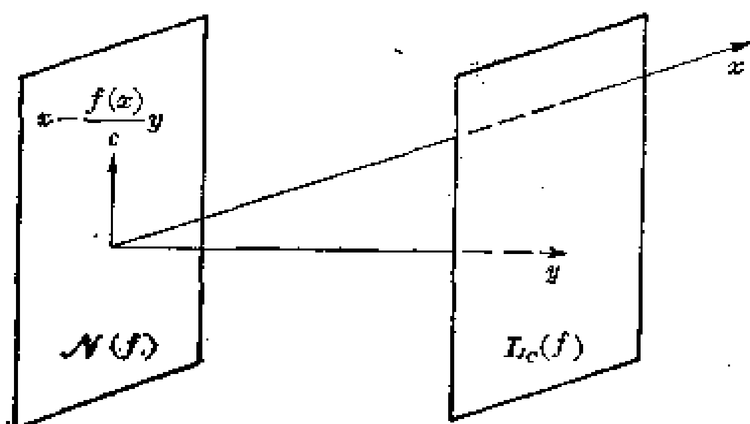
但 $f(y)=c$，显然，这与 $L_c(f)=L_c(g)$ 相矛盾. 所以

$$\mathcal{N}(f)=\mathcal{N}(g).$$

由(2)，存在常数 γ，使得 $f=\gamma g$. 任取 $y_0\in L_c(f)$，可得

$$c=f(y_0)=\gamma g(y_0)=\gamma c,\quad(2.28)$$

但 $c\neq0$, 因此 $\gamma=1$, 即 $f=g$. 证毕.



定义 设 X 是线性空间, L 是 X 的子集, $x_0\in X$, x_0+L 表示集 $\{x_0+y|y\in L\}$. 当 L 是 X 的线性真子空间时, 称 x_0+L 是 X 的线性簇[注]. 当 x_0+L 是线性簇, 又如果 $\dim X/L=1$ 时, 称 x_0+L 是 X 的极大线性簇.

定理 7 设 X 是线性空间, x_0+L 是极大线性簇的充要条件是 x_0+L 是 X 的超平面.

证明 必要性 假设 x_0+L 是极大线性簇. 如果 $x_0\overline{\in}L$, 那末由 $\dim X/L=1$, 易知 $\tilde{x}_0\in X/L$, 并且 $\tilde{x}_0\neq0$, 从而对任何 $x\in X$, 必可唯一地表示成

$$x=\alpha x_0+y,\ \alpha\in\mathbb{A},\ y\in L. \tag{2.29}$$

作 X 上的泛函 f:

$$f: \alpha x_0+y\to\alpha, \tag{2.30}$$

易知 f 是 X 上非零线性泛函, 并且 $L_1(f)=x_0+L$, 因此 x_0+L 是超平面.

如果 $x_0\in L$, 由 $\dim X/L=1$, 存在 $x_1\in X$, $x_1\overline{\in}L$. 同样, 在 (2.29) 中把 x_0 换成 x_1 后成立, 从而可作非零线性泛函 (2.30), 并且 $L_0(f)=L=x_0+L$. 因此 x_0+L 仍是超平面 (通过 0 点的超平面).

[注] 有的书刊文献中, 称线性簇为线性流形.

充分性 设 $L_c(f)$ 是由非零泛函 f 决定的一个超平面，任取 $x_0\in X$，使得 $f(x_0)=c$，从而 $L_c(f)=x_0+\mathscr{N}(f)$. 由定理 6 的(1)可知，$L_c(f)$ 是极大线性簇. 证毕.

4. Hahn–Banach 定理的几何形式

从几何的观念来看 Hahn-Banach 的线性泛函延拓定理，那末定理 3 实质上就是线性空间 X 的子空间 L 上的超平面(L 上的极大线性簇) $L_c(f)$ 必可扩张成 X 上的超平面(X 上的极大线性簇) $L_c(f)$. 同样，如果先能证明(用 Zorn 引理可以证明) X 的子空间 L 上的超平面必能扩张成 X 上的超平面，也可利用这个结论证明定理 3 成立. 而 Hahn–Banach 泛函延拓定理 1、2 还具有从上控制的条件，显然，那里控制条件中的 p 是和线性空间上另一个重要的几何概念——凸集有密切的联系，因而延拓定理 1、2 和凸集的性质密切相关，这就是下面要谈的超平面隔离凸集的问题.

定义 设 X 是实线性空间，f 是 X 上非零线性泛函，任取 $a\in\mathbb{R}$，称集 $\{x|f(x)\geqslant a\}$ (或 $\{x|f(x)\leqslant a\}$) 是 $L_a(f)$ 的*右*(*或左*)*半空间*. 如果 A、B 是 X 的两个子集，

$$A\subset\{x|f(x)\leqslant a\},\ B\subset\{x|f(x)\geqslant a\},$$

那末，称 A、B 被超平面 $L_a(f)$ *隔离*. 如果

$$A\subset\{x|f(x)<a\},\ B\subset\{x|f(x)>a\},$$

那末称 A、B 被 $L_a(f)$ *严格隔离*.

定义 设 X 是线性空间，A 是 X 的子集，如果 $x_0\in A$，并且 $-x_0+A$ 是吸收集，那末称 x_0 是 A 的*吸收点*.

引理 1 设 X 是线性空间，A 是 X 的子集，下列命题成立：

(1) A 是吸收集的充要条件是 0 为 A 的吸收点.

(2) 如果 A 是凸集，那末 x_0 是 A 的吸收点的充要条件是对任何 $y\in X$，必存在 $\varepsilon>0$，当 $|\delta|<\varepsilon$ 时，$x_0+\delta y\in A$[注].

(3) 如果 A 是凸吸收集，$x_0\in A$，那末对任何 $0\leqslant\eta<1$，ηx_0 必是 A 的吸收点.

[注] 设 A 是线性空间 X 中的一个子集，$x_0\in A$，如果对任何 $y\in X$，必存在 $\varepsilon>0$，当 $|\delta|<\varepsilon$ 时，就有 $x_0+\delta y\in A$，通常也称 x_0 是 A 的线性内点.

证明 (1) 从吸收点定义易知(1)是显然的.

(2) 必要性 显然, 当 A 是凸集, x_0 是 A 的吸收点时, 集

$$B=-x_0+A$$

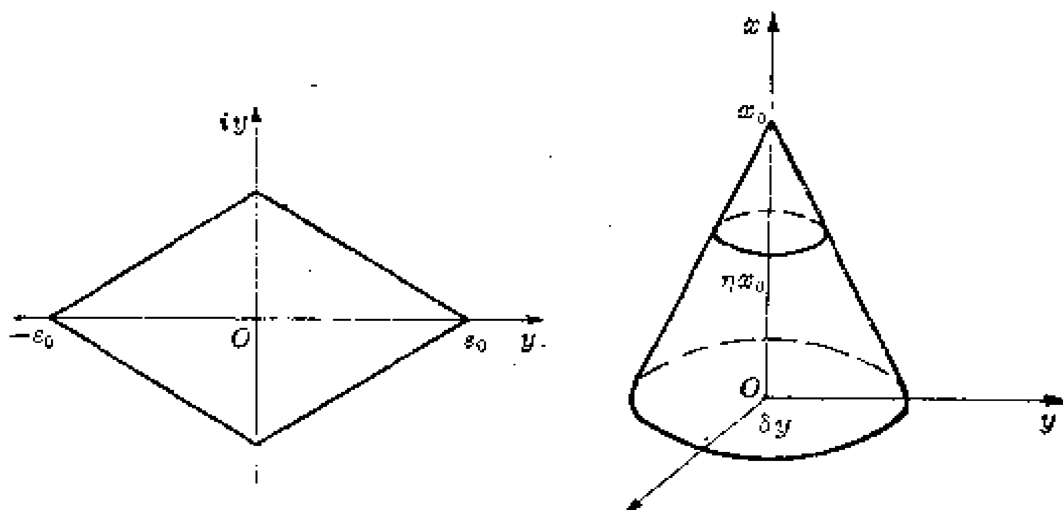
仍是凸集, 并且以 0 为吸收点. 因而对任何 $y\in X$, 存在 ε_0, 使得

$$\{\alpha y\,|\,\alpha\in[-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0]\}\subset B,\ \{i\alpha y\,|\,\alpha\in[-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0]\}\subset B.$$

由 B 的凸性, 易知取 $\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}$, 当 $|\delta|<\varepsilon$ 时, 必有 $\delta y\in B$, 即

$$x_0+\delta y\in A.$$

充分性是显然的.



(3) 因为 A 是凸吸收的, 0 是吸收点. 由(2), 对任何 $y\in X$, 必有 $\varepsilon>0$, 当 $|\delta|<\varepsilon$ 时, $\delta y\in A$. 由于 A 是凸的, 所以

$$(1-\eta)\delta y-\eta x_0\in A,$$

即当 $|\delta'|<(1-\eta)\varepsilon$ 时, $\delta' y+\eta x_0\in A$, 这就是说 ηx_0 是 A 的吸收点. 证毕.

定理 8 设 X 是实线性空间, U、V 是 X 中的两个凸集, 并且 U 至少含有一个吸收点, 而 V 不含 U 中的任何吸收点, 那末, 必存在隔离 U、V 的超平面.

证明 (I) 先在假定 0 是 U 的吸收点 (即 U 是吸收集) 并且 V 是单点集 $\{v\}$ 的情况下证明定理成立.

因为 U 是吸收凸的, 根据第四章 §7 定理 8 的系 1, 存在 X 上由 U 决定的凸泛函 p, 使得 $U\subset X(p\leqslant 1)$. 如果 $p(v)<1$, 那

将必存在 $r>1$，使得 $rv\in U$，但 U 是凸的吸收集，由引理1的(3)，立即可知 v 将是 U 的吸收点，这是不符合假设的，所以

$$p(v)\geqslant 1.$$

在 $L=\mathrm{span}\{v\}$ 上作线性泛函 f：$f(\lambda v)=\lambda(\lambda\in\mathbb{R})$。显然

$$f(\lambda v)\leqslant p(\lambda v).$$

从而由定理1，必可将 f 延拓成 X 上但被 p 从上控制的线性泛函，仍记为 f。显然，U 在 $L_1(f)$ 的左半空间，而 v 在 $L_1(f)$ 的右半空间。

(II) 对于一般情况，不失一般性，假设0是 U 的吸收点。令

$$B=\{u-v\,|\,u\in U,\ v\in V\}.$$

易从 U、V 的凸性推知 B 也是凸集。对任何 $v_0\in V$，显然 v_0+B 是凸集，而且 $v_0+B\supset U$，从而0是 v_0+B 的吸收点。

今证明 v_0 必不是 v_0+B 的吸收点：事实上，如果 v_0 是 v_0+B 的吸收点，由引理1的(2)，对任何 $y\in X$，必存在 $\varepsilon>0$，当 $|\delta|<\varepsilon$ 时，有 $v_0+\delta y\in v_0+B$，从而存在 $u\in U$，$v\in V$，使得 $\delta y=u-v$。但是

$$\frac{v+\delta y}{1+\delta}=\frac{u}{1+\delta},\tag{2.31}$$

特别，取 $y\in V$，$\delta>0$，由 V 的凸性，$\frac{v+\delta y}{1+\delta}\in V\,(\delta<\varepsilon)$。另一方面，$U$ 是凸吸收集，$u\in U$，从引理1的(3)立即得到 $\frac{u}{1+\delta}$ 是 U 的吸收点。显然，这与假设 V 中不含 U 的吸收点相矛盾。所以，v_0 必不是 v_0+B 的吸收点。

将 v_0+B 和 $\{v_0\}$ 分别作为(I)中的 U 和 $\{v\}$。根据(I)已证明的结果，立即知道存在 X 上凸泛函

$$p:\ v_0+B\subset\{x\,|\,p(x)\leqslant 1\},\ p(v_0)\geqslant 1,$$

以及线性泛函 f：$f(x)\leqslant p(x)\ (x\in X)$，$f(v_0)=1$。从而对一切

$$u\in U,\ v\in V,$$

$$f(v_0+u-v)\leqslant p(v_0+u-v)\leqslant 1,\tag{2.32}$$

即

$$f(u)-f(v)\leqslant 0.$$

因为u、v是独立的，因此有c适合下列条件：

$$\sup_{u\in U} f(u)\leqslant c\leqslant \inf_{v\in V} f(v), \tag{2.33}$$

那末超平面$L_c(f)$便隔离了U、V. 证毕.

对于度量线性空间，通常用内点代替吸收点. 为此，先建立下面引理.

引理 2 设A是赋准范线性空间X上凸集，0是A的内点，那末

(1) 0是A的吸收点；

(2) 如果$x_0\in A$，那末对任何$0\leqslant\eta<1$，ηx_0也是A的内点.

证明 (1) 从内点定义易知内点必是吸收点.

(2) 因为0是A的内点，所以存在$\delta>0$，使得$O(0, \delta)\subset A$. 因此，对任何$y'\in O(0, \delta)$，$(1-\eta)y'+\eta x_0\in A$. 但对固定的$\alpha>0$，映射

$$x\mapsto \alpha x$$

是X上拓扑映射，由此可知，当$0\leqslant\eta<1$时，集$\{(1-\eta)y' | y'\in O(0, \delta)\}$是$X$的开集，从而$\eta x_0$是$A$的内点. 证毕.

定理 9(M. Eidelheit) 设X是实赋准范线性空间，U是包含内点的凸集，V是不包含U的任何内点的凸集. 那末必存在连续线性泛函f和实数c，使得超平面$L_c(f)$隔离U、V.

证明 首先，容易证明(读者自己证)此时U的每个吸收点都是内点. 再利用引理2，不难将定理8的证明中所有出现"吸收点"的地方用内点代替，原证明过程仍能通过. 因此，只要证明定理8中所定义的f是连续的就可以了. (下面沿用定理8中的记号)显然，U不是全空间X，否则V包含U的内点. 根据第四章§7定理8的系2，由U决定的凸泛函p是X上连续的函数. 从而对任何$\varepsilon>0$，必存在$\delta>0$，当$x\in O(0, \delta)$时，$p(x)<\varepsilon$. 因此，当$x\in O(0, \delta)$时，

$$|f(x)|\leqslant \max(p(x), p(-x))<\varepsilon, \tag{2.34}$$

所以f是X上的连续线性泛函. 证毕.

系 1(S. Mazur) 设X是实赋准范线性空间，U是含有内点

的凸集, V 是 X 上的线性簇, 并且不含 U 的内点. 那末必存在 X 上连续线性泛函 f 和实数 c, 使得 $L_c(f)$ 隔离 U、V.

系 2 设 X 是实赋范线性空间, V 是闭凸集, 那末对任何 $u\in X$, $u\overline{\in}V$, 必存在 X 上非零连续线性泛函 f 及实数 c, 使得

$$f(u)<c\leqslant f(v),\ v\in V. \tag{2.35}$$

证明 因为 V 是闭的, $u\overline{\in}V$, 所以存在 $r>0$, 使得闭球 $S(u, r)$ 与 V 不相交. 取 $U=S(u, r)$, 由定理 9, 存在连续线性泛函 f 隔离 U、V. 又由定理 8, 存在实数 c, 使得(2.33)成立. 显然, 要证明(2.35), 只要 $f(u)\neq c$ 就可以了. 如果 $f(u)=c$, 那末由于 $f\neq 0$, 必存在 y, $\|y\|<r$, $f(y)>0$. 从而 $u+y\in S(u, r)$, 并且

$$f(u+y)=c+f(y)>c,$$

这就与(2.33)发生矛盾. 证毕.

系 3(G. Ascoli) 设 U、V 是实赋范线性空间 X 上的两个互不相交的闭凸集, 其中 U 是 X 的致密集, 那末必存在 X 上连续线性泛函 f 和实数 c, 使得 $L_c(f)$ 严格隔离 U 和 V.

证明 显然, 我们先要将 U 扩张成含有内点的凸集 U', 并使得 V 不含有 U' 的内点.

事实上, 由于 U 是致密闭(即紧)集, 并且与闭集 V 互不相交, 容易证明(可用反证法)必存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$U_0=\{y\mid \|y-x\|<\varepsilon,\ x\in U\}$$

与 V 互不相交. 显然, U_0 是凸、开集, 由定理 8、9 可知, 必存在连续线性泛函 f, 使得 $L_{c_0}(f)$ 隔离 U_0、V, 即

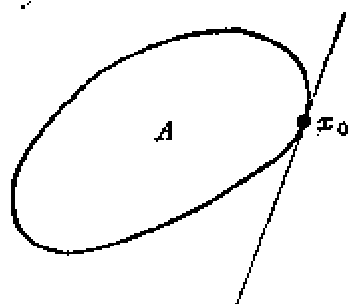
$$f(u)\leqslant c_0\leqslant f(v),\ u\in U_0,\ v\in V. \tag{2.36}$$

令 c_1 是 f 在 U 上的最大值, 显然从 U_0 的定义, 类似于系 2, 可以推出 $c_1<c_0$, 由(2.36)立即得到

$$f(u)\leqslant c_1<c_0\leqslant f(v),\ u\in U,\ v\in V. \tag{2.37}$$

证毕.

泛函延拓定理还有一些几何形式, 不拟一一列举.



最后，如果对于一个集 A，以及 A 中一点 x_0，如果存在某个超平面 L，使得

$$x_0 \in A \cap L,$$

并且 A 在 L 的一侧，那末称 L 是 A 在 x_0 点的支持超平面。显然，上述几何形式的泛函延拓定理完全可以翻译成支持超平面语言，得到相应的结果。

5. 连续线性泛函的表示

定义 设 X 是赋准范线性空间，X 上连续线性泛函全体记为 X^*，称 X^* 为 X 的共轭空间(或拓扑对偶空间[注])。

显然，当 X 是赋范线性空间时，如果在 X^* 中对每个 f，用泛函的范数 $\|f\|$ 作为范数，那末 X^* 成为赋范线性空间，并且由 §1 定理5，X^* 是 Banach 空间。

连续线性泛函已经是性质很好的(具有线性)连续函数，然而，即使 X 是赋范线性空间，一般说来，它的具体形式仍然是复杂的。在这一小节中，我们将把某些具体空间，例如 l^p，$L^p([a, b], m)$，$C[a, b]$ 等上面的所有连续线性泛函的具体形式写出来。

首先，我们引入同构概念。

定义 设 X、Y 是两个赋范线性空间，U 是 X 到 Y 的映射，而且对一切 $x \in X$，有 $\|Ux\| = \|x\|$，那末称 U 是 X 到 Y 的一个保范算子，又称为保距算子。如果 U 不但是保范的(显然，必是单射)，又是线性的，而且 $UX = Y$，那末我们就称 U 是 X 到 Y 上的保范(或保距)线性同构映射，简称为同构映射。如果 X、Y 之间存在一个从 X 到 Y 上的同构映射，我们就称 X 和 Y 是同构的。

如果

$$U: x \mapsto Ux$$

实现了 X 到 Y 的一个同构，我们把 x 与 Ux 同一化(即把 x 与 Ux 视为同一的)，那末就可以把 X 和 Y 同一化而不加区别，有时就

[注] 通常称线性空间 X 上线性泛函全体 X' 为 X 的对偶空间，但有时也将拓扑对偶空间简称为对偶空间。

简记为 $X=Y$.

在泛函分析中，常把两个同构的空间同一化，这是泛函分析中一个基本的观念.

一般说来，一个抽象的赋范线性空间，如能与一个具体的赋范线性空间同构，我们就把这个具体的空间称为抽象空间的一个表示. 所谓赋范线性空间 X 上连续线性泛函的表示，就是研究 X^* 这个赋范线性空间能和怎样的具体空间实现同构. 这类问题的研究方法通常是：先在 X 中取适当的元素集 $\mathscr{F}$，使得 $\mathscr{F}$ 中元素的线性组合在 X 中稠密. 这种元素集 $\mathscr{F}$ 称做赋范线性空间 X 中的母元组. 先把泛函 f 在 $\mathscr{F}$ 上的形式表示出来，再利用 $\mathscr{F}$ 中元素的线性组合在 X 中稠密以及 f 的连续性，最后把 f 在 X 上的形式表示出来.

定理 $l^*=l^\infty$.

证明 在 l 中取

$$\mathscr{F}=\{e_n \mid e_n=(\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{n}, 0, \cdots), n=1, 2, \cdots\}.$$

显然，对任何 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l$,

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu.$$

对任何 $f\in l^*$，如果记 $\eta_\nu=f(e_\nu)$，那末 $|\eta_\nu|\leqslant\|f\|\|e_\nu\|=\|f\|$. 因此 $\eta_f=(\eta_1, \eta_2, \cdots)\in l^\infty$，而且

$$\|\eta_f\|=\sup_\nu|\eta_\nu|\leqslant\|f\|. \tag{2.38}$$

由 f 的连续性，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\eta_\nu,$$

由于 $|\eta_\nu|\leqslant\|f\|$，$\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|<\infty$，所以级数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu\eta_\nu$ 是绝对收敛的，因而

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu\eta_\nu, \tag{2.39}$$

这就是说，l 上的连续线性泛函 f 只能是(2.39)的形式，其中

$$\eta_f=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n,\ \cdots)\in l^\infty,\ \eta_\nu=f(e_\nu),\ \nu=1,\ 2,\ \cdots.$$

反过来，如果有 $\eta=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n,\ \cdots)\in l^\infty$，用(2.39)式就可以定义出 l 上一个泛函

$$f_\eta(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu\eta_\nu.$$

显然，这样的泛函是线性的，而且

$$|f_\eta(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu\eta_\nu|\leqslant\|\eta\|\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|=\|\eta\|\|x\|,$$

即 f_η 是 l 上连续泛函，而且

$$\|f_\eta\|\leqslant\|\eta\|. \tag{2.40}$$

这就是说，l 上连续线性泛函的一般形式是(2.39)，其中

$$\eta=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n,\ \cdots)\in l^\infty.$$

如果我们将 l 上的每个连续线性泛函 f，通过(2.39)的表示式，使它与 l^∞ 上的元 $\eta=(f(e_1),\ f(e_2),\ \cdots)$ 相对应，即作映射 U：$f\mapsto\eta$. 容易看出：U 是 l^* 到 l^∞ 上的双射，并且是线性算子. 由(2.38)、(2.40)知道 $\|f\|=\|\eta\|=\|Uf\|$，所以 U 又是 l^* 到 l^∞ 的保范线性算子，因而 l^* 和 l^∞ 保距线性同构，从而 $l^*=l^\infty$. 证毕.

定理 10 当 $1<p<\infty$ 时，$(l^p)^*=l^q$，这里 p、q 适合

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

证明 在 l^p 中取

$$\mathscr{F}=\{e_n\,|\,e_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots),\ n=1,\ 2,\ \cdots\}.$$

对任何 $f\in(l^p)^*$，仍如定理 9，记 $\eta_\nu=f(e_\nu)$，$\nu=1,\ 2,\ \cdots$.

先证 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu|^q<\infty$. 作点列 $x_m=(x_1^{(m)},\ x_2^{(m)},\ \cdots)$ 如下：

$$x_\nu^{(m)}=\begin{cases}|\eta_\nu|^{q-1}e^{-i\theta_\nu}, & \text{当 } \nu\leqslant m \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \nu>m \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $\theta_\nu=\arg\eta_\nu$，$\nu=1,\ 2,\ \cdots$. 显然，$x_m\in l^p$，由此得到

$$f(x_m)=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu^{(m)}\eta_\nu=\sum_{\nu=1}^{m}|\eta_\nu|^q,$$

$$\|x_m\|=\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{\nu=1}^{m}|\eta_\nu|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

根据 $\frac{|f(x_m)|}{\|x_m\|}\leqslant\|f\|$，得到

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m}|\eta_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|,$$

再令 $m\to\infty$，便得到 $\eta\in l^q$，而且

$$\|\eta\|_q\leqslant\|f\|. \tag{2.41}$$

现在再给出 f 的形式. 对任何 $x=(x_1, \cdots, x_n, \cdots)\in l^p$，由 Hölder 不等式得到

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu x_\nu|\leqslant\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|\eta\|_q\|x\|_p, \tag{2.42}$$

即 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu x_\nu$ 是绝对收敛级数. 因此，由

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$$

和
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu\right),$$

得到 f 的表达式

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu x_\nu, \tag{2.43}$$

即 l^p 上连续线性泛函只能是(2.43)形式，其中

$$\eta=(\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots)\in l^q.$$

反过来，对任何 $\eta\in l^q$，由(2.42)就保证用(2.43)的方式定义的 f 是 l^p 上一个连续线性泛函，而且由(2.42)又得到

$$\|f\|\leqslant\|\eta\|_q, \tag{2.44}$$

这就是说，l^p 上的连续线性泛函的一般形式是(2.43).

与 l 的情况一样，作映射 U: $f\mapsto\eta=(f(e_1), f(e_2), \cdots)$，由(2.44)容易知道 U 是 $(l^p)^*$ 到 l^q 的保范线性同构，所以 $(l^p)^*=l^q$. 证毕.

我们注意，当 $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时，称 p、q 是一对对偶数，如果把 $p=1$, $q=\infty$ 也算作满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的一对对偶数，那

末定理 9、10 说明下列等式成立:

$$(l^p)^*=l^q,\quad 1\leqslant p<\infty,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

此外还有$(l^2)^*=l^2$,即 l^2 的共轭空间就是它自身,这是一个重要的情况.读者还应注意$(l^\infty)^*$并不就是 l,而赋范线性空间 c_0 的共轭空间$(c_0)^*=l$.这些将在§3中给予交待.

下面考察函数空间上连续线性泛函的表示,方法是类似的.

定理 11　当 $1\leqslant p<\infty$ 时,

$$L^p([a,b],\ m)^*=L^q([a,\ b],\ m),$$

这里 p、q 适合 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明　先证 $p>1$ 的情况,利用积分的 Hölder 不等式,易知当固定 $\beta(t)\in L^q([a,\ b],\ m)$时,按

$$f_\beta(x)=\int_a^b x(t)\beta(t)dt,\ x(t)\in L^p([a,\ b],\ m),\quad (2.45)$$

便可定义出 $L^p([a,\ b],\ m)$上一个连续线性泛函 f_β,而且,$\|f_\beta\|\leqslant\|\beta\|$.所以关键是要证明 $L^p([a,\ b],\ m)$ 上任何一个连续线性泛函 f,必可由(2.45)式表出,即存在 $\beta_f\in L^q([a,\ b],\ m)$,而且 $\|\beta_f\|\leqslant\|f\|$好了.

对于任一固定的 $t\in[a,\ b]$,考虑$[a,\ t]$的特征函数

$$u_t(\xi)=\begin{cases}1, & \text{当 } a\leqslant\xi\leqslant t \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } t<\xi\leqslant b \text{ 时}.\end{cases}$$

由于$[a,\ b]$上的任何 c_0 类函数(即阶梯函数)必然可以表示成这族函数的线性组合,而 c_0 类在 $L^p([a,\ b],\ m)$中稠密,所以取 $\mathscr{F}$ 为$\{u_t(\xi)\,|\,t\in[a,\ b]\}$.

考察 f 在 $\mathscr{F}$ 上的值.记 $g(t)=f(u_t)$.由于 $u_a(\xi)=0$,所以

$$g(a)=f(u_a)=0.$$

现在证明 $g(t)$是$[a,\ b]$上全连续函数.

设 $\delta_j=(\tau_j,\ t_j)\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是含在$[a,\ b]$中一族互不相交的开区间,记

$$\varepsilon_j=e^{-i\theta_j},\ \theta_j=\arg(g(t_j)-g(\tau_j)),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|g(t_j)-g(\tau_j)| &= \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(g(t_j)-g(\tau_j))\\ &= f\Big(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j[u_{t_j}-u_{\tau_j}]\Big)\\ &\leqslant \|f\|\Big\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(u_{t_j}-u_{\tau_j})\Big\|_p\\ &\leqslant \|f\|\Big(\int_{\cup\delta_j}1d\xi\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|\Big(\sum_{j=1}^{n}(t_j-\tau_j)\Big)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

因此，$g(t)$ 在 $[a, b]$ 上是全连续的.

下面求出 f 在 c_0 类上的表达式. 设 $\varphi(\xi)\in c_0$ 类，这时有区间 $[a, b]$ 上的分点 t_0、t_1、$\cdots$、t_n，使得在 (t_{k-1}, t_k) 上 $\varphi(\xi)=\xi_k$. 容易看出，除了在分点 $\{t_i\}$ 处的 ξ 外，

$$\varphi(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k(u_{t_k}(\xi)-u_{t_{k-1}}(\xi)).$$

作为 $L^p([a, b], m)$ 中向量时，上式左右两边函数表示同一向量. 因此，由 f 的线性，有

$$f(\varphi)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k(g(t_k)-g(t_{k-1}))=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}g'(t)dt,$$

所以

$$f(\varphi)=\int_a^b\varphi(t)g'(t)\,dt. \tag{2.46}$$

现在证明(2.46)对一切有界可测函数 φ 成立. 设 φ 是任一有界可测函数，$|\varphi(\xi)|\leqslant M$，那末必有 c_0 类中一列函数 $\{\varphi_n(\xi), n=1, 2, \cdots\}$，使得 $|\varphi_n(\xi)|\leqslant M$，而且 $\varphi(\xi)\doteq_m\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(\xi)$ 由积分的控制收敛定理，得到

$$\|\varphi-\varphi_n\|_p=\Big(\int_a^b|\varphi(\xi)-\varphi_n(\xi)|^p d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}\to 0, (n\to\infty).$$

由 f 的连续性，$f(\varphi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\varphi_n)$. 但另一方面，对 φ_n 应用(2.46)，再对 $\{\varphi_n g'\}$ 利用控制收敛定理得到

$$f(\varphi)=\lim_{n\to\infty}f(\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(t)\,g'(t)dt=\int_a^b\varphi(t)g'(t)dt,$$

即(2.46)对一切有界可测函数 φ 成立.

再证明 $g'(t)\in L^q([a,b],m)$. 作函数

$$h_n(t)=\begin{cases}|g'(t)|^{q-1}e^{-i\theta(t)}, & \text{当 } |g'(t)|^q\leqslant n \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } g'(t) \text{ 不存在或 } |g'(t)|^q>n \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $\theta(t)=\arg g'(t)$. 对有界可测函数 $h_n(t)$(作为 $L^p([a,b],m)$ 中向量),应用(2.46),得到

$$\int_a^b [|g'(t)|^q]_n{}^{[注]}\,dt=f(h_n)\leqslant\|f\|\|h_n\|_p$$

$$\leqslant\|f\|\left(\int_a^b [|g'(t)|^q]_n\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

从而得到 $$\left(\int_a^b [|g'(t)|^q]_n\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|,$$

再令 $n\to\infty$,便知道 $g'(t)\in L^q([a,b],m)$,而且

$$\|g'\|\leqslant\|f\|. \tag{2.47}$$

最后证明:对一切 $\varphi\in L^p([a,b],m)$,(2.46)成立. 作

$$F(\varphi)=\int_a^b\varphi g'\,dt,$$

由上所述,$F\in L^p([a,b],m)^*$, $\|F\|\leqslant\|g'\|$. 由于有界可测函数全体在 $L^p([a,b],m)$ 中稠密,从而对任何 $\varphi\in L^p([a,b],m)$,必有有界可测函数列 $\{\psi_n\}$,使得 $\|\psi_n-\varphi\|_p\to 0$. 由于 $f(\psi_n)=F(\psi_n)$ 及 f、F 的连续性;

$$f(\varphi)=\lim_{n\to\infty}f(\psi_n)=\lim_{n\to\infty}F(\psi_n)=F(\varphi),$$

因此(2.46)对一切 $\varphi\in L^p([a,b],m)$ 成立. 由此得到 $\|f\|=\|F\|\leqslant\|g'\|$. 再结合(2.47)就得到 $\|g'\|=\|f\|$.

通过(2.45)式,作映射 U,把 $L^p([a,b],m)^*$ 中元 f 和 $L^q([a,b],m)$ 中元 β 相对应,其中 $\beta(t)=g'(t)$,而 $g(t)=f(u_t)$. 易知 U 是 $L^p([a,b],m)^*$ 到 $L^q([a,b],m)$ 上的保范线性同构映射. 也就是说,在 $\infty>p>1$ 时,

$$L^p([a,b],m)^*=L^q([a,b],m).$$

[注] 这里记号 $[|g'(t)|^q]_n$ 表示当 $|g'(t)|^q>n$ 时,$[|g'(t)|^q]_n=0$; 当 $|g'(t)|^q\leqslant n$ 时,$[|g'(t)|^q]_n=|g'(t)|^q$.

对 $p=1$, $q=\infty$ 的情况，可以完全类似地证明. 所要注意的是 $\|\beta\|_\infty$ 定义为

$$\|\beta\|_\infty=\inf_{\substack{m(E)=0\\E\subset[a,b]}}\sup_{t\in[a,b]-E}|\beta(t)|,$$

泛函的一般形式仍是(2.45).

特别地, $L^2([a, b], m)^*=L^2([a, b], m)$, 即 $L^2([a, b], m)$ 是"自共轭"的.

其实, 定理 11 可以推广成 $L^p(E, \mu)^*=L^q(E, \mu)$, 这里 $p>0$, $q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, μ 是 E^n 上 L–S 测度, E 是(L–S)可测集. 更一般的结果是 $L^p(E, B, \mu)^*=L^q(E, B, \mu)$, 其中 (E, B, μ) 是 σ-有限的可测空间, p、q 如前.

现在利用连续线性泛函的延拓定理来给出 $C[a, b]$ 上连续线性泛函的表示, 即求出 $C[a, b]^*$ 的具体形式.

$V_0[a, b]$ 是赋范线性空间 $V[a, b]$ 的线性子空间. 对于任何 $g\in V_0[a, b]$, 即 g 是满足 $g(a)=0$, 且在 (a, b) 上右连续的有界变差函数, 作 $C[a, b]$ 上的泛函 F_g 如下:

$$F_g(x)=\int_a^b x(t)dg(t),\quad x\in C[a, b],\tag{2.48}$$

根据第一章§5的黎曼–斯蒂阶积分性质(2)、(6), 知道 F_g 是 $C[a, b]$ 上的线性泛函, 而且

$$|F_g(x)|\leqslant\int_a^b|x(t)||dg|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\bigvee_a^b(g),$$

这就是说

$$|F_g(x)|\leqslant\|x\|\|g\|,\tag{2.49}$$

这里的 $\|g\|=\bigvee_a^b(g)$. 所以 F_g 是连续线性泛函, 即 $F_g\in C[a, b]^*$, 而且 $\|F_g\|\leqslant\|g\|$.

如果我们能证明(i) $\|F_g\|=\|g\|$, 那末 $V_0[a, b]$ 便和 $(C[a,b])^*$ 的某个线性子空间保范线性对应. 如果再能证明(ii)对于 $C[a, b]$ 上任何一个连续线性泛函 F, 一定存在 $V_0[a, b]$ 中的某个 g_F, 使得

$$F(x)=\int_a^b x(t)dg_F(t),\quad x(t)\in C[a, b],$$

成立，那就证明了 $C[a, b]^*$ 和 $V_0[a, b]$ 之间保范线性同构. 从而

$$C[a, b]^*=V_0[a, b].$$

定理 12(F. Riesz) 设 f 是 $C[a, b]$ 上的连续线性泛函，必有唯一的 $g\in V_0[a, b]$(取 $V_0[a, b]$ 与 $C[a, b]$ 同为实空间或复空间)，使得当 $x\in C[a, b]$ 时

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t),\tag{2.50}$$

而且 $\|f\|=\|g\|$.

证明 我们先讨论 $C[a, b]$ 是实空间的情况. 首先分析一下，假如对给定的 f，满足(2.50)式的 g 存在，如何求出 g? 根据带符号的广义(L-S)测度知道，对任何 $\xi\in[a, b]$，

$$g(\xi)=\int_a^b \chi_\xi(t)dg(t)$$

(如果上式右边用的是 R-S 积分，那末必须补充假设 ξ 是 g 的连续点)，其中 χ_ξ 是 $[a, \xi]$ 的特征函数，并规定 $\chi_a=0$. 利用 g 的右连续性，就可将一切 $g(\xi)(a\leqslant\xi\leqslant b)$ 确定下来. 这就启发我们先把 $C[a, b]$ 空间的泛函 f 延拓到有界函数全体组成的 $B[a, b]$ 空间上去，然后由延拓后的泛函在 χ_ξ 上的值来确定 g.

设 $B[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上的有界实函数全体，按通常线性运算及范数

$$\|x\|=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,\ x\in B[a, b],$$

所成的赋范线性空间，那末 $C[a, b]$ 是 $B[a, b]$ 的线性子空间. 根据延拓定理，f 可延拓到 $B[a, b]$ 上，得到 F，而且 $\|F\|=\|f\|$.

令 $$h(\xi)=F(\chi_\xi),\ a\leqslant\xi\leqslant b.$$

现在利用 $h(\xi)$ 表示出 F 在任何 $x\in C[a, b]$ 上的值.

先证明 $h(\xi)\in V[a, b]$：设

$$a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_n=b,$$

记 $\varepsilon_i=\operatorname{sign}[h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})]$，那末

$$\sum_{i=1}^{n}|h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(h(\xi_i)-h(\xi_{i-1}))$$

$$=F\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\chi_{\xi_i}-\chi_{\xi_{i-1}})\right),$$

所以 $$\sum_{i=1}^{n}|h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|\leqslant\|F\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\chi_{\xi_i}-\chi_{\xi_{i-1}})\right\|.$$

显然，$B[a, b]$中的向量$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\chi_{\xi_i}-\chi_{\xi_{i-1}})$的范数为1，而$\|F\|=\|f\|$. 所以

$$\sum_{i=1}^{n}|h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|\leqslant\|f\|,$$

即$h\in V[a, b]$，而且

$$\bigvee_a^b(h)\leqslant\|f\|.$$

根据第一章§5定理4的系，存在$g\in V[a, b]$，在h的连续点$x\in(a, b)$以及a、b上，$g(x)=h(x)$，g在(a, b)上右连续，而且

$$\bigvee_a^b(g)\leqslant\bigvee_a^b(h).$$

因为$h(a)=0$，所以$g(x)\in V_0[a, b]$. 我们来证明：

$$F(x)=\int_a^b x(t)dg(t),\quad x(t)\in C[a, b].$$

事实上，对任何$x\in C[a, b]$，在$[a, b]$中选取一分点组

$$a=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{m_n}^{(n)}=b,$$

要求$t_1^{(n)}$、…、$t_{m_n-1}^{(n)}$都是$h(x)$的连续点，而且

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}|t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}|=0.$$

对这样的分点组，作$B[a, b]$中函数

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{m_n}x(t_k^{(n)})(\chi_{t_k^{(n)}}-\chi_{t_{k-1}^{(n)}}).$$

由函数$x(\cdot)$的一致连续性，容易证明$\|x_n-x\|\to0$. 由于

$$F(x_n)=\sum_{k=1}^{m_n}x(t_k^{(n)})[h(t_k^{(n)})-h(t_{k-1}^{(n)})]$$

$$=\sum_{k=1}^{m_n}x(t_k^{(n)})[g(t_k^{(n)})-g(t_{k-1}^{(n)})]$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{m_n} x(t_k^{(n)}) (\chi_{t_k^{(n)}} - \chi_{t_{k-1}^{(n)}}) dg$$

$$= \int_a^b x_n(t) dg(t),$$

根据带符号的$(L\text{-}S)$测度的控制收敛定理(或$(R\text{-}S)$积分性质(8)，见第一章§5)，

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_a^b x(t) dg(t).$$

另一方面，由于F的连续性以及$\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|=0$，又得到

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) = f(x),$$

所以

$$f(x) = \int_a^b x(t) dg(t), \quad x(t) \in C[a, b]. \tag{2.51}$$

由(2.49)又得到$\|f\| \leqslant \|g\|$. 可是，前面已经说过

$$\|g\| = \bigvee_a^b(g) \leqslant \bigvee_a^b(h) \leqslant \|f\|,$$

所以

$$\|f\| = \|g\|.$$

综合上面结果，就得到对给定的$f \in C[a, b]^*$，找到一个

$$g \in V_0[a, b],$$

使(2.50)成立，并且$\|f\| = \|g\|$. 为了完成定理的证明，还得证明对每个f，适合(2.50)的g是唯一的，即要证明：对任何$g \in V_0[a, b]$，如果

$$\int_a^b x(t) dg(t) = 0, \quad x(t) \in C[a, b], \tag{2.52}$$

那末$g(t) \equiv 0$.

事实上，对任何$\xi \in (a, b)$，必存在$[a, b]$上一列一致有界的连续函数$\{x_n(t)\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = \chi_\xi(t)$在$[a, b]$上处处成立，从而由带符号的$(L\text{-}S)$测度的控制收敛定理，

$$g(\xi) = \int_a^b \chi_\xi(t) dg(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t) dg(t) = 0 \tag{2.53}$$

(如果用的是$(R\text{-}S)$积分，容易直接从$(R\text{-}S)$积分的定义证明对g的连续点ξ，(2.53)成立. 由于$g \in V_0[a, b]$，从而在$[a, b)$上

$g(t)=0$,最后再取 $x(t)\equiv 1$,由(2.52)又得到 $g(b)=0$).

利用对每个 f,使得(2.50)成立的 g 是唯一的事实,作映射

$$U: f\mapsto g,\ f\in C[a, b]^*,$$

显然,U 是线性的,并且是满射. 又根据 $\|f\|=\|g\|$, 所以 U 还是保范的. 因而在实空间 $C[a, b]$ 的情况下,定理成立.

当 $C[a, b]$ 是复空间时,先将 f 分解成实部、虚部:

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x),\ f_1(x)=f_2(ix),\ x\in C[a, b]. \quad (2.54)$$

在 $C[a, b]$ 上考察 f_1. $C[a, b]$ 上向量可分解为实部、虚部:

$$x(t)=x_1(t)+ix_2(t),$$

f_1 分别是 $C[a, b]$ 的实部子空间

$$C_1[a, b]=\{x\,|\,x(t)=x_1(t)+ix_2(t),\ x_2(t)=0\}$$

和虚部子空间

$$C_2[a, b]=\{x\,|\,x(t)=x_1(t)+ix_2(t),\ x_1(t)=0\}$$

上的连续线性泛函,因而存在实函数 $g_1,\ g_2\in V_0[a, b]$,使得

$$f_1(x)=\int_a^b x_1(t)\,dg_1(t)+\int_a^b ix_2(t)\,dig_2(t). \quad (2.55)$$

从(2.55)和(2.54)立即可以得到

$$f(x)=f_1(x)-if_1(ix)$$
$$=\int_a^b (x_1+ix_2)\,d(g_1+ig_2)\text{[注]},\ x=x_1+ix_2, \quad (2.56)$$

证毕.

用 $C_{2\pi}$ 表示以 2π 为周期的连续函数 $\varphi(t)$ 的全体, 按通常的线性运算以及范数 $\|\varphi\|=\max\limits_{0\leq t\leq 2\pi}|\varphi(t)|$ 所成的赋范线性空间. 设 $V_{2\pi}$ 是 $V_0[0, 2\pi]$ 中满足条件

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=g(0)=0$$

(即 $g(0)=g(0+)$)的函数全体所成的线性子空间. 和定理 12 相仿地有

定理 13 设 f 是 $C_{2\pi}$ 上连续线性泛函, 那末必有唯一的 $g\in$

[注] 由 g_1+ig_2 产生的是复值测度.

$V_{2\pi}$(取 $V_{2\pi}$ 与 $C[a, b]$ 同为实或复空间)，使得当 $x\in C_{2\pi}$ 时

$$f(x)=\int_0^{2\pi} x(t)dg(t),$$

而且 $\|f\|=\bigvee_0^{2\pi}(g)$.

这个定理的证明留给读者.

习　　题

1. X 是赋准范线性空间，f 是 X 上线性泛函，那末超平面 $L_0(f)$ 是闭的充要条件是 f 为连续线性泛函.

2. 设 X、Y 是两个赋范线性空间，A 是 X 到 Y 的有界线性算子，并且 $\mathscr{D}(A)$ 在 X 中稠密. 证明：如果 Y 是完备的，那末 A 必可唯一地延拓成 X 到 Y 的有界线性算子 $\tilde{A}$，并且

$$\|\tilde{A}\|=\sup_{0\neq x\in\mathscr{D}(A)}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

3. 设 E 是赋范线性空间，$x_1, \cdots, x_k\in E$，a_1、$\cdots$、a_k 是一组数. 证明在 E 上存在线性泛函 f，适合

(i) $f(x_\nu)=a_\nu$, $\nu=1, 2, \cdots, k$;

(ii) $\|f\|\leqslant M$

的充要条件是：对任意的数 t_1、$\cdots$、t_k 都成立着

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu a_\nu\right|\leqslant M\left\|\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu x_\nu\right\|.$$

4. 设 $\{a_n\}$ 是一列数，证明存在 $[a, b]$ 上有界变差函数 $\alpha(t)$，使得

$$\int_a^b t^n d\alpha(t)=a_n, \quad n=0,1,2,\cdots$$

成立的充要条件是对一切多项式 $p(t)=\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu t^\nu$，成立着

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu a_\nu\right|\leqslant M\max_{a\leqslant t\leqslant b}|p(t)|,$$

此地，M 是一个常数.

5. 证明无限维赋范线性空间的共轭空间必是无限维的.

6. 设 $c_0(-\infty, \infty)$ 是全直线 $(-\infty, \infty)$ 上适合条件 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ 的连续函数全体按通常线性运算所成的线性空间. 当 $x\in c_0(-\infty, \infty)$ 时，规定

$$\|x\|=\max_{-\infty<t<\infty}|x(t)|,$$

这时 $c_0(-\infty, \infty)$ 成为 Banach 空间. 设 F 为 $c_0(-\infty, \infty)$ 上有界线性泛

函，证明必有全直线上有界变差函数 $g(t)$，使得对一切 $x\in c_0(-\infty, \infty)$ 成立着

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dg(t).$$

7．设 F 是 $c_0(-\infty, \infty)$ 上线性泛函，而且对一切 $\varphi\in c_0(-\infty, \infty)$，当 $\varphi(x)\geqslant 0$ 时，$F(\varphi)\geqslant 0$，证明 F 是连续的．

8．设 c_0 表示收敛于零的序列 $x=\{x_n\}$ 全体，按通常线性运算和范数

$$\|x\|=\sup_n|x_n|$$

成为 Banach 空间，证明 $c_0^*=l$．

9．用 c 表示 l^∞ 中收敛序列 $x=\{x_n\}$ 全体所成的子空间，证明

$$c^*=\{\eta+\alpha f_0|\eta\in l,\ \alpha \text{ 是数}\},$$

这里
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}x_n,\ x=\{x_n\}\in c.$$

换句话说，对每个 $f\in c^*$，有 $\eta=\{\eta_n\}\in l$ 和常数 α，使

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n x_n+\alpha\lim_{n\to\infty}x_n\ \ (x=\{x_n\}\in c),$$

而且 $\|f\|=\|\eta\|+|\alpha|$．

10．设 X 是线性空间，$\{\|\cdot\|_n\}$ 是 X 上一列拟范数，并且对任何 $x\in X$，总存在某个 n（依赖于 x），使得 $\|x\|_n\neq 0$．称 $(X, \|\cdot\|_n, n=1, 2, \cdots)$ 是赋可列拟范线性空间．设 $\{x_n\}$ 是赋可列拟范线性空间 X 上的一个点列，如果存在 $x\in X$，使得对任何 k，

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_k=0,$$

称 $\{x_n\}$ 在 X 上收敛于 x．证明：函数

$$\rho(x, y)=\sum_n\frac{1}{2^n}\ \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}$$

是 X 上的距离，并且 $\{x_n\}$ 按可列拟范收敛于 x 的充要条件是按上述距离收敛于 x．

11．证明：在赋可列拟范空间 X 中，对任何 $x_0\neq 0$，以及任何 n，必存在 X 上连续线性泛函 f，使得 $f(x_0)=\|x_0\|_n$．

12．证明定理 9 的系 2、3 对赋可列拟范线性空间成立．

13．$T_{2\pi}$ 表示复的三角多项式全体，$V_{2\pi}$ 是 $V_0[0, 2\pi]$ 中满足 $g(0+)=g(0)$ 的 g 的全体．证明：对于 $g\in V_{2\pi}$，如果对任何 $T_{2\pi}$ 中的正函数 f（即 $f(t)\geqslant 0$）都有

$$\int_{[0,2\pi]}f\,dg\geqslant 0,$$

那末 g 必是实函数，并且是单调增加的函数．

§3　共轭空间与共轭算子

在§2中我们已经引入了共轭空间. 在本节中，我们要利用共轭空间的概念进一步引入二次共轭空间等等，并讨论空间的自反性. 利用共轭空间，我们又引进弱收敛的概念，并研究弱列紧性. 同时，还要考察共轭空间上的共轭算子. 本节所讨论的内容大体上是引进基本概念和少量的基本定理.

1. 二次共轭空间

设 X 是赋范线性空间，X^* 是它的共轭空间. 由于 X^* 也是赋范线性空间(并且是 Banach 空间)，它也有共轭空间 $(X^*)^*$，把它记为 X^{**}，称 X^{**} 是 X 的*第二次共轭空间*. 如此继续下去，就有 X 的第三次共轭空间 $X^{***}=(X^{**})^*$ 等等. 用 $X^{(n*)}$ 表示第 n 次共轭空间，显然，$(X^{(n*)})^*=X^{((n+1)*)}$. 这些空间之间自然是有联系的. 我们只考察 X 与 X^{**} 的关系.

对每个 $x\in X$，作 X^* 上的泛函 x^{**} 如下：对 $f\in X^*$，令

$$x^{**}(f)=f(x).$$

显然，这样作的 x^{**} 是 X^* 上的线性泛函，而且由于

$$|x^{**}(f)|\leqslant\|f\|\|x\|,$$

所以 x^{**} 是有界泛函，并且 $\|x^{**}\|\leqslant\|x\|$，称泛函 x^{**} 为由 x 生成的. 作 $X\to X^{**}$ 的算子 τ: $x\mapsto x^{**}$.

定理 1　设 X 是赋范线性空间，算子 τ: $x\mapsto x^{**}(x\in X)$ 是 $X\to X^{**}$ 的保范的线性算子，即

(i) $(\alpha x+\beta y)^{**}=\alpha x^{**}+\beta y^{**}$;

(ii) $\|x^{**}\|=\|x\|$.

证明　(i) 是明显的. 显然，为了证(ii)，只要再证 $\|x^{**}\|\geqslant\|x\|$ 就可以了.

对任何 $x\neq 0$，由泛函延拓定理知道，必有 $f_x\in X^*$，$\|f_x\|=1$，而且 $f_x(x)=\|x\|$. 因此

$$\|x^{**}\|\geqslant|x^{**}(f_x)|=|f_x(x)|=\|x\|.$$

证毕.

记 $\hat{X}$ 表示 X 经过映射 $x\mapsto x^{**}$ 后的象, $\hat{X}\subset X^{**}$, 那末定理1说明 X 与 $\hat{X}$ 线性保范同构,即 X 可以通过算子 $\tau: x\mapsto x^{**}$(同构)嵌入第二共轭空间. 今后为简单起见, 往往不去区别 x^{**} 与 x, 即把 X 和 $\hat{X}$ 一致起来,从而 $X\subset X^{**}$,并称算子 τ 为(自然)嵌入算子. 更一般的是 $X^{(n*)}\subset X^{((n+2)*)}(n=0, 1, \cdots)$.

定义 设 X 是赋范线性空间. 如果 $X=X^{**}$, 就称 X 是自反的.

设 X 是自反空间,那末 X^* 也是自反的(更一般的是 $X^{(n*)}=X^{((n+2)*)}(n=0, 1, 2, \cdots)$). 事实上,这时 $(X^*)^{**}=(X^{**})^*=X^*$.

例如,当 $1<p<\infty$, 而且 q 是 p 的对偶数,即

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

时,
$$(L^p([a, b], m))^*=L^q([a, b], m),$$
$$(L^q([a, b], m))^*=L^p([a, b], m),$$

这就是说, $L^p([a, b], m)$ 是自反的. 但一般说来, 一个赋范线性空间 X, 即便是完备的, 不一定是自反的. $L([a, b], m)$ 就是一例. 为了说明这个事实,我们先给出下列定理.

定理 2(Banach) 设 X 是赋范线性空间, 如果 X^* 是可析的,那末 X 必也是可析的.

证明 由于假设 X^* 是可析的, 所以在 X^* 中有一列$\{f_n\}$, 它在 X^* 的单位球面上稠密. 对每个 f_n, 由于

$$\sup_{\|x\|=1}|f_n(x)|=\|f_n\|>\frac{1}{2},$$

在 X 的单位球面上必有 x_n,使得

$$|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}.$$

这时,记$\{x_n\}$张成的 X 的线性闭子空间为 X_0, 如果 X 不可析,那末必然 $X_0\neq X$. 从而在 X^* 中存在 f_0, $\|f_0\|=1$, 而且当 $x\in X_0$ 时, $f_0(x)=0$. 然而

$$\|f_n-f_0\|\geqslant|f_n(x_n)-f_0(x_n)|=|f_n(x_n)|>\frac{1}{2},$$

这与 $\{f_n\}$ 在 X^* 的单位球面上稠密的假设冲突. 所以 X 是可析的. 证毕.

利用这个定理, 立即可知 $L([a,b],m)$ 不是自反的.

事实上, 如果 $L([a,b],m)$ 是自反的, 即

$$(L([a,b],m))^{**}=L([a,b],m),$$

由于 $L([a,b],m)$ 是可析的, 所以 $(L([a,b],m))^*$ 也应该是可析的. 可是根据 §2 知道,

$$(L([a,b],m))^*=L^\infty([a,b],m).$$

然而当 $a<\lambda\leqslant b$ 时, 区间 $[a,\lambda]$ 的特征函数 $\chi_{[a,\lambda]}(t)$ 是 $L^\infty([a,b],m)$ 的单位球面上的一族(以 λ 为参数)向量, 并显然可见当 $\lambda\neq\lambda'$ 时

$$\|\chi_{[a,\lambda]}-\chi_{[a,\lambda']}\|=\min_{\substack{m(E)=0\\ E\subset[a,b]}}\sup_{t\in[a,b]-E}|\chi_{[a,\lambda]}(t)-\chi_{[a,\lambda']}(t)|=1,$$

即 $\{\chi_{[a,\lambda]}\}$ 彼此间距离为 1. 而这族向量有不可列个, 这就是说, $L^\infty([a,b],m)$ 不可能是可析的. 因而 $L([a,b],m)$ 不是自反的.

我们注意, 定理 2 启发我们用共轭空间 X^* 的性质来研究原来赋范线性空间的性质. 这个方向的进一步发展就是局部凸拓扑空间理论中的对偶理论, 它对于研究空间的拓扑结构是很有用的. 参见[4].

2. 算子序列的一致、强、弱收敛

在经典分析中, 关于一列函数的收敛性常常用到的是处处收敛和一致收敛的概念. 由于所考察的问题的需要, 不同场合采用不同的收敛概念. 对于算子序列, 类似于函数列的一致收敛和处处收敛, 也常常用到下面几种形式的收敛性.

定义 设 X、Y 都是赋范线性空间, 如果 $A_n, A\in\mathfrak{B}(X\to Y)$, 而且 $\|A_n-A\|\to0\ (n\to\infty)$, 称序列 $\{A_n\}$ 按算子范数收敛于 A, 或称为一致收敛于 A. 如果对每个 $x\in X$, $\|(A_n-A)x\|\to0,\ (n\to\infty)$, 称序列 $\{A_n\}$ 强收敛于 A, 记做 $A_n\xrightarrow{\text{强}}A$, 或 $A=(\text{强})\lim\limits_{n\to\infty}A_n$. 如果

对每个 $x\in X$，以及任何 $f\in X^*$，$f(A_nx)\to f(Ax)$，称序列 $\{A_n\}$ 弱收敛于 A，记做 $A_n\xrightarrow{\text{弱}}A$，或 $A=(\text{弱})\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

显然，如果 A_n 一致收敛于 A，必然强收敛于 A；如果 $\{A_n\}$ 强收敛于 A，必然弱收敛于 A. 下面的例子说明它们的逆命题一般不正确.

例 1（强收敛而不一致收敛的算子序列） 在 $l^p(p\geq1)$ 中，作"左移"算子 A 如下：当 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)\in l^p$ 时，

$$Ax=(x_2,\ x_3,\ \cdots),$$

那末算子序列 $\{A^n\}$ 强收敛于零. 事实上，对任何 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)$，$A^nx=(x_{n+1},\ x_{n+2},\ \cdots)$. 因此

$$\|A^nx\|_p=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

由于

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

所以 $\|A^nx\|_p\to0$，即 $\{A^n\}$ 强收敛于零. 但是，$\{A^n\}$ 在 l^p 上并不一致收敛于零. 事实上，令 $e_n=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots)$（其中除第 n 个坐标为 1 外，其余为 0），显然 $A^ne_{n+1}=e_1$，所以

$$\|A^n\|\geq\frac{\|A^ne_{n+1}\|_p}{\|e_{n+1}\|_p}=1.$$

所以 $\{A^n\}$ 不一致收敛于零.

例 2（弱收敛而不强收敛的算子序列） 在 $l^p(p>1)$ 中作算子序列 $\{A_n\}$ 如下：当 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)\in l^p$ 时，

$$A_nx=x_1e_n,\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

其中 e_n 是例 1 中取的向量. 显然

$$\|A_nx-A_mx\|_p=\|x_1e_n-x_1e_m\|_p=|x_1|2^{\frac{1}{p}},$$

所以当 $x_1\neq0$ 时，$\{A_n\}$ 不是强收敛的. 然而，对 l^p 上任何线性连续泛函 y，即 $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots)\in l^q$，而且

$$y(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu y_\nu,$$

那末

$$y(A_nx)=y(x_1e_n)=x_1y_n,$$

由于 $\sum_n |y_n|^q<\infty$, 因而 $y_n\to 0$, 即 $y(A_nx)\to 0$. 这说明$\{A_n\}$弱收敛于零.

引理 1 设 X 是赋范线性空间, Y 是 Banach 空间,

$$T_n\in\mathfrak{B}(X\to Y),\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

如果有常数 M, 使得$\|T_n\|<M$, $n=1, 2, \cdots$, 而且有 X 的稠密子集 $\mathscr{D}$, 当 $x\in\mathscr{D}$ 时, $\{T_nx\}$收敛, 那末必存在有界线性算子

$$T\in\mathfrak{B}(X\to Y),$$

使得$\{T_n\}$强收敛于 T, 并且

$$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|.$$

证明 任取 $x\in X$, 由于 $\overline{\mathscr{D}}=X$, 对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $x'\in\mathscr{D}$, 使得

$$\|x-x'\|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

又由于$\{T_nx'\}$是收敛的, 所以必有自然数 N, 使得当 $n,\ m\geqslant N$ 时

$$\|T_mx'-T_nx'\|<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是

$$\begin{aligned}\|T_mx-T_nx\|&\leqslant\|T_mx-T_mx'\|+\|T_mx'-T_nx'\|+\|T_nx'-T_nx\|\\&\leqslant(\|T_m\|+\|T_n\|)\|x-x'\|+\frac{\varepsilon}{3}\\&\leqslant 2M\|x-x'\|+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,\end{aligned}$$

所以$\{T_nx\}$是 Banach 空间 Y 中的基本点列, 因而它是收敛的. 作 $X\to Y$ 的算子

$$T:\ x\mapsto\lim_{n\to\infty}T_nx,$$

容易证明 T 是线性算子. 由于当 $x\in X$ 时

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|,$$

所以 T 是有界的, 并且有

$$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|.$$

对于泛函, 我们也引入类似的收敛概念.

定义 设$\{f_n\}$是赋范线性空间 X 上一列连续线性泛函，如果有$f\in X^*$，使得$\|f_n-f\|\to 0(n\to\infty)$，称泛函序列$\{f_n\}$强收敛于$f$，记为 $f_n\to f$ 或 $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$. 如果对每个 $x\in X$，$f_n(x)\to f(x)\ (n\to\infty)$，称泛函序列弱*收敛于 f，记做 $f_n\xrightarrow{\text{弱}^*} f$，或 $f=(\text{弱}^*)\lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

注 如果把泛函看成算子的特殊情况，即 $Y=\mathbb{K}$的情况，算子序列的一致收敛概念就相当于泛函序列的强收敛. 而算子的强收敛和弱收敛都相当于泛函序列的弱*收敛. 因此由引理 1 立即得到下面的系.

系 设$\{f_n\}$是 X 上一列连续线性泛函，又存在常数 M，$\|f_n\|\leqslant M$，并且$\{f_n\}$在 X 的稠密子集 $\mathscr{D}$ 上点点收敛，那末必存在 $f\in X^*$，使得$\{f_n\}$弱*收敛于 f.

由于 X 可以通过嵌入算子 τ: $x\mapsto x^{**}$ 同构地嵌入 X^{**}（定理 1），所以可以将 X 视为赋范线性空间 X^* 上某些有界线性泛函的集，因而，又可导入 X 中一列元素$\{x_n\}$（作为 X^{**} 中一列元素）强收敛于 $x_0\in X$ 和弱收敛于 $x_0\in X$ 的概念.

定义 设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$. 如果

$$\|x_n-x_0\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

就称$\{x_n\}$强收敛于 x_0. 如果对任何 $f\in X^*$，$f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$，就称 $\{x_n\}$ 弱收敛于[注] x_0，记为 $x_n\xrightarrow{\text{弱}} x_0$，或 $x_0=(\text{弱})\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

按定义，算子列的一致收敛、泛函列的强收敛、向量列的强收敛等，分别就是通常的算子列、泛函列、向量列的按范数收敛.

定理 3 设 X、Y 是赋范线性空间，$\{A_n\}\subset\mathfrak{B}(X\to Y)$. 如果$\{A_n\}$弱收敛于 $A\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，那末 A 是唯一的. 特别，如果$\{f_n\}$是 X 上一列有界线性泛函，弱*收敛于 f，那末 f 是唯一的.

证明 如果有 A、A'，使得 $A_n\xrightarrow{\text{弱}} A$，$A_n\xrightarrow{\text{弱}} A'$，显然就有

[注] 如果视$\{x_n\}$为 X^{**} 中点列，这里"理应"称为弱*收敛于 X^{**} 中点 x_0. 然而这里毕竟$\{x_n\}$是 X 中点列，所以称为弱收敛. 它与弱*收敛是有区别的. 例如$\{f_n\}$是 X^* 中一列点，$\{f_n\}$弱*收敛于 $f\in X^*$，是指对每个 $x\in X$，$f_n(x)\to f(x)$；而$\{f_n\}$弱收敛于 $f\in X^*$，是指对每个 $y\in X^{**}$，$f_n(y)\to f(y)$.

$$f(Ax)=f(A'x),\ x\in X,\ f\in Y^*,$$

从而 $f(Ax-A'x)=0$ 对一切 $f\in Y^*$ 成立，所以 $Ax-A'x=0$（如果不对，$(A-A')x\neq 0$，根据泛函延拓定理，必有 $f_0\in Y^*$，使得 $f_0((A-A')x)\neq 0$）．既然对一切 $x\in X$，$Ax-A'x=0$，所以 $A=A'$．当 $Y=\mathbb{K}$ 时，就得到泛函的结论．证毕．

现在再举一个弱*收敛而不强收敛的泛函序列的例子．

例 8　考察 $L([0,\ 2\pi],\ m)$ 上的泛函序列 $\{f_n\}$：

$$f_n(x)=\int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\,dt,\ \ x\in L([0,\ 2\pi],\ m),\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

它弱*收敛于零（这个命题称为黎曼-勒贝格引理，参见第二章 § 3 习题 4），但不强收敛于零．

事实上，由 § 1 中 (1.14) 式知道

$$\|f_n\|=\max_{t\in[0,2\pi]}|\sin nt|=1,$$

所以 $\{f_n\}$ 并不强收敛于零．今证 $\{f_n\}$ 弱*收敛于零：当 $x(t)$ 是三角多项式时，用分部积分可直接验证出：当 $n\to\infty$ 时，

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}x'(t)\cos nt\,dt\to 0.$$

再利用 $\|f_n\|=1,\ n=1,\ 2,\ \cdots$，和三角多项式全体在 $L([0,2\pi],m)$ 中的稠密性，立即得到对任何

$$x\in L([0,\ 2\pi],\ m),\ \ f_n(x)=\int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\,dt\to 0.$$

3．弱列紧（弱致密）

虽然在共轭空间 X^* 中序列的弱*收敛概念，一般不能容纳在度量空间中按距离收敛的概念中，但我们仍然可以仿照度量空间致密集的定义来定义弱*极限意义下的致密性．

定义　设 Φ 是 X 的共轭空间 X^* 的子集．如果 Φ 中任意点列 $\{f_n\}$ 一定含有在 X 上弱*收敛的子序列 $\{f_{n_k}\}$，就称 Φ 是弱*致密或弱*列紧；如果一定含有强收敛的子序列 $\{f_{n_k}\}$，就称 Φ 是强致密或强列紧的．

强致密(或强列紧)，按度量空间的一般术语，就是致密(或列紧)．

由于强收敛蕴含弱*收敛，所以强列紧集必是弱*列紧集．正如弱*收敛不必是强收敛一样，一般说来，弱*列紧集不一定是强列紧集．这一点将在定理 4 后面加以说明．

在 Banach 空间中，要有界集具有列紧性，只有空间是有限维才是可能的．但由于弱*列紧性要求较弱，当空间 X 是可析时，共轭空间 X^* 中点集的有界性和弱*列紧性却是一致的．

定理 4 如果赋范线性空间 X 是可析的，那末共轭空间 X^* 中的任意有界集 A 是弱*列紧的．

证明 设 A 是 X^* 中的有界集．任意在 A 中取一列 $\{\varphi_n\}$，那末存在常数 $M\geqslant 0$，使得

$$\|\varphi_n\|\leqslant M,\ n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{3.1}$$

由于 X 是可析的，设 $\{x_n\}$ 在 X 中稠密．由(3.1)，数列$\{\varphi_n(x_1),\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$之中存在收敛子序列$\{\varphi_{n\nu}(x_1)\}$，为书写方便，把$\{\varphi_{n\nu}\}$改写为$\{\varphi_{1\nu}\}$：

$$\varphi_{11}(x_1),\ \varphi_{12}(x_1),\ \cdots,\ \varphi_{1\nu}(x_1),\ \cdots$$

(下面也类似地用双足标)．在 x_2 上，泛函取值$\{\varphi_{1\nu}(x_2)\}$也是有界的，所以其中又含有收敛子列

$$\varphi_{21}(x_2),\ \varphi_{22}(x_2),\ \cdots,\ \varphi_{2\nu}(x_2),\ \cdots$$

如此继续下去，得到如下可列个泛函序列

$$\begin{array}{l}\varphi_{11},\ \varphi_{12},\ \cdots,\ \varphi_{1\nu},\ \cdots\\ \varphi_{21},\ \varphi_{22},\ \cdots,\ \varphi_{2\nu},\ \cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_{\nu1},\ \varphi_{\nu2},\ \cdots,\ \varphi_{\nu\nu},\ \cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array} \tag{3.2}$$

其中$\{\varphi_{k\nu}\}$是$\{\varphi_{k-1,\nu}\}$的子序列，而且对于每个 x_k，存在

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{kn}(x_k).$$

从(3.2)中挑出对角线上的泛函组成序列

$$\varphi_{11},\ \varphi_{22},\ \cdots,\ \varphi_{\nu\nu},\ \cdots$$

容易知道，$\{\varphi_{\nu\nu}\}$ 在 $\{x_k\}$ 上收敛. 又因为 $\{x_k\}$ 是稠密的，并且

$$\|\varphi_{\nu\nu}\|\leqslant M,$$

由引理 1 的系知道必存在 $\varphi\in X^*$，使得 $\{\varphi_{\nu\nu}\}$ 在 X 上弱* 收敛于 φ. 证毕.

可见，可析赋范线性空间 X 的共轭空间 X^* 中单位球或单位球面都必是弱*列紧的（更一般的结果可见本节的第五小节）. 但是，当 $\dim X=\infty$ 时，X^* 也是无限维的，由第四章 § 6 定理 11，X^* 中单位球面（从而单位球）不是强列紧的.

类似地，我们也可将 X 嵌入 X^{**}，可以在 X 中引入弱列紧概念，读者也可类似地讨论 X 中的有界集与弱列紧的关系.

4. 子空间、商空间的共轭空间

定义 设 X 是赋范线性空间，$x_0\in X$，$f\in X^*$. 如果 $f(x_0)=0$，那末称 f 与 x_0 直交，记为 $f\perp x_0$. 如果 A，B 分别是 X、X^* 的子集，并且对任何 $x_0\in A$，$f\in B$，$f\perp x_0$，那末称 A、B 直交，记为 $A\perp B$. 如果 A 是 X 的子集，那末称 $\{f\mid f\perp x,\ x\in A,\ f\in X^*\}$ 为 A 的直交集，A 的直交集记为 $A^\perp$.

引理 2 (1) 设 A 是赋范线性空间 X 的子集，那末 $A^\perp$ 必是 X^* 中的闭线性子空间.

(2) 设 A' 是赋范线性空间 X 的共轭空间 X^* 的子集，那末 $A'^\perp\cap X$（这里视 $X\subset X^{**}$，通常记 $A'^\perp\cap X$ 为 $A'_\perp$）是 X 中的闭线性子空间.

(3) 设 A 是赋范线性空间 X 的线性子空间，那末

$$(A^\perp)^\perp\cap X=\overline{A}.$$

证明 (1) 对任何 $f_1,\ f_2\in A^\perp$，$\alpha,\ \beta\in\mathbb{K}$，由于

$$(\alpha f_1+\beta f_2)(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)=0,\ x\in A, \tag{3.3}$$

所以 $A^\perp$ 是线性子空间. 同样，设 $\{f_n\}$ 是 $A^\perp$ 中一列点，并且 $\{f_n\}$ 强收敛（其实只要弱*收敛）于 f，那末，对任何 $x\in A$，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0, \tag{3.4}$$

即 $f\in A^{\perp}$，因而 $A^{\perp}$ 是闭的。

(2) 根据(1)，$A'^{\perp}$ 是 X^{**} 的闭线性子空间，而 $X\subset X^{**}$。从而得到 $A'^{\perp}\cap X$ 是 X 中的闭线性子空间。

(3) 显然，$A\subset(A^{\perp})^{\perp}\cap X$，由(2)，$(A^{\perp})^{\perp}\cap X\supset\overline{A}$。反之，对任何 $x_0\overline{\in}\overline{A}$，有 $\rho(x_0,\overline{A})\neq 0$。由泛函延拓定理，存在 $f\in X^*$，$\|f\|=1$，$f\perp A$（即 $f\in A^{\perp}$），并且 $f(x_0)\neq 0$。因而 $x_0\overline{\in}(A^{\perp})^{\perp}\cap X$，从而 $(A^{\perp})^{\perp}\cap X=\overline{A}$。证毕。

引理3　设 L 是赋范线性空间 X 的闭线性子空间，T 是 X 上有界线性算子，并且 $TL\subset L$，那末 X/L 上算子

$$\tilde{T}:\tilde{x}\mapsto\widetilde{Tx},\ \tilde{x}\in X/L,\tag{3.5}$$

必是有界线性的，并且 $\|\tilde{T}\|\leqslant\|T\|$。

证明　先说明 $\tilde{T}$ 的定义是恰当的。事实上，当 $y\in\tilde{x}$ 时，

$$y-x\in L,$$

从而

$$Ty=T(y-x)+Tx.\tag{3.6}$$

由于 $TL\subset L$，所以 $\widetilde{Ty}=\widetilde{Tx}$，即 $\tilde{T}$ 在 $\tilde{x}$ 的值不依赖于 $\tilde{x}$ 中向量的选取，因而 $\tilde{T}$ 的定义是恰当的。

证 $\tilde{T}$ 是线性的。对任何 $\tilde{x},\tilde{y}\in X/L$，$\alpha,\beta\in\mathbb{A}$，由(3.5)，

$$\begin{aligned}\tilde{T}(\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y})&=\tilde{T}(\widetilde{\alpha x+\beta y})=\widetilde{T(\alpha x+\beta y)}\\&=\widetilde{\alpha Tx+\beta Ty}=\alpha\widetilde{Tx}+\beta\widetilde{Ty}\\&=\alpha\tilde{T}\tilde{x}+\beta\tilde{T}\tilde{y},\end{aligned}\tag{3.7}$$

即 $\tilde{T}$ 是线性的。

再证 $\tilde{T}$ 是连续的。对任何 $\tilde{x}\in X/L$，由于

$$\tilde{T}\tilde{x}=\widetilde{Tx},\tag{3.8}$$

所以对任何 $y\in\tilde{x}$，

$$\|\tilde{T}\tilde{x}\|=\|\widetilde{Tx}\|=\|\widetilde{Ty}\|\leqslant\|Ty\|\leqslant\|T\|\,\|y\|,\tag{3.9}$$

从而

$$\|\tilde{T}\tilde{x}\|\leqslant\|T\|\inf_{y\in\tilde{x}}\|y\|=\|T\|\,\|\tilde{x}\|,\tag{3.10}$$

由(3.10)可知 $\tilde{T}$ 是有界的，并且 $\|\tilde{T}\|\leqslant\|T\|$。证毕。

通常称 $\tilde{T}$ 是 T 在 X/L 上的诱导算子.

系 设 f 是赋范线性空间 X 上连续线性泛函, L 是 $\mathscr{N}(f)$ 的闭子空间, 那末 X/L 上泛函 $\tilde{f}: \tilde{x}\mapsto f(x)\ (x\in L)$ 必是 X/L 上连续线性泛函(即 $\tilde{f}\in(X/L)^*$), 并且 $\|\tilde{f}\|\leqslant\|f\|$.

本系的证明可以直接仿引理 3.

定理 5 设 L 是赋范线性空间 X 的线性子空间, 那末

$$L^*=X^*/L^{\perp};\tag{3.11}$$

如果 L 还是 X 的闭线性子空间, 那末

$$(X/L)^*=L^{\perp}.\tag{3.12}$$

证明 先证(3.11). 对任何 $f\in L^*$, 由泛函延拓定理, 必存在 f 在 X 上的连续线性延拓 f_1(其实还可做到 $\|f_1\|=\|f\|_L$), 作 L^* 到 $X^*/L^{\perp}$ 的映射

$$\varphi:\ f\mapsto\tilde{f}_1.\tag{3.13}$$

现在证明(3.13)是确有意义的. 事实上, 如果 f_2 也是 f 在 X 上的连续线性延拓, 那末 $f_1|_L=f_2|_L=f$, 从而 $f_1-f_2\in L^{\perp}$, 因而 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$, 所以映射(3.13)是有意义的[注].

再证 φ 是线性同构. 如果 $f\neq 0$, 显然 $f_1\bar{\in}L^{\perp}$, 从而 $\tilde{f}_1\neq 0$, 即 φ 是单射. 对任何 $f,\ g\in L^*$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{K}$, 令 f_1、g_1 分别为 f、g 相应的延拓, 显然 $\alpha f_1+\beta g_1$ 是 $\alpha f+\beta g$ 的连续线性延拓, 因而

$$\varphi(\alpha f+\beta g)=\widetilde{\alpha f_1+\beta g_1}=\alpha\tilde{f}_1+\beta\tilde{g}_1=\alpha\varphi(f)+\beta\varphi(g),\tag{3.14}$$

即 φ 是线性的. 又显然对任何 $\tilde{f}_1\in X^*/L^{\perp}$, 任取 $f_1\in\tilde{f}_1$, 令

$$f=f_1|_L,$$

那末必有 $\varphi(f)=\tilde{f}_1$, 因而 φ 是满射. 这样, φ 是线性同构.

最后证 φ 是保范的. 因为等价类 $\tilde{f}_1$ 中任何 h 都是 L 上 f 在 X 上的连续线性延拓, 因而 $\|f\|_L\leqslant\|h\|$, 从而

$$\|f\|_L\leqslant\inf_{h\in\tilde{f}_1}\|h\|=\|\tilde{f}_1\|.\tag{3.15}$$

又因为对 $f\in L^*$, 必有保持范数不变的延拓, 例如 f_1, 从而

$$\|f\|_L=\|f_1\|\geqslant\inf_{h\in\tilde{f}_1}\|h\|=\|\tilde{f}_1\|,\tag{3.16}$$

[注] 即映射 φ 是单值的(我们不讨论多值映射).

即 φ 是保范的. 因而(3.11)成立.

证(3.12). 因为 L 是 X 的闭线性子空间, 根据第四章§5定理17, X/L 是赋范线性空间. 对任何 $\tilde{f}\in(X/L)^*$, 作 X 上泛函

$$f(x)=\tilde{f}(\tilde{x}),\quad x\in\tilde{x}. \tag{3.17}$$

现证 f 是线性泛函. 事实上, 对任何 $x, y\in X$, $\alpha, \beta\in\mathbb{\Lambda}$, 由(3.17)以及 $\tilde{f}$ 的线性, 立即有

$$\begin{aligned}f(\alpha x+\beta y)&=\tilde{f}(\widetilde{\alpha x+\beta y})=\tilde{f}(\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y})=\alpha\tilde{f}(\tilde{x})+\beta\tilde{f}(\tilde{y})\\&=\alpha f(x)+\beta f(y).\end{aligned} \tag{3.18}$$

再证 f 是连续的. 事实上, 对任何 $x\in X$,

$$|f(x)|=|\tilde{f}(\tilde{x})|\leqslant\|\tilde{f}\|\|\tilde{x}\|\leqslant\|\tilde{f}\|\|x\|,$$

即 f 是连续的, 并且

$$\|f\|\leqslant\|\tilde{f}\|. \tag{3.19}$$

根据(3.17), 显然当 $x\in L$ 时,

$$f(x)=\tilde{f}(\tilde{x})=\tilde{f}(0)=0,$$

即 $f\in L^\perp$. 由此可作 $(X/L)^*$ 到 $L^\perp$ 的映射

$$\psi:\ \tilde{f}\mapsto f. \tag{3.20}$$

现证 ψ 是线性的. 事实上, 对任何 $\tilde{f}, \tilde{g}\in(X/L)^*$, $\alpha, \beta\in\mathbb{\Lambda}$, 由(3.17)易知

$$\begin{aligned}(\alpha\tilde{f}+\beta\tilde{g})(\tilde{x})&=\alpha\tilde{f}(\tilde{x})+\beta\tilde{g}(\tilde{x})=\alpha f(x)+\beta g(x)\\&=(\alpha f+\beta g)(x),\quad x\in\tilde{x},\end{aligned}$$

即
$$\psi(\alpha\tilde{f}+\beta\tilde{g})=\alpha f+\beta g=\alpha\psi(\tilde{f})+\beta\psi(\tilde{g}).$$

再证 ψ 是双射. 当 $\tilde{f}\neq 0$ 时, 由(3.17)知道 $f\neq 0$, 即 ψ 是单射. 而对任何 $f\in L^\perp$, 由引理3的系, 必存在相应于 f 的

$$\tilde{f}\in(X/L)^*,$$

使得
$$\tilde{f}(\tilde{x})=f(x),$$

并且
$$\|\tilde{f}\|\leqslant\|f\|.$$

从而
$$\psi(\tilde{f})=f,$$

即 ψ 是满射. 所以 ψ 是双射.

由于 $\|\tilde{f}\|\leqslant\|f\|$, 再注意到(3.19), 立即可知 ψ 是保范的. 所以(3.12)成立. 证毕.

注意　等式(3.11)、(3.12)的两边是不同的空间，严格地说，这两个等式的等号的含意并未严格交待.不过从证明中可以看出，它们比线性保范同构的要求要强，即 φ、ψ 还应进一步分别满足(3.13)、(3.20).

5. 自反空间的性质

现在讨论自反空间的某些性质．在第一小节中，我们已介绍了自反空间的定义，并且已指出，如果 X 是自反的，那末它的第 $n(n\geqslant 1)$ 次共轭空间也是自反的．又显然，自反空间必是 Banach 空间.

定理 6(B. J. Pettis)　Banach 空间 X 是自反的充要条件是 X 的任何闭线性子空间 L 必是自反的.

证明　充分性(取 $L=X$)是显然的，下面证明必要性.

设 L 是 X 的闭子空间，由定理 5 的(3.11)，

$$L^*=X^*/L^\perp. \tag{3.11}$$

视 X^* 为定理 5 中的 X，由定理 5 的(3.12)又有

$$L^{**}=(X^*/L^\perp)^*=(L^\perp)^\perp, \tag{3.21}$$

这里 $(L^\perp)^\perp$ 应是 X^{**} 中与 $L^\perp(\subset X^*)$ 直交的元全体，但是 $X^{**}=X$，所以 $(L^\perp)^\perp$ 就是 X 中与 $L^\perp$ 直交的元全体．由引理 2 的(3)，$L^{**}=(L^\perp)^\perp=L$．证毕.

利用定理 6，我们又得到自反空间中另一个重要性质.

定理 7(W. F. Eberlein–V. L. Šmulian)　自反空间 X 中任何有界集 A[注]必是弱列紧的.

证明　设 A 是 X 中的有界集，$\{x_n\}$ 是 A 中点列．令 $L=\overline{\text{span}}\{x_n\}$．显然，$L$ 是 X 的可析闭线性子空间，由于 $X=X^{**}$，所以 L 也是自反的．由于 L 是可析的，由定理 2，$L=(L^*)^*$ 立即可知 L^* 是可析的．从定理 4(取定理 4 中的 $X=L^*$)，立即知道 $L=L^{**}$ 中有界点列 $\{x_n\}$ 必有弱*收敛的子点列(不妨设为 $\{x_n\}$ 本身)，即存在 $x\in L$，对任何 $f\in L^*(=X^*/L^\perp)$，

[注]　这里其实可以改进为弱有界集(参见 §4 定理 9 系后面的说明)，即对任何 $f\in X^*$，$\{f(x)|x\in A\}$是有界数集.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x). \tag{3.22}$$

由此可知，对任何 $f_1 \in X^*$，令 $f = f_1|L$，从(2.22)立即得到

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f_1(x), \tag{3.23}$$

即 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x. 证毕.

6. 共轭算子

设 E 为 n 维线性空间，e_1、…、e_n 为 E 中一组线性基. E^* 表示 E 上线性泛函全体所成的线性空间. 在 E^* 中可选出一组基 f_1、…、f_n，使得

$$f_\mu(e_\nu) = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

这时称 $\{f_\mu\}$ 是 $\{e_\nu\}$ 的对偶基. 设 T 是 E 上线性算子，在基 $\{e_\nu\}$ 下，相应于阵 $(a_{\mu\nu})$. 任取

$$x = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu, \quad h = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu f_\nu,$$

那末

$$\begin{aligned} h(Tx) &= \sum_{\mu,\nu} x_\nu y_\mu f_\mu(Te_\nu) = \sum_{\mu,\nu} y_\mu a_{\mu\nu} x_\nu \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} g_\mu x_\mu = g(x), \end{aligned} \tag{3.24}$$

其中 $g_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\mu} y_\nu$, $g = \sum_{1}^{n} g_\mu f_\mu$. 由此对每个 $h \in E^*$，相应地产生一个 $g \in E^*$，并且 $h \to g$ 是线性算子，记 $g = T^* h$. 根据线性代数知道，T^* 是 $E^* \to E^*$ 的线性算子，而且它在基 $\{f_\nu\}$ 之下所相应的阵正好是 $(a_{\mu\nu})$ 的转置阵 $(a_{\mu\nu})^T$. (3.24)式又可写为

$$h(Tx) = (T^* h)(x),$$

现在将这个概念推广到一般的赋范线性空间上去.

定义 设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子. 如果有 Y^* 到 X^* 的算子 T^*，使得对任何 $h \in Y^*$，$x \in X$，

$$(T^* h)(x) = h(Tx), \tag{3.25}$$

那末就称 T^* 是 T 的共轭算子，或伴随算子.

由前所述，赋范线性空间中线性算子的共轭算子相应于转置矩阵概念的推广.

如果视 $f(x)$ 为 x, f 的二元函数，并引入形式写法

$$\langle x, f\rangle \equiv f(x),$$

那末 T 和 T^* 的关系便是对任何 $x\in X$, $f\in X^*$,

$$\langle Tx, f\rangle = \langle x, T^*f\rangle. \tag{3.25}$$

定理 8 设 X 和 Y 是赋范线性空间，那末

(1) 对每个 $T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，必有唯一的共轭算子

$$T^*\in\mathfrak{B}(Y^*\to X^*);$$

(2) 映射 $*$: $T\mapsto T^*$ 是 $\mathfrak{B}(X\to Y)$ 到 $\mathfrak{B}(Y^*\to X^*)$ 的保范线性算子；

(3) $(I_X)^* = I_{X^*}$（这里 I_X、I_{X^*} 分别是 X、X^* 上的单位算子）；

(4) 设 Z 是赋范线性空间，$T\in\mathfrak{B}(X\to Y)$, $B\in\mathfrak{B}(Y\to Z)$，那末

$$T^*B^* = (BT)^*; \tag{3.26}$$

(5) $\mathscr{R}(T)^\perp = \mathscr{N}(T^*)$, $\overline{\mathscr{R}(T)} = \mathscr{N}(T^*)^\perp \cap Y$.

证明 (1) 对每个 $h\in Y^*$，由于

$$|\langle Tx, h\rangle| \leqslant \|h\|\|Tx\| \leqslant \|h\|\|T\|\|x\|,$$

显然，泛函 $x\mapsto h(Tx)$ 是 X 上的有界线性泛函，把它记为 T^*h，可得

$$\|T^*h\| \leqslant \|T\|\|h\|. \tag{3.27}$$

显然，算子 $h\mapsto T^*h$ 是线性的，所以 $T^*\in\mathfrak{B}(Y^*\to X^*)$，而且，满足 (3.25) 的算子 T^* 显然是由 T 唯一确定的．由 (3.27)，有

$$\|T^*\| \leqslant \|T\|.$$

(2) 再利用泛函延拓定理来证明 $\|T^*\| \geqslant \|T\|$．当 $T=0$ 时，显然成立，不妨设 $T\neq 0$，对任何 $x\in X$，如果 $Tx\neq 0$，根据泛函延拓定理，必有 $h\in Y^*$, $\|h\|=1$，使得 $h(Tx) = \|Tx\|$．于是

$$\|Tx\| = \langle Tx, h\rangle = \langle x, T^*h\rangle \leqslant \|T^*h\|\|x\| \leqslant \|T^*\|\|x\|.$$

对于 $Tx=0$ 的 x，显然也成立 $\|Tx\| \leqslant \|T^*\|\|x\|$，由此得到 $\|T\| \leqslant \|T^*\|$，从而 $\|T\| = \|T^*\|$，即映射 $*$: $T\mapsto T^*$ 是保范的．

设 $\alpha, \beta\in\Lambda$, T, $B\in\mathfrak{B}(X\to Y)$．从 T、B 和 h 的线性就得到

$$\langle x,\ (\alpha T+\beta B)^* h\rangle=\langle(\alpha T+\beta B)x,\ h\rangle$$
$$=\alpha\langle Tx,\ h\rangle+\beta\langle Bx,\ h\rangle$$
$$=\alpha\langle x,\ T^*h\rangle+\beta\langle x,\ B^*h\rangle$$
$$=\langle x,\ (\alpha T^*+\beta B^*)h\rangle,$$

因此 $T\mapsto T^*$ 是线性算子.

因此, * 映射是保范线性算子.

(3) 对任何 $h\in X^*$, $x\in X$, 由(3.25),

$$\langle x,\ I_X^* h\rangle=\langle I_X x,\ h\rangle=\langle x,\ h\rangle,$$

即 $I_X^* h=h$, 对一切 $h\in X^*$ 成立, 所以 I_X^* 是 X^* 上的单位算子 I_{X^*}.

(4) 对任何 $g\in Z^*$, $x\in X$,

$$\langle x,\ (BT)^* g\rangle=\langle BTx,\ g\rangle=\langle Tx,\ B^* g\rangle=\langle x,\ T^*B^*g\rangle.$$

由于对一切 $x\in X$ 上式成立, 所以

$$(BT)^* g=T^*(B^* g),\quad g\in Z^*,$$

这就得到(3.26).

(5) 从(3.25)知道 $\mathscr{R}(T)^\perp=\mathscr{N}(T^*)$. 从引理 2 的 (3) 知道 $\overline{\mathscr{R}(T)}=(\mathscr{R}(T)^\perp)^\perp\cap Y=\mathscr{N}(T^*)^\perp\cap Y$. 证毕.

既然映射 τ: $x\mapsto x^{**}$ 将 X 中的向量 x 嵌入第二共轭空间, 自然也可以把算子"嵌入"第二共轭空间.

设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子, T^* 是 Y^* 到 X^* 的有界线性算子, 而且 $\|T^*\|=\|T\|$. 这样, 算子 $T^{**}=(T^*)^*$ 就是 X^{**} 到 Y^{**} 的有界线性算子, 而且

$$\|T^{**}\|=\|T^*\|.$$

于是, 当 $x\in X$, $f\in Y^*$ 时

$$\langle f,\ T^{**}x^{**}\rangle=\langle T^*f,\ x^{**}\rangle=\langle x,\ T^*f\rangle=\langle Tx,\ f\rangle$$
$$=\langle f,\ (Tx)^{**}\rangle,$$

由此得到
$$(Tx)^{**}=T^{**}x^{**}.$$

如果把 X 嵌入 X^{**}, Y 嵌入 Y^{**}, 那末上式便是

$$Tx=T^{**}x.$$

这样便得到下列定理:

定理 9 设 X、Y 是两个赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，那末当 X、Y 分别嵌入 X^{**}，Y^{**} 时，T^{**} 便是 T 的延拓，并且

$$\|T^{**}\|=\|T\|.$$

例 4 设 $K(s,\ t)$ 是 $[a,\ b]\times[a,\ b]$ 上连续函数，积分算子

$$(T\varphi)(s)=\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)dt,\quad \varphi\in L^q([a,\ b],\ m),\tag{3.28}$$

作为 $L^q([a,\ b],\ m)$ 到 $L^p([a,\ b],\ m)$ $\left(p>0,\ q>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 算子，是有界线性算子(见 §1 习题 9)，又对任何

$$\psi\in L^q([a,\ b],\ m)=L^p([a,\ b],\ m)^*,$$

显然有 $\langle T\varphi,\ \psi\rangle=\int_a^b\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)\psi(s)dt\,ds=\langle\varphi,\ h\rangle$,

其中，$h(t)=\int_a^b K(s,\ t)\psi(s)ds$. 由此可知

$$T^*\psi=\int_a^b K(s,\ t)\psi(s)ds.\tag{3.29}$$

在分析数学中，除了积分算子外，经常遇到的是微分算子. 但一般说来微分算子是无界的，所以我们还有必要引入更一般的线性算子的共轭算子概念.

设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子，其定义域为 $\mathscr{D}(T)$. 我们问在 Y^* 中是否存在向量 y^*，对 y^*，存在 $x^*\in X^*$，使得

$$\langle Tx,\ y^*\rangle=\langle x,\ x^*\rangle,\ x\in\mathscr{D}(T)\tag{3.30}$$

成立. 显然，这是有的. 例如取 $y^*=0$, $x^*=0$，上式就成立. 但是为了推广共轭算子概念，自然要问：对于上述 y^*，能否做到只能有唯一的 x^* 呢？一般地说，如果 $\overline{\mathscr{D}(T)}\neq X$，那末 x^* 不唯一. 因为只要 $x'^*\perp\mathscr{D}(T)$，用 $x^*+x'^*$ 代替 x^*，就同样适合(3.30). 为此我们引入下面定义

定义 设 X、Y 是两个赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的线性算子，如果 T 的定义域 $\mathscr{D}(T)$(必是线性子空间)在 X 中稠密，称 T 是 X 到 Y 的稠定线性算子.

显然，对给定的 y^*，如果有 x^* 使(3.30)成立，那末 x^* 由 y^* 唯一确定的充要条件是 $\overline{\mathscr{D}(T)}=X$，即 T 是稠定线性算子.

对稠定线性算子，利用上述唯一性，我们可以引入 T 的共轭算子的概念.

定义 设 X、Y 是两个赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的稠定线性算子，令 $\mathscr{D}(T^*)$ 是 Y^* 中能找到 $x^*\in X^*$，使(3.30)成立的 y^* 全体. 称 $\mathscr{D}(T^*)(\subset Y^*)$ 到 X^* 的算子

$$T^*:\ y^*\mapsto x^*$$

为 T 的共轭算子或伴随算子.

显然，T 与 T^* 的关系是

$$\langle Tx,\ y^*\rangle=\langle x,\ T^*y^*\rangle,\ x\in\mathscr{D}(T),\ y^*\in\mathscr{D}(T^*). \tag{3.31}$$

为了获得与定理 6 类似的结果，我们还需引入不是定义在全空间的两个算子的线性运算和乘积运算.

定义 设 X、Y、Z 是三个赋范线性空间，T 和 B 是 X 到 Y 的两个线性算子，定义域分别是 $\mathscr{D}(T)$，$\mathscr{D}(B)$. 又设 C 是 Y 到 Z 的线性算子，定义域是 $\mathscr{D}(C)$. 今引入运算如下：

(1) 对任何 $\alpha\in\mathbb{K}$，规定算子 αT 的定义域 $\mathscr{D}(\alpha T)=\mathscr{D}(T)$，并且对任何 $x\in\mathscr{D}(T)$，$(\alpha T)x=\alpha Tx$.

(2) 规定算子 $T+B$ 的定义域 $\mathscr{D}(T+B)=\mathscr{D}(T)\cap\mathscr{D}(B)$，并且对任何 $x\in\mathscr{D}(T+B)$，$(T+B)x=Tx+Bx$.

(3) 规定算子 CT 的定义域

$$\mathscr{D}(CT)=\{x|x\in\mathscr{D}(T),\ Tx\in\mathscr{D}(C)\},$$

并且对任何 $x\in\mathscr{D}(CT)$，$(CT)x=CTx$.

定理 10 设 X、Y、Z 是三个赋范线性空间. T、T_1、T_2 都是 X 到 Y 的稠定线性算子，C 是 Y 到 Z 的稠定线性算子，那末

(1) T^* 是 Y^* 到 X^* 的线性算子(一般地说，$\mathscr{D}(T^*)$ 并不等于 Y^*)，并且是闭算子；

(2) 对任何 $\alpha\in\mathbb{K}$，$(\alpha T)^*\supset\alpha T^*$，当 $\alpha\neq0$ 时，$(\alpha T)^*=\alpha T^*$；

(3) 当 $\overline{\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2)}=X$ 时，$(T_1+T_2)^*\supset T_1^*+T_2^*$；

(4) 当 $\mathscr{D}(T_1)=X$，并且 T_1 是有界线性算子时，

$$(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*;$$

(5) 当 $T_1\subset T_2$ 时，$T_2^*\subset T_1^*$；

(6) 当 CT 是稠定算子时，

$$(CT)^*\supset T^*C^*;$$

特别，当 $C\in\mathfrak{B}(Y\to Z)$ 时，

$$(CT)^*=T^*C^*;$$

(7) $\mathscr{R}(T)^\perp=\mathscr{N}(T^*)$，$\overline{\mathscr{R}(T)}=\mathscr{N}(T^*)^\perp\cap Y$.

证明　(1) 证 T^* 是线性算子　如果 $y_1^*, y_2^*\in\mathscr{D}(T^*)$，那末

$$\langle Tx, y_i^*\rangle=\langle x, T^*y_i^*\rangle,\quad i=1, 2, x\in\mathscr{D}(T). \tag{3.32}$$

由此可知对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$，$\alpha, \beta\in\mathbb{A}$，

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\alpha y_1^*+\beta y_2^*)\rangle&=\langle Tx, \alpha y_1^*+\beta y_2^*\rangle\\&=\alpha\langle Tx, y_1^*\rangle+\beta\langle Tx, y_2^*\rangle\\&=\alpha\langle x, T^*y_1^*\rangle+\beta\langle x, T^*y_2^*\rangle\\&=\langle x, \alpha T^*y_1^*+\beta T^*y_2^*\rangle,\end{aligned}$$

即 T^* 是线性算子.

再证 T^* 是闭的. 设 $\{y_n^*\}$ 是 $\mathscr{D}(T^*)$ 中一列点，并且收敛于 y^*，而且 $\{T^*y_n^*\}$ 收敛于 x^*，因而从

$$\langle Tx, y_n^*\rangle=\langle x, T^*y_n^*\rangle,\quad x\in\mathscr{D}(T),$$

取极限，立即得到

$$\langle Tx, y^*\rangle=\langle x, x^*\rangle,\quad x\in\mathscr{D}(T), \tag{3.33}$$

因此，$y^*\in\mathscr{D}(T^*)$，并且 $T^*y^*=x^*$. 所以 T^* 是闭算子.

(2) 当 $\alpha\neq 0$ 时，因为 $\mathscr{D}(\alpha T)=\mathscr{D}(T)$，所以，对任何

$$y^*\in\mathscr{D}(T^*),$$

$$\langle\alpha Tx, y^*\rangle=\alpha\langle Tx, y^*\rangle=\alpha\langle x, T^*y^*\rangle=\langle x, \alpha T^*y^*\rangle,$$

即 $y^*\in\mathscr{D}((\alpha T)^*)$（从而 $\mathscr{D}(T^*)\subset\mathscr{D}((\alpha T)^*)$），并且

$$(\alpha T)^*y^*=\alpha T^*y^*,$$

这就是说，$(\alpha T)^*\supset\alpha T^*$.

再对算子 αT 和 $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$ 应用这个结论，便得到

$$[\beta(\alpha T)]^*\supset\beta(\alpha T)^*,$$

即 $T^*\supset\beta(\alpha T)^*$, 从而 $\alpha T^*\supset(\alpha T)^*$. 因此, $(\alpha T)^*=\alpha T^*(\alpha\neq 0)$.

而当 $\alpha=0$ 时, 显然, $\mathscr{D}((OT)^*)=Y^*$, 但

$$\mathscr{D}(OT^*)=\mathscr{D}(T^*)\subset Y^*,$$

所以当 $\alpha=0$ 时, 一般只有 $(\alpha T)^*\supset\alpha T^*$.

(3) 因为 $\overline{\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2)}=X$, 所以 T_1+T_2 是稠定的, 从而 $(T_1+T_2)^*$ 存在. 对任何 $y^*\in\mathscr{D}(T_1^*)\cap\mathscr{D}(T_2^*)=\mathscr{D}(T_1^*+T_2^*)$, 由于

$$\langle T_ix,\ y^*\rangle=\langle x,\ T_i^*y^*\rangle,\ x\in\mathscr{D}(T_i),\ i=1,\ 2, \tag{3.34}$$

从而 $$\langle(T_1+T_2)x,\ y^*\rangle=\langle x,\ (T_1^*+T_2^*)y^*\rangle,$$

$$x\in\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2),\ y^*\in\mathscr{D}(T_1^*)\cap\mathscr{D}(T_2^*),$$

即 $\mathscr{D}(T_1^*)\cap\mathscr{D}(T_2^*)=\mathscr{D}(T_1^*+T_2^*)\subset\mathscr{D}((T_1+T_2)^*)$, 并且, 当 $y^*\in\mathscr{D}(T_1^*+T_2^*)$ 时,

$$(T_1+T_2)^*y^*=(T_1^*+T_2^*)y^*,$$

这就是说 $(T_1+T_2)^*\supset T_1^*+T_2^*$.

(4) 因为 $T_1\in\mathscr{B}(X\to Y)$, 所以 $T_1^*\in\mathscr{B}(Y^*\to X^*)$. 利用(2)于算子 T_1+T_2 和 $-T_1$, 可得

$$\mathscr{D}([(T_1+T_2)-T_1]^*)\supset\mathscr{D}((T_1+T_2)^*+(-T_1^*)),$$

即 $$\mathscr{D}((T_1+T_2)^*)\subset\mathscr{D}(T_2^*)=\mathscr{D}(T_1^*+T_2^*),$$

因此 $\mathscr{D}((T_1+T_2)^*)=\mathscr{D}(T_1^*+T_2^*)$. 由此易知

$$(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*.$$

(5) 是显然的.

(6) 当 $y^*\in\mathscr{D}(T^*C^*)=\{y^*|y^*\in\mathscr{D}(C^*),\ 并且\ C^*y^*\in\mathscr{D}(T^*)\}$ 时, 显然

$$\langle CTx,\ y^*\rangle=\langle Tx,\ C^*y^*\rangle=\langle x,\ T^*C^*y^*\rangle,\ x\in\mathscr{D}(CT), \tag{3.35}$$

即 $\mathscr{D}(T^*C^*)\subset\mathscr{D}((CT)^*)$, 并且 $(CT)^*y^*=T^*C^*y^*$. 所以

$$(CT)^*\supset T^*C^*.$$

(7) 和定理 8 的(5)一样可以证得. 证毕.

而当 $C\in\mathscr{B}(Y\to Z)$ 时, 对任何 $x\in\mathscr{D}(CT)$, $z\in\mathscr{D}((CT)^*)$, 有

$$(Tx,\ Cz)=(C^*Tx,\ z)=(x,\ (CT)^*z),$$

即 $C^*z\in\mathscr{D}(T^*)$, 并且

$$(x,\ T^*C^*z)=(Tx,\ C^*z)=(x,\ (CT)^*z)$$

成立，即$(CT)^*\subset T^*C^*$．从而$(CT)^*=T^*C^*$．

例 5　设$D=\{f\,|\,f(t)$ 在 $[0,\ 1]$ 上全连续，$f(0)=f(1)=0$，$f'\in L^{p'}([0,\ 1],\ m)$，$\infty>p'>1\}$．显然，$D$ 是 $L^p([0,\ 1],\ m)(\infty>p>1)$ 中稠密线性子集．作以 D 为定义域的算子 T 如下：

$$T:\ f\mapsto\frac{d}{dt}f. \tag{3.36}$$

下面我们来求出 T^*．

设 $g\in L^{q'}([0,\ 1],\ m)\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1\right)$ 和 $g^*\in L^q([0,\ 1],\ m)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$满足

$$\langle Tf,\ g\rangle=\langle f,\ g^*\rangle,\quad f\in\mathscr{D}(A)=D,$$

即满足

$$\int_0^1\frac{d}{dt}f(t)g(t)dt=\int_0^1 f(t)g^*(t)dt,\ f\in\mathscr{D}(A)=D. \tag{3.37}$$

记 $g^{**}(t)=\int_0^t g^*(\tau)d\tau$，利用分部积分，由上式立即得到

$$\left\langle\frac{d}{dt}f,g+g^{**}\right\rangle=0. \tag{3.38}$$

我们注意，虽然$\left\{\frac{d}{dt}f\,|\,f\in D\right\}$并不充满 $L^{p'}([0,\ 1],\ m)$，但也只差一维，即有等式

$$\{f'\,|\,f\in D\}=\left\{\varphi-\int_0^1\varphi(\tau)d\tau e\,|\,\varphi\in L^{p'}([0,\ 1],\ m)\right\},$$

其中 e 表示 $L^{p'}([0,\ 1],\ m)$ 中恒取常数1的函数．事实上，对任何 $\varphi\in L^{p'}([0,\ 1],\ m)$，函数

$$f(t)=\int_0^t\varphi(\tau)d\tau-t\int_0^1\varphi(\tau)d\tau \tag{3.39}$$

属于 D，并且$f'=\varphi-\left(\int_0^1\varphi(\tau)d\tau\right)e$，即

$$\left\{\varphi-\int_0^1\varphi(\tau)d\tau e\,|\,\varphi\in L^{p'}([0,\ 1],\ m)\right\}\subset\{f'\,|\,f\in D\}.$$

反之，对任何 $f\in D$，只要取 $\varphi(t)=f'(t)-\int_0^1 f'(\tau)d\tau$ 就可以得到

相反的包含关系：

$$\{f' \mid f\in D\}\subset\left\{\varphi-\int_0^1\varphi(\tau)d\tau e \mid \varphi\in L^{p'}([0,\ 1],\ m)\right\}.$$

令 $h=g+g^{**}$，利用(3.38)、(3.39)，就得到

$$\langle\varphi,\ h\rangle-\int_0^1\varphi(\tau)d\tau\int_0^1 h(\tau)d\tau=0, \tag{3.40}$$

即 $\left\langle\varphi,\ h-\int_0^1 h(\tau)d\tau\right\rangle=0$，从而 $h=\int_0^1 h(\tau)d\tau=c$. 因此

$$g+g^{**}=C,\ \text{或}\quad g(t)=C-\int_0^t g^*(\tau)d\tau,$$

这就是说

$$\mathscr{D}(T^*)=\{g \mid g(t)\text{在}[0,\ 1]\text{上全连续},\ g'\in L^q([0,\ 1],\ m)\}, \tag{3.41}$$

并且

$$T^*g=-\frac{d}{dt}g. \tag{3.42}$$

7. 强、弱拓扑

一般说来，算子序列的强收敛、弱收敛的概念不能容纳在度量空间中按距离收敛的概念之中，所以对算子收敛的描述可按拓扑线性空间的方法引入下面几种拓扑.

定义 设 X、Y 是赋范线性空间，在线性空间 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 上用下面三种方式引入半范数族成为局部凸拓扑线性空间：

(i) 取范数 $\|\cdot\|$，由它引入的拓扑称为一致拓扑；

(ii) 取半范数族 $\{\|Ax\| \mid x\in X\}$，由它们引入的拓扑称为强拓扑；

(iii) 取半范数族 $\{|y(Ax)| \mid x\in X,\ y\in Y^*\}$，由它们引入的拓扑称为弱拓扑。

显然，$\mathscr{B}(X\to Y)$ 中一列算子 $\{A_n\}$ 按定义所说的一致(强、弱)收敛于 A，分别等价于按一致(强、弱)拓扑收敛于 A.

一致拓扑强于强拓扑，强拓扑强于弱拓扑. 而例1、例2告诉我们，在一般情况下，一致拓扑不同于强拓扑，强拓扑不同于弱拓扑.

自然，对于一个赋范线性空间 X 的共轭空间 X^* 来说，可以

引入强拓扑和弱*拓扑的概念：即

（i）用范数$\|\cdot\|$所引入的拓扑称为 X^* 上的强拓扑；

（ii）用半范数族$\{|f(x)|\,|x\in X\}$所引入的拓扑，称为 X^* 上的弱*拓扑．

同样，在赋范线性空间 X 上可以引入下面两种拓扑：

（i）用$\|\cdot\|$所引入的拓扑称为 X 上的强拓扑；

（ii）用半范数族$\{|f(x)|\,|f\in X^*\}$所引入的拓扑，称为 X 上的弱拓扑．

根据按定义域中弱的拓扑连续的映射必按强的拓扑连续的道理，立即可知定义在 $\mathfrak{B}(X\to Y)$ 上的映射，如果按弱拓扑连续，那末必按强拓扑（更按一致拓扑）连续．定义在 X^* 上的映射，如果按弱*拓扑连续，那末必按强拓扑连续．同样，定义在 X 上的映射，如果按弱拓扑连续，那末必按强拓扑连续．

由于不同场合有不同的拓扑，因而就有按不同拓扑的闭集．显然，一个集 A 按较弱拓扑的极限点，一般说来不少于 A 按较强拓扑的极限点，从而按较弱拓扑的闭集，必也是按较强拓扑的闭集．反过来，一般说是不对的．例如在 $L([0,\ 2\pi],\ m)$ 中，集$\{\sin nt|n=1,\ 2,\ \cdots\}$没有极限点，因而是强闭的，但$\{\sin nt\}$弱收敛于 0，从而对任何有限个

$$f_1,\ \cdots,\ f_n\in L([0,\ 2\pi],\ m)^*=L^\infty([0,\ 2\pi],\ m)$$

中的元，以及任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，当 $k\geqslant N$ 时

$$\left|\int_0^{2\pi} f_i(t)\sin kt\,dt\right|<\varepsilon,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

即在 O 点的弱环境 $\{x|x\in L([0,\ 2\pi],\ m),\ |f_i(x)|<\varepsilon,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ f_i\in L([0,\ 2\pi],\ m)^*\}$ 中含有 $\{\sin nt\}$ 中点，但 O 点是集$\{\sin nt\}$的按弱拓扑的极限点．

但对于赋范线性空间，利用泛函延拓定理（实际上用的是隔离定理），我们有如下结果．

定理 11　设 A 是赋范线性空间 X 的凸子集，那末 A 是（强）

闭的充要条件是 A 为弱闭的[注].

证明　显然，只要证明在 A 是强闭的假设下，A 的任何按弱拓扑的极限点 x_0 必属于 A 就可以了. 如果不对，那末 $x_0 \bar{\in} A$. 由 Ascoli 的隔离定理，必存在 $f \in X^*$ 和正数 ε，使得

$$f(x) > f(x_0) + \varepsilon, \quad x \in A,$$

从而在 x_0 的弱环境 $\{x \mid |f(x-x_0)| < \varepsilon\}$ 中就不含有 A 的点，因而 x_0 不可能是 A 的按弱拓扑的极限点，这与假设矛盾. 证毕.

特别，有下面的系：

系　赋范线性空间中，任何(强)闭线性子空间必是弱闭的.

在 X 是可析赋范空间的情况下，我们证明过 X^* 中任何有界集必是弱*列紧(见定理 4). 其实，利用 Тихонов 定理(见第四章 §8 定理 1)可以证明更一般的下述结果.

定理 12　设 X 是赋范线性空间，那末共轭空间 X^* 中任何(按范数)有界的弱*闭集按弱*拓扑都是紧的.

这个定理是赋范线性空间理论中的一个基本定理，它有不少应用. 这个定理在局部凸线性拓扑空间理论中也有推广. 这个定理是一般拓扑学应用在泛函分析中的重要成就之一.

习　　题

1. 证明 l 不是自反的.

2. 证明 $C[a, b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 的充要条件是存在常数 M，使得 $\|x_n\| \leqslant M (n=1, 2, \cdots)$，并且对每个 $t \in [a, b]$，

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$$

(在证明 $\|x_n\| \leqslant M$ 必要性时，不要用后面 §4 的共鸣定理).

3. 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 的闭线性子空间 M 中一列点，并且 $x_0 = (弱)\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，证明 $x_0 \in M$.

4. 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的点列，证明：如果 $x_0 = (弱)\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，那末必存在一列数 $\{\alpha_k^{(n)} | k=1, 2, \cdots, k_n, n=1, 2, \cdots\}$，使得

[注]　因为在赋可列拟范空间(参见 §2 习题 10)，Ascoli 隔离定理成立(见 §2 习题 12)，因而定理 11 在 X 是赋可列拟范情况下也成立. 当然，此时 A 强闭的条件应改为按赋可列拟范导出的拓扑是闭的条件.

$$x_0=(\text{强})\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\alpha_k^{(n)}x_k.$$

5. 证明 l 上任何弱收敛点列必是强收敛点列.

6. 自反的 Banach 空间 X 可析的充要条件是 X^* 是可析的.

7. 设 F 是 Banach 空间 X 的弱闭集, 证明 F 中任何弱收敛点列$\{x_n\}$的极限 x_0 必仍在 F 中.

8. 设 X 是 Banach 空间. 证明对任何 $r\geqslant 0$, 集 $\{x\mid \|x\|\leqslant r\}$ 必是弱闭集. 又问集$\{x\mid \|x\|\geqslant r\}$是否是弱闭集?

§4 逆算子定理和共鸣定理

在线性分析中, 除了§3中所介绍的线性泛函延拓定理这一基本定理之外, 还有几个重要的基本定理, 它们是开映象原理、逆算子定理、闭图象定理以及共鸣定理等. 这些定理都是经常被引用的.

1. 逆算子

在§1中介绍了线性算子的加、减以及乘法运算. 这一小节和下一小节要考察算子的除法, 即讨论线性算子的逆算子.

设 B 是集 X 到集 Y 的算子, 其定义域、值域分别为 $\mathscr{D}(B)$、$\mathscr{R}(B)$. 如果 B 是单射, 那末 B 的逆算子 B^{-1} 存在, 并且

$$\mathscr{D}(B^{-1})=\mathscr{R}(B),\ \mathscr{R}(B^{-1})=\mathscr{D}(B).$$

进一步, 当 X、Y 还是两个线性空间, B 是线性算子时, 易知 B^{-1} 也是线性算子. 根据第一章§2和本章§1算子乘法的定义, 易知

$$B^{-1}B=I_{\mathscr{D}(B)},\ BB^{-1}=I_{\mathscr{R}(B)}. \tag{4.1}$$

反之, 如果有 Y 到 X 的算子 C, 定义域为 $\mathscr{D}(C)$, 使得

$$CB=I_{\mathscr{D}(B)},\ BC=I_{\mathscr{R}(B)}, \tag{4.2}$$

那末 B 必是单射, 并且 $B^{-1}=C|_{\mathscr{R}(B)}$. 从而当 B 是线性算子时, C 也必是线性算子.

再进一步, 如果在 X、Y 上还有准范数, 那末就可引入下列定义.

定义 设 X、Y 是两个赋准范线性空间, B 是线性算子,

$$\mathscr{D}(B)\subset X,\quad \mathscr{R}(B)\subset Y,$$

如果 B^{-1} 存在，$\mathscr{D}(B^{-1})=\mathscr{R}(B)=Y$，并且 B^{-1} 是连续的，那末称 B 是正则算子.

显然有下面的引理.

引理 1 设 X、Y 是两个赋准范线性空间，B 是线性算子，$\mathscr{D}(B)\subset X$，$\mathscr{R}(B)\subset Y$，那末 B 为正则算子的充要条件是存在 Y 到 X 的连续算子 C，$\mathscr{D}(C)=Y$，使得

$$CB=I_{\mathscr{D}(B)},\ BC=I_Y. \tag{4.3}$$

系 设 X、Y 是两个赋范线性空间，$T\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，并且 T 是正则的，那末 T^* 也是正则的，并且 $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$.

证明 因为 $T^{-1}\in\mathfrak{B}(Y\to X)$，而且

$$TT^{-1}=I_Y,\ T^{-1}T=I_X, \tag{4.4}$$

再根据 §3 定理 8 的(3)和(4)，对上式两边作*运算就得到

$$(T^{-1})^*T^*=I_{Y^*},\ T^*(T^{-1})^*=I_{X^*}, \tag{4.5}$$

由引理 1 可知 T^* 是正则的，并且 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$. 证毕.

定理 1 设 X、Y、Z 都是赋准范线性空间，如果 A 是 X 到 Y 的正则算子，B 是 Y 到 Z 的正则算子，并且 $\mathscr{D}(B)=Y$，那末 BA 是 X 到 Z 的正则算子，并且 $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$.

证明 根据假设，A^{-1}、B^{-1} 都是连续的，并且

$$\mathscr{D}(B^{-1})=Z,\quad \mathscr{D}(A^{-1})=Y,$$

易知 $A^{-1}B^{-1}$ 是 Z 到 X 的连续线性算子，又显然有

$$(A^{-1}B^{-1})BA=I_{\mathscr{D}(A)},\ BA(A^{-1}B^{-1})=I_Z. \tag{4.6}$$

由引理 1，BA 是正则算子，并且 $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$. 证毕.

设 X、Y 都是赋准范线性空间(甚至是赋范线性空间)，B 是 X 到 Y 的连续线性算子，并且是双射. 这时 B^{-1} 未必是连续的.

例 1 设 B 是定义在 $C[a,b]$ 上的积分算子：

$$B:\ \varphi(t)\mapsto\int_a^t\varphi(\tau)d\tau,\ \varphi\in C[a,b].$$

取 $Y=\{y(t)\mid y\in C[a,b],\ y'(t)\text{ 连续},\ y(a)=0\}$. 在 Y 上取 $C[a,b]$ 中范数作为范数. 这样，算子 B 是 Banach 空间 $C[a,b]$

到赋范线性空间 Y 的连续线性算子，并且是双射．如果特别取

$$y_n(t)=\sin nt \quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

显然，存在 N_0，当 $n\geqslant N_0$ 时，$\|y_n\|=1$．但由于

$$(B^{-1}y)(t)=y'(t),$$

所以
$$(B^{-1}y_n)(t)=n\cos nt,$$

从而
$$\|B^{-1}y_n\|=n\to\infty \quad (n\to\infty).$$

所以 B^{-1} 不是有界线性算子，即 B^{-1} 不是连续算子．

2．开映象原理和逆算子定理

一切方程的求解问题，可归纳为下面的一般形式：

$$Bx=y. \tag{4.7}$$

显然，第一小节中讨论的逆算子概念是与方程(4.7)的解的唯一性密切相关的；而逆算子 B^{-1} 是否连续，与方程(4.7)的解 x 是否连续地依赖于 y 的问题密切相关．例如，当 X、Y 都是赋准范线性空间时，B 为正则算子就意味着方程(4.7)对每个 $y\in Y$ 都有唯一解 x，并且连续地依赖于 y．因而，研究算子什么时候有逆，逆算子什么时候连续，逆算子的形式是什么等等都是泛函分析中重要的问题．这就是算子谱论的中心课题．这一些我们将在算子谱论一章中作专门讨论．在这一小节中，我们要讨论的是(一般的)解的连续性问题：当 X、Y 都是赋准范线性空间，如果 $y\in\mathscr{R}(B)$，并且 $\mathscr{R}(B)$ 中一列点 $\{y_n\}$ 收敛于 y，问是否存在相应于 y_n 的解 $x_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，使得 x_n 收敛于相应于 y 的某个解 x？对于线性算子 B，我们自然期望得到更深入的结果．这就是开映象原理和逆算子定理．

引理 2　设 X、Y 是赋准范线性空间，B 是 X 到 Y 的开线性算子，那末(4.7)必对每个 $y\in Y$ 都有解 x，并且对任何 $\{y_n\}\subset Y$，$y_n\to y$，必有解 x_n：$Bx_n=y_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$，使得 $x_n\to x$．

证明　因为 B 是开算子，所以对任何 $\varepsilon>0$，X 中环境 $O(0,\varepsilon)$ 的象 $BO(0,\ \varepsilon)$ 是 Y 中开集．又因为 B 是线性的，所以

$$B0=0\in BO(0,\ \varepsilon),$$

从而存在 Y 中 0 点的 δ-环境 $G(0,\ \delta)$，使得

$$BO(0,\ \varepsilon)\supset G(O,\ \delta). \tag{4.8}$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，相应地有 δ_n(今后，不妨设 $\delta_{n+1}<\delta_n$)，使得

$$BO\left(0,\ \frac{1}{n}\right)\supset G(0,\ \delta_n). \tag{4.9}$$

对任何 $y\in Y$，显然必存在常数 M，使得 $\frac{y}{M}\in G(0,\ \delta)$，从而存在 $x'\in O(0,\ \varepsilon)$，使得 $Bx'=\frac{y}{M}$，即 $BMx'=y$. 这就是说，(4.7)对一切 $y\in Y$ 有解 $x=Mx'$.

假设 $\{y_n\}$ 是 Y 中点列，并且 $y_n\to y(n\to\infty)$. 显然，$\{y_n\}$ 中最多除去有限项外，对每个 n，总有 ν_n，当 $n\to\infty$ 时，$\nu_n\to\infty$，并且

$$\|y_n-y\|<\delta_{\nu_n}.$$

对于 y_n-y，存在 $x'_n\in O\left(0,\ \frac{1}{\nu_n}\right)$，从而 $x'_n\to 0$，使得 $Bx'_n=y_n-y$，因此 $B(x+x'_n)=y+y_n-y=y_n$. 取 $x_n=x+x'_n$，显然它就满足引理的要求. 证毕.

由引理 2，立即得到关于(4.7)的解的连续性的系.

系 设 X、Y 是赋准范线性空间，B 是 X 到 Y 的双射，并且是开的线性算子，那末方程(4.7)的解 x 连续地依赖于 y，即 B^{-1} 是连续线性算子.

自然要问：怎样的线性映射是开的呢？下面是一个基本定理.

定理 2(开映象原理) 设 X、Y 是两个 Fréchet 空间，B 是 X 到 Y 的连续线性算子，并且 $\mathscr{R}(B)=Y$，那末 B 必是开算子.

证明 (I) 证明的关键显然在于证明：对于 X 中任何 ε-环境 $O(0,\ \varepsilon)$，必存在 Y 中的 δ-环境 $G(0,\ \delta)$，使得

$$BO(0,\ \varepsilon)\supset G(0,\ \delta). \tag{4.10}$$

事实上，现假设(4.10)成立，这时对 X 中给定的开集 O，以及任何 $x_0\in O$，必存在 $\varepsilon>0$，$O(x_0,\ \varepsilon)\subset O$，但 $O(x_0,\ \varepsilon)=x_0+O(0,\ \varepsilon)$，$B$ 是线性的，所以

$$BO\supset BO(x_0,\ \varepsilon)=Bx_0+BO(0,\ \varepsilon)\supset Bx_0+G(0,\ \delta),$$

即 Bx_0 是 BO 的内点，因而 BO 是 Y 中开集. 由于 $2G(0,\ \eta_1)$是

Y 中开集，从而存在 $\delta>0$，使得

$$G(0, \delta)\subset 2G(0, \eta_1)\subset BO(0, \varepsilon),$$

即(4.10)成立.

(II) 我们虽不能很快证明(4.10)，但利用第二纲性能很快证明下述事实：对任何 $\varepsilon>0$，必存在某个 y_0 的 η-环境 $G(y_0, \eta)$，使得

$$\overline{BO(0, \varepsilon)}\supset G(y_0, \eta). \tag{4.11}$$

事实上，如记 $O_n=nO(0, \varepsilon)$，$G_n=BO_n(n=1, 2, \cdots)$，显然

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n,$$

由假设 $\mathscr{R}(B)=Y$，立即得到

$$BX=B\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n=Y.$$

因为 Y 是第二纲集，所以不可能所有的 $G_n(n=1, 2, \cdots)$ 全是疏朗集，即至少有一个，例如 $G_N=BO_N$ 在 Y 中某点 y' 的 τ-环境 $G(y', \tau)$ 中稠密. 由于

$$\left\|\frac{1}{N}y-\frac{1}{N}y_n\right\|\to 0$$

等价于 $\|y-y_n\|\to 0$，因而 $BO(0, \varepsilon)=\frac{1}{N}G_N$ 在 $\frac{1}{N}G(y', \tau)$ 中稠密. 但 $\frac{1}{N}G(y', \tau)$ 仍是开集，所以有 y_0 以及 $\eta>0$，使得

$$G(y_0, \eta)\subset\frac{1}{N}G(y', \tau).$$

从而(4.11)成立.

(III) 由(4.11)很快可以证明必存在 Y 的 η-环境 $G(0, \eta)$ 使得

$$\overline{BO(0, \varepsilon)}\supset G(0, \eta). \tag{4.12}$$

事实上，由(4.11)，对给定的 $\varepsilon>0$，必存在 $y_1\in Y$ 以及 $\eta_1>0$，使得

$$\overline{BO\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)}\supset G(y_1, \eta_1). \tag{4.13}$$

因为 $\|x\|=\|-x\|$，B 是线性算子，所以

$$-O\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)=O\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$BO\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)=B\left(-O\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=-BO\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

并且 $$\overline{BO\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)}=\overline{-BO\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)}=-\overline{BO\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

再利用(4.13)立即得到

$$\overline{BO\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)}=-\overline{BO\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)}\supset -G(y_1,\ \eta_1)$$
$$=G(-y_1,\ \eta_1). \tag{4.14}$$

对任何 $y\in 2G(0,\ \eta_1)$，显然有

$$y=\left(y_1+\frac{y}{2}\right)+\left(-y_1+\frac{y}{2}\right),$$

由(4.13)可知必存在 $O\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)$中点列$\{x_n\}$、$\{z_n\}$，使得

$$Bx_n\to y_1+\frac{y}{2},\ Bz_n\to -y_1+\frac{y}{2},\ (n\to\infty). \tag{4.15}$$

利用准范数的三角不等式，显然 $\{x_n+z_n\}$ 是 $O(0,\ \varepsilon)$ 中点列. 由(4.15)，$B(x_n+z_n)\to y\ (n\to\infty)$，即

$$\overline{BO(0,\ \varepsilon)}\supset 2G(0,\ \eta_1). \tag{4.16}$$

但 $2G(0,\ \eta_1)$仍是 Y 中开集，所以存在 $\eta>0$，使得

$$G(0,\ \eta)\subset 2G(0,\ \eta_1)\subset\overline{BO(0,\ \varepsilon)}.$$

(IV) 现在利用(4.12)来证明(4.10)成立. 因为(4.12)成立，所以对任何自然数 n，必存在 $\delta_n>0$，不妨设 $\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_n>\cdots$，使得

$$\overline{BO\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)}\supset G(0,\ \delta_n),\quad n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{4.17}$$

取 $\delta=\delta_1$，对任何 $y\in G(0,\ \delta)$，由(4.17)知道必存在 $x_1\in O\left(0,\frac{\varepsilon}{2^2}\right)$，使得

$$\|y-Bx_1\|<\delta_2,$$

同样，对 $y-Bx_1\in G(0,\ \delta_2)$，必存在 $x_2\in O\left(0,\ \frac{\varepsilon}{2^3}\right)$，使得

$$\|B(x_1+x_2)-y\|=\|Bx_2-(y-Bx_1)\|<\delta_3.$$

如此手续一直做下去，得到一列$\{x_n\}$，满足

$$\left\|B\sum_{i=1}^{m}x_i-y\right\|<\delta_{m+1},\ m=1,\ 2,\ \cdots. \tag{4.18}$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon$，所以$\left\{\sum\limits_{n=1}^{m}x_n\right\}$是$X$中基本点列，因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=x$，并且$x\in O(0,\ \varepsilon)$。而由(4.18)可知$\left\{B\sum\limits_{i=1}^{m}x_i\right\}$是$Y$中基本点列，并且$\lim\limits_{n\to\infty}B\left(\sum\limits_{1}^{n}x_n\right)=y$。但$B$是连续的，所以$Bx=y$，即$BO(0,\ \varepsilon)\supset G(0,\ \delta)$。证毕。

对定理2的证明稍作仔细分析，不难得到如下推广。

定理2′　设X是Fréchet空间，Y是赋准范线性空间，B是X到Y的连续线性算子，$\mathscr{D}(B)$是它的定义域，如果B是闭算子，$\mathscr{R}(B)$是Y中第二纲集，那末$\mathscr{R}(B)=Y$，并且B将相对于$\mathscr{D}(B)$的开集映成Y中的开集，即对任何X中开集O，必存在Y中开集G，使得$B(\mathscr{D}(B)\cap O)\supset G$。

证明　只要将定理2的证明中Y换成$\mathscr{R}(B)$，$O(0,\ \varepsilon)$换成$O(0,\ \varepsilon)\cap\mathscr{D}(B)$，再将第(IV)步中$B$的连续性条件换成$B$的闭性，其余一切照归，便得本定理的证明。

利用定理2和引理2的系，我们就得到下面重要的逆算子定理(最初是由Banach对于完备赋范线性空间的情况证明的)。

定理3(逆算子定理)　设X、Y是两个Fréchet空间，B是X到Y的双射，并且是连续线性算子，那末B^{-1}必是Y到X的连续线性算子。

证明　由定理2，B是开算子，由引理2的系知道B^{-1}是连续的。证毕。

定理3和定理2一样，有着类似于定理2′的推广。

3．逆算子定理的应用

开映象原理和逆算子定理在解方程的定性讨论中的应用价值是明显的。当然，定理2、3不能给出定量的估计。对于Banach空间的情况，连续线性算子的连续性可以用算子的范数来估计。下

面我们给出一个简单但是常用的估计.

定理 4 设 X 是 Banach 空间, $B\in\mathfrak{B}(X\to X)$, 并且 $\|B\|<1$, 那末 $I-B$ 必是正则算子, 并且

$$\|(I-B)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|B\|}. \tag{4.19}$$

证明 对于数 $a\in\mathbb{K}$, $|a|<1$, 有熟知的展开式

$$(1-a)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n. \tag{4.20}$$

类似于上述展开, 作算子

$$C=\sum_{n=0}^{\infty}B^n, \tag{4.21}$$

由于 $\|B^n\|\leqslant\|B\|^n$, 并且 $\|B\|<1$, 因此可知(4.21)中级数按算子范数收敛, 即 $C\in\mathfrak{B}(X\to X)$. 又因为

$$C(I-B)=I,\ (I-B)C=I,$$

所以 $C=(I-B)^{-1}$, 并且

$$\|C\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|B^n\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|B\|^n=\frac{1}{1-\|B\|},$$

即(4.19)成立. 证毕.

注意, 在定理 4 的假设下, B 实际上是 X 上的(线性)压缩映射, B^n 是 B 的 n 次复合映射. 解方程 $(B-I)x=y$ 等价于求

$$(B-I)x-y=0$$

的根, 也等价于求映射

$$\varphi:\ x\mapsto Bx-y$$

的不动点. 由 B 的压缩性, 易知 φ 是 X 上压缩映射. 容易看出按(4.21)求方程 $(B-I)x=y$ 的解

$$x=(B-I)^{-1}y=-(I-B)^{-1}y=-Cy=-\sum_{n=0}^{\infty}B^ny, \tag{4.22}$$

就是求压缩映射 φ 不动点的迭代求解过程的解(可取初次近似 $x_0=0$, 参见第四章 §7 定理 1). 估计式(4.19)就是第四章 §7 的(7.8)式. 换言之, 定理 4 是压缩映射定理的特例. 但定理 4 的直接证明方法对于用解析展开方法讨论线性算子是富有启发性的(参见算子谱论一章中有关谱半径的讨论).

现在我们再给出定理 2、3 另外一些应用，这些结果也是常被引用的.

(1) 拓扑等价问题上的应用

定义 设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 是 X 上两个准范数，又设 $\{x_n\}$ 是 X 上任何点列，如果 $\{x_n\}$ 按 $\|\cdot\|_1$ 收敛于 x，并且按 $\|\cdot\|_2$ 是基本的，那末 $\{x_n\}$ 也必按 $\|\cdot\|_2$ 收敛于 x，就称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是符合的.

定理 5 设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 是 X 上两个符合的准范数，如果 X 分别按 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 成为 Fréchet 空间，那末 $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 线性拓扑同构. 特别，当 $(X, \|\cdot\|_1)$、$(X, \|\cdot\|_2)$ 是两个 Banach 空间时，必存在正常数 C_1、C_2，使得

$$C_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant C_2\|x\|_2, \quad x \in X. \tag{4.23}$$

证明 I 是 X 上恒等算子，在 X 上引入新的准范数

$$\|\!|x|\!\| = \max(\|x\|_1, \|x\|_2), \quad x \in X.$$

读者容易证明：$\|\!|\cdot|\!\|$ 不仅是 X 上的准范数，而且 $(X, \|\!|\cdot|\!\|)$ 也是 Fréchet 空间. 视 I 为 $(X, \|\!|\cdot|\!\|)$ 到 $(X, \|\cdot\|_1)$ 的线性算子，显然 I 是线性的双射，并且是连续的. 由定理 3，I^{-1} 也是连续的，因而 $(X, \|\!|\cdot|\!\|)$ 与 $(X, \|\cdot\|_1)$ 拓扑线性同构. 同样，$(X, \|\!|\cdot|\!\|)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 拓扑线性同构（同构映射仍是 X 上恒等算子），从而易知 $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 拓扑线性同构.

注意，实现 $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 拓扑线性同构的算子是 I，因此当 $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间的情况下，如令 $\|I^{-1}\| = C_2$，$\|I\| = C_1^{-1}$，那末

$$\|x\|_1 = \|I^{-1}x\|_1 \leqslant \|I^{-1}\|\,\|x\|_2 = C_2\|x\|_2,$$

$$\|x_2\|_2 = \|Ix\|_2 \leqslant \|I\|\,\|x\|_1 = \frac{1}{C_1}\|x\|_1,$$

由此立即可得(4.23). 证毕.

(2) 空间分解和泛函分解问题上的应用

定义 设 X 是线性空间，L、M 是 X 的两个线性子空间，如果 $L \cap M = \{0\}$，那末称集 $\{x_l + x_m \mid x_l \in L, x_m \in M\}$ 为 L、M 的直接

和，记为 $L\dot{+}M$.

显然，对任何 $x\in L\dot{+}M$，必有唯一表示(或分解)$x=x_l+x_m$，其中 $x_l\in L$, $x_m\in M$. 通常称 x_l、x_m 分别是 x 在 L 和 M 中的分量.

当 $X=L\dot{+}M$ 时，显然有下式

$$(\alpha x)_l=\alpha x_l,\quad \alpha\in\mathbb{K},\ x\in X, \tag{4.24}$$

$$(x+y)_l=x_l+y_l,\quad x,\ y\in X. \tag{4.25}$$

定理 6 设 X 是 Fréchet 空间，L、M 是 X 的两个闭线性子空间，并 $X=L\dot{+}M$，那末 X 中点列$\{x_n\}$收敛于 x 的充要条件是

$$x_l^{(n)}\to x_l,\quad x_m^{(n)}\to x_m, \tag{4.26}$$

其中 $x_l^{(n)}$、x_l 分别是 x_n、x 在 L 中的分量，$x_m^{(n)}$、x_m 分别是 x_n、x 在 M 中的分量.

证明 利用准范数的三角不等式，易知充分性是显然的.

必要性 在 X 上引入新的准范数：当 $x=x_l+x_m$ 时，

$$|\!|\!|x|\!|\!|=\|x_l\|+\|x_m\|. \tag{4.27}$$

因为 L、M 是 X 的闭线性子空间，所以 L、M 本身可视为 Fréchet 空间. 注意到(4.25)，容易证明(读者自己证明) X 按 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 成为赋准范线性空间.

视 X 上恒等算子 I 为$(X,|\!|\!|\cdot|\!|\!|)$到$(X,\|\cdot\|)$的算子，显然，I 是线性双射，并且是$(X,|\!|\!|\cdot|\!|\!|)$到$(X,\|\cdot\|)$的连续算子，由定理 3, I^{-1} 是$(X,\|\cdot\|)$到$(X,|\!|\!|\cdot|\!|\!|)$的连续线性算子，即当$\{x_n\}$按$\|\cdot\|$收敛于 x，必然有$\{x_n\}$按$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$收敛于 x，即(4.26)成立. 证毕.

由定理 6 立即可以得到一个有用的推论.

系 设 X 是 Fréchet 空间，L、M 是 X 的两个闭线性子空间，并且 $X=L\dot{+}M$，那末 $f\in X^*$ 的充要条件是唯一地存在 $f_l\in L^*$, $f_m\in M^*$，使得 $f(x)=f_l(x_l)+f_m(x_m)$(简记为 $f=f_l+f_m$).

证明 必要性 设 $f\in X^*$，令 $f_l=f|_L$, $f_m=f|_M$. 显然，$f_l\in L^*$, $f_m\in M^*$，并且对 $x=x_l+x_m$，有

$$f(x)=f(x_l)+f(x_m)=f_l(x_l)+f_m(x_m).$$

充分性 对任何 $f_l\in L^*$, $f_m\in M^*$，以及 $x=x_l+x_m\in X$，作

$$f(x)=f_l(x_l)+f_m(x_m),$$

因为 X 中点列$\{x_n\}$收敛于 x 等价于 $x_l^{(n)}\to x_l$, $x_m^{(n)}\to x_m$ (其中 $x_l^{(n)}$、$x_m^{(n)}$ 分别是 x_n 在 L、M 中分量), 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}f(x_n)&=\lim_{n\to\infty}(f_l(x_l^{(n)})+f_m(x_m^{(n)}))\\&=\lim_{n\to\infty}f_l(x_l^{(n)})+\lim_{n\to\infty}f_m(x_m^{(n)})\\&=f_l(x_l)+f_m(x_m)=f(x),\end{aligned}$$

即 $f\in X^*$.

显然, 分解 $f=f_l+f_m$ 是唯一的. 证毕.

定理 6 及其系中 L、M 的闭性条件是不能少的(即使 X 是 Banach 空间也是如此).

例 2 $X=C[a,b]$, $x_0\in C[a,b]$, 但 x_0 不是多项式. 取 $L=\operatorname{span}\{x_0\}$. 显然, L 是一维线性子空间(自然是闭的). 在 X 中取一族线性基 $\{x_0,x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$, 其中$\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$包含 1、x、$\cdots$、x^n、$\cdots$. 取 $M=\operatorname{span}\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$. 显然, $M\cap L=\{0\}$, 并且 $X=L\dotplus M$. 由于 M 中包含了所有的多项式, 因而存在 M 中一列点$\{x_n\}$, $x_n\to x_0$. 由此可知X中点列 $y^{(n)}=x_n-x_0\to 0$, 然而

$$y_l^{(n)}=-x_0,\quad y_m^{(n)}=x_n,$$

显然, $\{y_l^{(n)}\}$、$\{y_m^{(n)}\}$均不分别收敛于 L、M 中的零元. 所以, 定理 5 中 L、M 的闭性条件不可少.

同样, 在本例中任取 $C[a,b]$ 上非零连续线性泛函 f', $f'(x_0)=1$. 取 $f_m=f'|_M$ 作为 M 上的线性泛函, 显然 $f_m\in M^*$, 在 $L=\operatorname{span}\{x_0\}$ 上任取泛函 f_l, 但 $f_l(x_0)=2$. 显然, X 上 $f=f_l+f_m$ 是线性泛函. 然而 $x_n\to x_0$, 但

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n-x_0)=\lim_{n\to\infty}f_m(x_n)-f_l(x_0)=1-2=-1,$$

即 f 并不是 X 上连续泛函.

4. 闭图象定理

在第四章 §4 定理 18 中曾讨论了度量空间上的连续映射, 如果它的定义域是闭的, 那末它必是闭映射.

现在要给出闭线性算子是连续的条件.

定理 7(闭图象定理) 设 X、Y 都是 Fréchet 空间, 又设 B 是 X 到 Y 的闭线性算子, $\mathscr{D}(B)$ 是 B 的定义域. 如果 $\mathscr{D}(B)$ 是闭的, 那末 B 必是连续的.

证明 因为 $\mathscr{D}(B)$ 是闭的, 所以 $\mathscr{D}(B)$ 本身可视为 Fréchet 空间. 在 $\mathscr{D}(B)$ 上引入新的准范数

$$\|x\| = \|x\| + \|Bx\|, \quad x \in \mathscr{D}(B). \tag{4.28}$$

利用 B 是闭线性算子, 容易证明 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{D}(B)$ 上的准范数, 并且 $\mathscr{D}(B)$ 按 $\|\cdot\|$ 成为 Fréchet 空间.

视 $\mathscr{D}(B)$ 上恒等算子 I 为 $(\mathscr{D}(B), \|\cdot\|)$ 到 $(\mathscr{D}(B), \|\cdot\|)$ 的算子, I 是连续的双射. 从而 I^{-1} 为 $(\mathscr{D}(B), \|\cdot\|)$ 到 $(\mathscr{D}(B), \|\cdot\|)$ 的连续算子(其实, 直接用定理 5 也可得到这个结论), 即当 $\mathscr{D}(B)$ 中点列 $\{x_n\}$ 按 $\|\cdot\|$ 收敛于 x 时, $\{x_n\}$ 也必然按 $\|\cdot\|$ 收敛于 x. 这就是说, 当 $\|x_n - x\| \to 0$ 时, 必有

$$\|Bx_n - Bx\| \to 0, \ (n \to \infty),$$

所以 B 是连续的. 证毕.

注意, $\mathscr{D}(B)$ 是闭的条件不可缺少.

例 3 $X = L([1, \infty), m)$, 作 X 上算子

$$B: \ x(t) \mapsto tx(t), \quad x(t) \in L([1, \infty), m),$$

其中 $\mathscr{D}(B) = \{x(t) \mid x(t), \ tx(t) \in L([1, \infty), m)\}$. 显然,

$$\overline{\mathscr{D}(B)} = L([1, \infty), m),$$

并且, 容易证明 B 是闭算子. 可是, 当取 $\varphi_n(t) = \chi_{[n, n+1]}(t)$ 时, 显然 $\|\varphi_n\| = 1$, 并且

$$\|B\varphi_n\| = \int_1^\infty t\,\varphi_n(t)\,dt \geqslant n,$$

所以 B 不是有界线性算子, 从而不是连续的.

如果应用定理 2′, 以及单射的闭算子的逆算子也是闭算子的性质, 定理 7 也可作如下推广.

定理 7′(闭图象定理) 设 X、Y 都是 Fréchet 空间, 又设 B 是 X 到 Y 的闭线性算子, $\mathscr{D}(B)$ 是 B 的定义域, 并且是第二纲集,

那末必有 $\mathscr{D}(B)=X$，并且 B 是连续的.

5. 共鸣定理

在分析数学的许多领域中，常常遇到的不只是单个的有界线性算子，而是一族有界线性算子，并且需要回答这一族有界线性算子是否一致有界. 人们在各个不同领域内处理这类问题时发现了共同的本质，在此基础上形成了更一般的共鸣定理. 它是 Banach 空间中一个重要的定理，证明的方法也很多. 这里我们将应用逆算子定理来证明.

定理 8(Banach-Steinhaus 定理，共鸣定理) 设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$B_\tau\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，$\tau\in\varLambda$. 如果对每个 $x\in X$，

$$\sup_{\tau\in\varLambda}\|B_\tau x\|<\infty, \tag{4.29}$$

那末数集 $\{\|B_\tau\|\,|\,\tau\in\varLambda\}$ 是有界的.

证明 在指标集 $\varLambda$ 外任取一个元素 α，令 $\varLambda_1=\varLambda\cup\{\alpha\}$，$B_\alpha=I$. 在 Banach 空间 X 上再作新范数

$$|||x|||=\sup_{\tau\in\varLambda_1}\|B_\tau x\|=\max\big(\|x\|,\ \sup_{\tau\in\varLambda}\|B_\tau x\|\big),$$

今证 $|||\cdot|||$ 是 X 上范数. 显然 $|||\cdot|||$ 满足范数的性质(i)、(iii)(见第四章 §2)，下面证明 $|||\cdot|||$ 满足三角不等式. 事实上，由于

$$\begin{aligned}\|B_\tau(x+y)\|&\leqslant\|B_\tau x\|+\|B_\tau y\|\leqslant\sup_{\tau\in\varLambda_1}\|B_\tau x\|+\sup_{\tau\in\varLambda_1}\|B_\tau x\|\\&=|||x|||+|||y|||,\end{aligned}$$

因此 $$|||x+y|||\leqslant|||x|||+|||y|||.$$

再证 X 按 $|||\cdot|||$ 也成为 Banach 空间. 事实上，设 $\{x_n\}$ 按 $|||\cdot|||$ 是基本点列. 由于 $|||x|||\geqslant\|x\|$，因而 $\{x_n\}$ 按 $\|\cdot\|$ 也是基本的，从而有 $x_0\in X$，使得 $\|x_n-x_0\|\to0\,(n\to\infty)$. 下面证明 $|||x_n-x_0|||\to0\,(n\to\infty)$ 就可以了.

因为 $\{x_n\}$ 按 $|||\cdot|||$ 是基本的，所以对任何 $\varepsilon>0$，存在 N 当 $n,\ m\geqslant N$ 时，

$$|||x_n-x_m|||<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.30}$$

即对任何 $\tau\in\Lambda_1$, $\|B_\tau(x_n-x_m)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 固定 n, 令 $m\to\infty$, 就得到

$$\|B_\tau(x_n-x_0)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad \tau\in\Lambda,$$

也就是说, 当 $n\geqslant N$ 时, $\sup\limits_{\tau\in\Lambda_1}\|B_\tau(x_n-x_0)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, 即

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

因而 X 按 $\|\cdot\|$ 是 Banach 空间. 利用定理 3 或直接利用定理 5 中的(4.23)(取(4.23)中的 $\|\cdot\|_2$ 为 $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ 为 $\|\cdot\|$)

$$\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|B_\tau x\|=\|x\|\leqslant C_2\|x\|,\ x\in X,$$

这就是说, 数集 $\{\|B_\tau\|\,|\,\tau\in\Lambda\}$ 是有界的, 并且对一切 $\tau\in\Lambda$, $\|B_\tau\|\leqslant C_2$. 证毕.

利用共鸣定理和 §3 引理 1, 立即得到 Banach–Steinhaus 另一个定理.

系 设 X、Y 是两个 Banach 空间, $\{B_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 中一列算子. 如果对每个 x, $\{B_nx\}$ 收敛. 那末必存在 $B\in\mathscr{B}(X\to Y)$, 使得 $\{B_n\}$ 强收敛于 B, 并且

$$\|B\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|B_n\|.$$

共鸣定理主要是用来讨论一族算子的一致有界性的. 所以又称为一致有界原理.

另外, 定理 8 中 X 的完备性是不能少的(读者可以自己举例说明).

6. 强有界和弱有界

定义 设 X、Y 都是赋范线性空间, $B_\tau\in\mathscr{B}(X\to Y)$, $\tau\in\Lambda$, 如果对每个 $x\in X$, $\{B_\tau x\,|\,\tau\in\Lambda\}$是有界集, 称$\{B_\tau\,|\,\tau\in\Lambda\}$强有界, 如果对每个 $x\in X$, $f\in Y^*$, $\{f(B_\tau x)\,|\,\tau\in\Lambda\}$是有界数集, 称 $\{B_\tau\,|\,\tau\in\Lambda\}$ 是弱有界.

定义 设 X 是赋范线性空间, $\{f_\tau\,|\,\tau\in\Lambda\}$ 是 X 上一族连续线性泛函, 如果 $\{\|f_\tau\|\,|\,\tau\in\Lambda\}$ 是有界数集, 称 $\{f_\tau\,|\,\tau\in\Lambda\}$ 是强有

界的；如果对每个$x\in X$，$\{f_\tau(x)|\tau\in\Lambda\}$是有界数集，称$\{f_\tau|\tau\in\Lambda\}$是弱*有界的。

同样引入

定义　设X是赋范线性空间，$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$是$X$上一个集，如果$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$是有界集，称$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$是强有界；如果对每个$f\in X^*$，$\{f(x_\tau)|\tau\in\Lambda\}$是有界数集，称$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$是弱有界。

定理 9　设X是 Banach 空间，$\{B_\tau|\tau\in\Lambda\}$是$X$上一族有界线性算子，$\{f_\tau|\tau\in\Lambda\}$是$X^*$中一族有界线性泛函，$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$是$X$中一个点集。那末下列命题成立：

(1)　$\{\|B_\tau\||\tau\in\Lambda\}$是有界集的充要条件是$\{B_\tau|\tau\in\Lambda\}$强有界，或者$\{B_\tau|\tau\in\Lambda\}$弱有界。

(2)　$\{f_\tau|\tau\in\Lambda\}$强有界的充要条件是$\{f_\tau|\tau\in\Lambda\}$弱*有界。

(3)　$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$强有界的充要条件是$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$弱有界[注]。

证明　先证(2)　显然，$\{f_\tau|\tau\in\Lambda\}$强有界必弱*有界。反之，泛函$f_\tau$可视为$X$到$Y=\mathbb{K}$的有界线性算子，因为$\{f_\tau|\tau\in\Lambda\}$弱*有界，即对每个$x\in X$，$\{f_\tau(x)|\tau\in\Lambda\}$是有界集，由定理 8，立即得到$\{\|f_\tau\||\tau\in\Lambda\}$是有界集，即$\{f_\tau|\tau\in\Lambda\}$强有界。

再证(3)　显然，$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$强有界必弱有界。反之，将$X$嵌入$X^{**}$，因而视$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$为$X^{**}$中点集，由$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$的弱有界的假设，立即可知作为$X^{**}$中的集，$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$是弱*有界的。从而由(2)，$\{x_\tau|\tau\in\Lambda\}$强有界(因而$\|x_\tau\|=\|x_\tau^{**}\|$)。

最后证(1)　显然，$\{\|B_\tau\||\tau\in\Lambda\}$有界时，$\{B_\tau|\tau\in\Lambda\}$必然强有界，自然更是弱有界。反之，设$\{B_\tau|\tau\in\Lambda\}$弱有界，即对任何$x\in X$，$f\in X^*$，$\{f(B_\tau x)|\tau\in\Lambda\}$是有界数集。因此对每个$x\in X$，集$\{B_\tau x|\tau\in\Lambda\}$是弱有界的。由(3)可知，$\{B_\tau|\tau\in\Lambda\}$是强有界集，既然对每个$x\in X$，$\{B_\tau x|\tau\in\Lambda\}$强有界，由定理 8 可知，$\{\|B_\tau\||\tau\in\Lambda\}$是有界数集。证毕。

系　设X是赋范线性空间，$\{f_n\}$是X上一列连续线性泛函，如果对每个$x\in X$，$\{f_n(x)\}$收敛，那末$\{f_n\}$必是强有界的。

[注]　这个命题在赋范线性空间中也成立。

证明 从 $\{f_n(x)\}$ 的收敛性知 $\{f_n\}$ 是弱*有界的，从而 $\{f_n\}$ 强有界．证毕．

鉴于定理 9，所以对有界线性算子集，或有界线性泛函集或向量集，并不太强调是强、还是弱有界等，可以只说是有界集．

7．共鸣定理的应用

共鸣定理不仅在泛函分析本身有广泛的应用，在分析数学的其它领域中也有许多有意义的应用．

例如在函数可积性方面有下列结果．

定理 10 设 μ 是 E' 上勒贝格–斯蒂阶测度，$\alpha(t)$ 是 E' 上勒贝格–斯蒂阶可测函数．如果对任何

$$x(t)\in L^p(E^1,\ \mu)\quad (p\geqslant 1),$$

积分 $\int_{E^1}\alpha(t)x(t)dt$ 存在，那末必有

$$\alpha(t)\in L^q(E^1,\ \mu)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

证明 不妨设 $\alpha(t)$ 是实函数(否则，分成实部、虚部分别加以证明)．对任何自然数 n，作函数

$$\alpha_n(t)=\chi_{[-n,n]}(t)\max(\min(\alpha(t),\ n),\ -n),$$

因为 $|\alpha_n(t)|\leqslant n$，并且在 $[-n,\ n]^c$ 上为零，所以

$$\alpha_n(t)\in L^q(E^1,\ \mu)=L^{p}(E^1,\ \mu^*).$$

又显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(t)=\alpha(t)$．由于

$$|\alpha_n(t)x(t)|\leqslant|\alpha(t)|\,|x(t)|,\ n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{4.31}$$

当 $x(t)\in L^p(E^1,\ \mu)$ 时，根据假设，$\alpha(t)x(t)$ 是可积函数，由控制收敛定理立即有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E^1}\alpha_n(t)x(t)dt=\int_{E^1}\alpha(t)x(t)dt, \tag{4.32}$$

即对每个 $x\in L^p(E^1,\ \mu)$，$L^p(E^1,\ \mu)$ 上一列连续线性泛函 $\{\alpha_n(t)\}$ 在 x 上的值是收敛的．由定理 9 的系可知 $\{\alpha_n(t)\}$ 是强有界的，即存在常数 M，使得

$$\left(\int_{E^1}|\alpha_n(t)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant M;\quad n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{4.33}$$

再利用 Levi 引理,立即得到

$$\int_{E^1}|\alpha(t)|^q d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E^1}|\alpha_n(t)|^q d\mu\leqslant M^q,$$

证毕.

在机械求积收敛性问题上的应用 定积分近似计算中常常引用机械求积公式,这就是以泛函

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{k_n}A_k^{(n)}x(t_k^{(n)}),$$
$$a\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{k_n}^{(n)}\leqslant b, \tag{4.34}$$

作为 $x(t)$ 的积分 $\int_a^b x(t)dt$ 的近似值.例如梯形法,辛普松(Simpson)方法等都是这种类型的近似方法.

给定了一列分点组 $\{(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \cdots, t_{k_n}^{(n)})\}$ 及一列常数组 $\{(A_0^{(n)}, A_1^{(n)},\cdots, A_{k_n}^{(n)})\}$ 后,等式(4.34)定义了空间 $C[a, b]$ 上的连续线性泛函 f_n. 现在的问题是:在怎样的条件下,泛函 f_n 在每一点 $x\in C[a, b]$ 上收敛于积分 $\int_a^b x(t)dt$.

定理 11(Стеклов-Szegö) 机械求积公式 $f_n(x)$ 对于任一函数 $x\in C[a, b]$ 收敛于 $\int_a^b x(t)dt$ 的充要条件是

(i) 有常数 M,

$$\sum_{k=0}^{k_n}|A_k^{(n)}|\leqslant M;$$

(ii) 对任一多项式

$$x=x(t),\ f_n(x)\to\int_a^b x(t)dt\ (n\to\infty).$$

证明 首先证明

$$\|f_n\|=\sum_{k=0}^{k_n}|A_k^{(n)}|. \tag{4.35}$$

事实上,显然成立着不等式

$$|f_n(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{k_n}|A_k^{(n)}|\,\|x\|,\quad x\in C[a, b].$$

另一方面,对每个 n,可取 $[a, b]$ 上的连续函数 $x_n(t)$,适合

$$x_n(t_k^{(n)}) = e^{-i\theta_{nk}},\ \theta_{nk} = \arg A_k^{(n)},$$
$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ k_n,$$

而且$\|x_n\|=1$，于是

$$|f_n(x_n)| = \sum_{k=0}^{k_n} |A_k^{(n)}|,$$

因此(4.35)成立.

利用(4.35)及共鸣定理，便知(i)是必要的，而(ii)的必要性是显然的.

反过来，如果给定的分点组序列和数组序列适合条件(i)、(ii)，其中f_n是由(4.34)式所定义的$C[a,\ b]$上的泛函，因为多项式全体在空间$C[a,\ b]$中稠密，由§3引理1的系，必有$C[a,\ b]$上的连续线性泛函f，使得对每个$x\in C[a,\ b]$，$f_n(x)\to f(x)$. 但由条件(ii)，对多项式$x(t)$，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^b x(t)dt = f(x).$$

由f的连续性，对任意的$x\in C[a,\ b]$，便有

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt.$$

证毕.

系 设$A_k^{(n)}\geqslant 0$，那末对每个

$$x\in C[a,\ b],\ f_n(x)\to\int_a^b x(t)dt$$

的充要条件是对每个多项式$x(t)$，

$$f_n(x)\to\int_a^b x(t)dt\quad (n\to\infty).$$

证明 当$A_k^{(n)}\geqslant 0$时，定理中条件(ii)含有条件(i). 事实上

$$\sum_{k=0}^{k_n} |A_k^{(n)}| = \sum_{k=0}^{k_n} A_k^{(n)} = f_n(1)\to\int_a^b 1\,dx = b-a,$$

所以有M，使(i)式成立. 由定理11就得此系.

在发散级数求和问题中的应用 记数项级数$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$的部分和为$S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$. 如果有数S，使得$S=\lim_{n\to\infty} S_n$，那末称$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$按Cauchy

意义是可和的，又称 S 是它的 Cauchy 和。

如果给定一个无限行、无限列的阵 (a_{nk})，$n, k=1, 2, \cdots$，作

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}S_k,\quad n=1, 2, \cdots. \tag{4.36}$$

假如对每个固定的 n，(4.36) 中级数按 Cauchy 意义收敛，而且 $\{\sigma_n\}$ 也收敛，即有 σ，$\sigma_n\to\sigma$，就称级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ 按阵 (a_{nk}) 广义可和，并称 σ 是级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$（关于 (a_{nk})）的广义和。例如当 $a_{nk}=\delta_{nk}$ 时，广义和就是 Cauchy 和。又如蔡查罗 (Cesàro) 的 $(C, 1)$ 求和法的求和阵是

$$(a_{nk})=\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \cdots & & \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & \cdots & & \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0, & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n}, & \cdots, & \frac{1}{n}, & 0, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

相应于此阵的 σ_n 为：

$$\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu$$

$\left(\text{它是} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \text{ 的前 } n \text{ 个部分和的算术平均}\right)$。级数的广义求和法很多，它是经典分析中一个重要的分支。

设由阵 (a_{nk}) 给出一个广义求和法，如果每个按 Cauchy 意义收敛的级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ 也是按 (a_{nk}) 可求和的，而且级数的广义和等于 Cauchy 和，就是说只要 $S_n\to S$，那末 $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}S_k\to S$，这时称这种广义求和法是正则的。正则的求和阵 (a_{nk}) 称为 Toeplitz 阵或 T-阵。例如 $(C, 1)$ 求和就是正则的。下面是 T-阵的特征。

定理 12（O. Toeplitz, 1911）　(a_{nk}) 成为 T-阵的充要条件是：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots;$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}=1;$

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\leqslant M,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$

为证明这个定理，先证一个类似于定理 10 的引理.

引理 4 设 C 是收敛数列 $x=\{x_n\}$ 全体，按范数

$$\|x\|=\sup_{n\geq 1}|x_n|$$

所成的 Banach 空间，又设 $\{\alpha_k\}$ 是一列数. 如果对每个

$$x=\{x_n\}\in C,$$

数值

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu x_\nu$$

存在，那末 f 是 C 上的连续线性泛函，并且

$$\|f\|=\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|<\infty.$$

证明 对每个自然数 n，令

$$f_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu,$$

那末 f_n 是 C 上的连续线性泛函. 由假设，对每个 $x\in C$, $f_n(x)\to f(x)$，所以 f 是 C 上的连续线性泛函，并且存在常数 M，使得 $\|f_n\|\leqslant M$，易知 $\|f_n\|=\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|$，因此 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|\leqslant M$，并由此容易得到 $\|f\|=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|<\infty$. 证毕.

定理 12 的证明 必要性 设 (a_{nk}) 是 T-阵，那末对于每个 $x=(S_1,\ S_2,\ \cdots)\in C$，级数

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}S_k \tag{4.37}$$

收敛. 如果记

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x),\ x=(S_1,\ S_2,\ \cdots)\in C.$$

那末当 $x\in C$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}S_k = g(x). \tag{4.38}$$

因为 $g_n(x)$ 是 Banach 空间 C 上的有界线性泛函，并且

$$\|g_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|,$$

由共鸣定理知道 $\{\|g_n\|\}$ 有界，这就是(iii).

作 C 中的点列 $x^{(0)}$、$x^{(1)}$、…、$x^{(k)}$、… 如下：

$$x^{(0)} = (1,\ 1,\ 1,\ \cdots) \quad (\text{每个坐标都是 } 1),$$

$$x^{(k)} = (0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots) \quad (\text{第 } k \text{ 个坐标是 } 1,\text{其余为 } 0),$$

那末 $\quad g_n(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk},\ g_n(x^{(k)}) = a_{nk}\ (n,\ k=1,\ 2,\ \cdots).$

由(4.38)知道，当 $n\to\infty$ 时

$$g_n(x^{(0)}) \to g(x^{(0)}) = 1,$$

$$g_n(x^{(k)}) \to g(x^{(k)}) = 0, \quad (k \geqslant 1),$$

这样就得到(ii)和(i).

充分性 设 (a_{nk}) 满足(i)、(ii). 令 $\mathscr{D}$ 为上述点列 $\{x^{(k)}\}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 在 C 中的线性包，即 $\mathscr{D} = \operatorname{span}\{x^{(k)}\}$. $\mathscr{D}$ 是只有有限项不为零的(收敛)数列全体. 显然 $\mathscr{D}$ 在 C 中稠密. 由(iii),

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k,\quad x = \{x_k\} \in C$$

是 C 上有界线性泛函，且

$$\|g_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M.$$

易知如能证明对于 $\mathscr{D}$ 中的 x, (4.38)成立，那末对 C 中任何 x, (4.38)也就成立，因而 (a_{nk}) 就是 T-阵了.

由条件(i)、(ii)，知道：对于 $\{x^{(k)}\}$ 诸点，(4.38)成立. 所以对于它们的任一线性组合，即 $x\in\mathscr{D}$, (4.38)式必成立. 这正是所要求的结果. 证毕.

此外，还可以用共鸣定理来研究插值问题等，这里不一一列举.

8. 线性算子方程的解

下面是属于算子方程的解的存在性和稳定性方面的结果.

定理13 设 X、Y 都是 Banach 空间，A 是 X 到 Y 的稠定闭线性算子，并且 $\mathscr{R}(A)$ 是闭的. 下列命题成立：

(1) 对于 $y\in Y$，使得方程 $Ax=y$ 可解的充要条件是 $y\in\mathscr{N}(A^*)^{\perp}$，即

$$y\perp\mathscr{N}(A^*). \tag{4.39}$$

(2) 存在常数 C，对于 Y 中满足 $y\perp\mathscr{N}(A^*)$ 的 y，必有解 x，使得

$$\|x\|\leqslant C\|y\|+\|x_0\|, \tag{4.40}$$

其中 x_0 是 $\mathscr{N}(A)$ 中任何一个向量.

(条件(4.39)称为方程 $Ax=y$ 可解的相容性条件. 不等式(4.40)说明方程 $Ax=y$ 具有对自由项 y 的稳定的解.)

证明 (1) 显然，$Ax=y$ 可解的充要条件是 $y\in\mathscr{R}(A)$. 根据§3定理10的(7)和§2引理2的(3)，有

$$\mathscr{R}(A)=\overline{\mathscr{R}(A)}=\mathscr{N}(A^*)^{\perp}\cap Y.$$

因此，$Ax=y$ 可解的充要条件是 $y\perp\mathscr{N}(A^*)^{\perp}$.

(2) 因为 A 是闭算子. 所以 $\mathscr{N}(A)$ 是闭线性子空间. 作商空间 $X/\mathscr{N}(A)\to Y$ 的算子 $\widetilde{A}$：$\mathscr{D}(\widetilde{A})=\{\tilde{x}\,|\,x\in\mathscr{D}(A)\}\to Y$，

$$\widetilde{A}\tilde{x}=Ax,\quad x\in\mathscr{D}(\widetilde{A}). \tag{4.41}$$

显然，$\widetilde{A}$ 是稠定算子，并且是 $\mathscr{D}(\widetilde{A})$ 到 $\mathscr{R}(A)$ 的双射，因而 $\widetilde{A}^{-1}$ 存在. 下面证明 $\widetilde{A}$ 是闭算子.

事实上，设 $\{\tilde{x}_n\}$ 是 $\mathscr{D}(\widetilde{A})$ 中基本点列，$\{A\tilde{x}_n\}$ 是 Y 中基本点列. 因为 $X/\mathscr{N}(A)$ 和 Y 都是 Banach 空间，所以存在 $\tilde{x}_0\in X/\mathscr{N}(A)$，$y_0\in Y$，使得 $\tilde{x}_n\to\tilde{x}_0$，$\widetilde{A}\tilde{x}_n\to y_0$. 只要证明 $\tilde{x}_0\in\mathscr{D}(\widetilde{A})$，并且 $\widetilde{A}\tilde{x}_0=y_0$ 即可. 为此，不妨设 $\|\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n+1}\|\leqslant\frac{1}{2^n}$（否则用 $\{\tilde{x}_n\}$ 的子点列代替 $\{\tilde{x}_n\}$ 即可）. 因而

$$\tilde{x}_1+\sum_{i=2}^{\infty}(\tilde{x}_i-\tilde{x}_{i-1}) \tag{4.42}$$

强收敛于 $\tilde{x}_0$. 和证明 $X/\mathscr{N}(A)$ 是完备空间(见第四章§5定理17)一样，存在 $x_i'\in\tilde{x}_i(i=1,2,\cdots)$，使得级数 $x_1'+\sum\limits_{i=2}^{\infty}(x_i'-x_{i-1}')$ 强

收敛于某个 x_0'，并且 $\tilde{x}_0'=\tilde{x}_0$. 因为 $x_i'\in\tilde{x}_i\in\mathscr{D}(\tilde{A})$，所以 $x_i'\in\mathscr{D}(A)$，$Ax_i'=\tilde{A}\tilde{x}_i$，从而 $\{Ax_i'\}$ 是基本点列，并收敛于 y_0. 因为 A 是闭的，所以 $x_0'\in\mathscr{D}(A)$，并且 $Ax_0'=y_0$. 这样就得到 $y_0=\tilde{A}\tilde{x}_0'=\tilde{A}\tilde{x}_0$，即 $\tilde{A}$ 是 $X/\mathscr{N}(A)$ 到 Y 的闭线性算子.

根据假设，$\mathscr{R}(\tilde{A})=\mathscr{R}(A)$ 是 Y 中闭线性子空间，也就是说 $\mathscr{R}(\tilde{A})$ 本身可视为 Banach 空间. 而 $\tilde{A}$ 是 $\mathscr{D}(\tilde{A})$ 到 $\mathscr{R}(\tilde{A})$ 的双射，并且是闭的，从而 $\tilde{A}^{-1}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{R}(\tilde{A})$ 到 $\mathscr{D}(\tilde{A})$ 的闭线性算子. 由闭图象定理，$\tilde{A}^{-1}$ 是连续的，即存在常数 C，对一切

$$0\neq y\in\mathscr{R}(\tilde{A})=\mathscr{R}(A),$$

$$\|\tilde{A}^{-1}y\|<C\|y\|. \tag{4.43}$$

令 $\tilde{x}=\tilde{A}^{-1}y$，由上式易知在 $\tilde{x}$ 中存在 $x'\in\tilde{x}$，使得 $Ax'=y$，并且

$$\|x'\|\leqslant C\|y\|,\quad (y\neq 0). \tag{4.44}$$

对任何给定的 $x_0\in\mathscr{N}(A)$，记 $x=x'+x_0$. 显然 $Ax=Ax'=\tilde{A}\tilde{x}=y$，并由(4.44)，立即得到

$$\|x\|\leqslant C\|y\|+\|x_0\|. \tag{4.45}$$

上式当 $y=0$ 时，取 $x=0$ 显然也适合，即(4.40)对一切 $y\in\mathscr{R}(A)$ 成立. 证毕.

在许多具体场合（主要是当 A 为微分算子时），定理 13 是被用到的. 但在具体场合常常是用本节习题 9，即利用 A 的下有界性来保证 $\mathscr{R}(A)$ 的闭性.

习　题

1. 设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的稠定线性算子，T 是单射，并且 $\overline{\mathscr{R}(T)}=Y$，则 $(T^{-1})^*T^*=I_{\mathscr{D}(T^*)}$，$T^*(T^{-1})^*=I_{\mathscr{D}((T^{-1})^*)}$. 特别，如果 T 还是正则算子（即 T^{-1} 是满足 $\mathscr{D}(T^{-1})=Y$ 的有界算子）时：

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*.$$

2. 设 X、Y 是两个 Fréchet 空间，T 是 X 到 Y 的线性单射，$\mathscr{R}(T)$ 是 Y 中第二纲集，那末 T^{-1} 必是定义在 $\mathscr{R}(T)$ 上的连续线性算子.

3. 设 X、Y 是两个 Banach 空间，$T\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，并且 $\mathscr{R}(T)=Y$. 证明必存在常数 M，使得对任何 $y\in Y$，必存在 $x\in X$，满足 $\|x\|\leqslant M\|y\|$，并且 $Tx=y$.

4. 试举例说明赋范线性空间 X 的两个闭线性子空间 L、M，虽满足 $L\cap M=\{0\}$，但它们的直接和 $L\dotplus M$ 未必是 X 中的闭线性子空间.

5. 设 L、M 是 Banach 空间 X 的两个闭线性子空间，并且 $X=L\dotplus M$. 证明必存在常数 C，使得对任何 $x\in X$，有 $\|x_l\|\leqslant M\|x\|$，$\|x_m\|\leqslant M\|x\|$.

6. 设 L、M 是 Banach 空间 X 的两个闭线性子空间，并且 $X=L\dotplus M$. 证明商空间 X/L 必与 M 拓扑线性同构.

7. **定义** 设 X 是赋范线性空间，$\{f_n\}$ 是 X^* 中一点列，如果对每个 $x\in X$，$\{f_n(x)\}$ 收敛，称 $\{f_n\}$ 为*弱*基本点列*. 如果 X^* 的子集 A 中任何弱*基本点列必弱*收敛，那末称 A 是*弱*序列完备*. 同样，X 中的点列 $\{x_n\}$，如果对任何 $f\in X^*$，$\{f(x_n)\}$ 是收敛的，那末称 $\{x_n\}$ 为*弱基本点列*. 如果 X 的子集 A 中任何弱基本点列都弱收敛于 A 中一点，称 A 是*弱序列完备*.

证明：(1) X^* 是弱*序列完备的；(2) 当 X 是自反空间时，X 是弱序列完备的.

8. 证明在自反 Banach 空间中，任何弱有界点列必有弱收敛的子点列.

9. **定义** 设 X、Y 是两个赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的线性算子. 如果存在常数 $C>0$，使得

$$\|Tx\|\geqslant C\|x\|,\quad x\in\mathscr{D}(T),$$

就称 T 是*下有界的算子*.

证明：当 X、Y 都是 Banach 空间，T 是闭线性单射时，$\mathscr{R}(T)$ 是闭的充要条件是：T 是下有界的.

第六章　Hilbert 空间的几何学

在第四章中，我们介绍了赋范线性空间的概念．以有限维空间来说，向量的范数相当于向量的长度，但是，在有限维欧几里德空间中还有一个很重要的概念——两个向量的夹角，特别是两个向量的直交．有了它们，就有勾股定理，向量的投影等等，而投影是和极值相联系的．极值问题在分析中具有重要的地位，因而无限维的欧几里德空间，即 Hilbert 空间的理论，在其它分析数学中具有重要的地位．这一章所讨论的内容，就是 Hilbert 空间上的几何学．

§1　基本概念

1．内积

不论是实的或复的欧几里德空间，都有一个特点，即在其中定义了向量的内积．详细地说，设 $\mathbb{C}^n$ 是复欧几里德空间（或实欧几里德空间 E^n），对于 $\mathbb{C}^n$ 中任意两个向量 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$，规定内积 (x, y) 是如下的复数：

$$(x, y)=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n.$$

显然，这样定义的内积 (x, y) 具有下述性质：

（i）$(y, x)=\overline{(x, y)}$；

（ii）当 α、β 是复数时，$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)$；

（iii）$(x, x)\geqslant 0$，而且等号成立的充要条件是 $x=0$；其中 x, y, $z\in\mathbb{C}^n$．

在欧几里德空间中，内积概念之所以重要，是由于可以利用它在 $\mathbb{C}^n$ 中建立欧几里德几何学．例如：向量的交角、垂直、投影等等重要的几何概念都是由内积表述的．但是，不仅在有限维空间，而

且在某些无限维空间中也能定义内积概念，使之具有性质(i)～(iii)．例如，平方可积函数族 $L^2(E, \mu)$ 中，两向量 $f(x)$、$g(x)$ 的内积 (f, g) 定义为

$$(f, g)=\int_E f(x)\overline{g(x)}d\mu(x),$$

容易验证它具有性质 (i)～(iii)．更一般地，我们引入如下的概念．

定义 设 $\mathbb{\Lambda}$ 是实数域或复数域，H 是 $\mathbb{\Lambda}$ 上的线性空间，如果对于 H 中任何两个向量 x、y，都对应着一个数 $(x, y)\in\mathbb{\Lambda}$，满足条件：

(i)（共轭对称性） 对任何 $x, y\in H$，$(x, y)=\overline{(y, x)}$；

(ii)（对第一变元的线性） 对任何 $x, y, z\in H$ 及任何两个数 $\alpha, \beta\in\mathbb{\Lambda}$，成立着

$$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z);$$

(iii)（正定性） 对于一切 $x\in H$，$(x, x)\geqslant 0$，而且 $(x, x)=0$ 的充要条件是 $x=0$；

那末，称二元函数 $(\cdot, \cdot)$ 为 H 中的内积．当 $\mathbb{\Lambda}$ 是实数（复数）域时，称 H 为实(或复)内积空间．

内积空间是一种极为重要的赋范线性空间(下面将证明内积空间是赋范线性空间)，它在数学物理、量子物理理论、微分方程及概率论等学科中有着重要而且广泛的应用．

我们把上面(i)～(iii)三条要求稍作一些分析．

共轭对称性又称为 Hermite（厄米）性．在条件 (i) 中，要求 $(x, y)=\overline{(y, x)}$，如果 H 是实空间，那末这个式子就改成 $(x, y)=(y, x)$，称为对称性．

由条件(i)和(ii)，我们得到内积下面的性质．

(iv) 内积 $(\cdot, \cdot)$ 对于第二个变元来说，是共轭线性的，即对于任何 $x, y, z\in H$，及任何 $\alpha, \beta\in\mathbb{\Lambda}$，成立着

$$(z, \alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}(z, x)+\bar{\beta}(z, y).$$

当 H 是实空间时，内积对第二变元也是线性的．

利用线性条件 (ii) 和 (iv)，易知 x、y 中只要一个是 0，便有 $(x, y)=0$.

定理 1　如果 H 是内积空间，那末有

(1) Schwarz 不等式：

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y), \quad x, y \in H; \tag{1.1}$$

(2) 令 $\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$，$\|\cdot\|$ 是 H 上的范数；

(3) $(\cdot, \cdot)$ 按 $\|\cdot\|$ 是二元连续函数.

证明　对任何数 λ，都有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (x+\lambda y, x+\lambda y) \\ &= (x, x)+2\mathrm{Re}\{(x, y)\bar{\lambda}\}+(y, y)|\lambda|^2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

当 $(y, y)=0$，即 $y=0$ 时，(1.1) 显然成立. 今不妨设 $y \neq 0$，因而 $(y, y)>0$，取 $\lambda=-\frac{(x, y)}{(y, y)}$（这个数是使 (1.2) 的右边达到最小值的数），就得到

$$(x, x)-2\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}+\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)^2}(y, y) \geqslant 0,$$

这就得到 (1.1)[注].

(2) 主要是验证 $\|\cdot\|$ 满足三角不等式，因为范数的其它要求都可以从内积的性质直接推出. 在 (1.2) 中取 $\lambda=1$，立即得到

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\,\mathrm{Re}(x, y)+\|y\|^2. \tag{1.3}$$

由 Schwarz 不等式可知

$$|\mathrm{Re}(x, y)| \leqslant |(x, y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \tag{1.4}$$

由 (1.3) 及 (1.4) 即知

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2,$$

所以

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|.$$

我们称范数 $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$ 是由内积 (x, y) 导出的范数，因此，内积空间按内积导出的范数成为赋范线性空间. 凡是在内积

[注]　从定理 1 的 (1) 的证明可以看出，当 $(\cdot, \cdot)$ 仅满足条件 (i)，(ii) 和条件 (iii) 中的 $(x, x) \geqslant 0$ 对一切 $x \in H$ 成立时，Schwarz 不等式仍然成立. 因为当 $(y, y)=0$ 时，从 (1.2) 对一切 $x \in H$，$\lambda \in \Lambda$ 成立，容易推出 $(x, y)=0$（读者自行证明），即定理 1 的 (1) 仍成立.

空间中的极限、收敛等概念，通常都是按照这个范数所导出的距离 ρ 讲的.

(3) 因为

$$
\begin{aligned}
&|(x_n, y_n)-(x_0, y_0)| \\
\leqslant &|(x_n, y_n)-(x_0, y_n)|+|(x_0, y_n)-(x_0, y_0)| \\
= &|(x_n-x_0, y_n)|+|(x_0, y_n-y_0)| \\
\leqslant &\|x_n-x_0\|\|y_n\|+\|x_0\|\|y_n-y_0\|,
\end{aligned}
$$

在上式中，令 $n\to\infty$，再注意到由于 $y_n\to y_0$，根据第四章，y_n 是有界的，我们得到

$$|(x_n, y_n)-(x_0, y_0)|\to 0.$$

证毕.

定义 完备的内积空间称为希尔伯特(Hilbert)空间.

例1 设 l^2 是满足条件 $\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^2<\infty$ 的数列 $\{x_n\}$ 全体按通常的线性运算所成的线性空间(参看第四章§3)，当

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2,\ y=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)\in l^2$$

时，规定

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i.$$

可以证明这样定义的 $(\cdot, \cdot)$ 确实满足内积的三个条件. 今后在 l^2 中都是这样取内积. l^2 是一个 Hilbert 空间(它的完备性见第四章§5定理8的系).

例2. 设 $L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是定义在 Ω 上的关于 μ 平方可积的函数全体(几乎处处相等的两个函数看作是同一个向量)按通常的线性运算所成的线性空间(见第四章§3). 对于 $f, g\in L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu)$，规定内积为

$$(f, g)=\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

容易验证这确实是内积，$L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是一个 Hilbert 空间(完备性见第四章§5).

例3 设 H 是满足

$$\int_{-1}^{1}|f(t)|^2\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt<\infty$$

的 f 全体，在 H 上规定

$$(f,\ h)=\int_{-1}^{1}f(t)\overline{h(t)}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt,\qquad f,\ h\in H.$$

容易验证 H 是 Hilbert 空间(可以直接验证)，但如取

$$g(t)=\int_{-1}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$g(t)$ 所产生的$[-1,\ 1]$上勒贝格-斯蒂阶测度为 μ，那末上述内积便是

$$(f,\ h)=\int_{-1}^{1}f(t)\overline{h(t)}\,d\mu(t),\quad f,\ h\in H.$$

所以本例实质上是例 2 的特殊情况.

例 4　设 $\{a_n\}$ 是一列非负实数，令 H 是满足 $\sum\limits_{n}a_n|x_n|^2<\infty$ 的数列 $\{x_n\}$ 全体，它按通常数列的加法和数乘成为线性空间，如果对 H 中任何 $x=\{x_n\}$，$y=\{y_n\}$ 规定

$$(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\bar{y}_n.$$

易知，H 也成为 Hilbert 空间，记为 $l^2(\{a_n\})$. 用一般的测度的观念，实际上例 1、例 4 也都是例 2 的特例.

2. 内积和范数

引理 1　如果 H 是内积空间，$\|\cdot\|$ 是由内积导出的范数，那末

(1) 下列极化恒等式成立：即当 H 是实空间时，

$$(x,\ y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),\quad x,\ y\in H;\qquad(1.5)$$

当 H 是复空间时，

$$(x,\ y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2),\quad x,\ y\in H.\qquad(1.6)$$

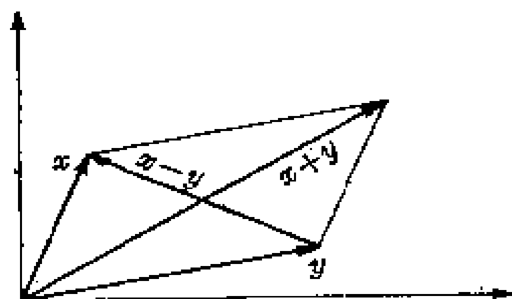
(2) 下述平行四边形公式成立：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad x,\ y\in H. \tag{1.7}$$

证明 (1.5)、(1.6)式可经直接计算得到. 同样, 只要把范数用内积表示, 就得到

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,\ x+y)+(x-y,\ x-y)$$
$$=2(x,\ x)+2(y,\ y)=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$ 证毕.

引理1说明: (1) 内积空间中的内积可以用由它导出的范数来表达; (2) 由内积决定的范数必须适合平行四边形公式.



平行四边形公式是内积空间中范数的特征. 换言之, 有下列定理:

定理2 设 X 是一个赋范线性空间, 范数为 $\|\cdot\|$. 如果 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形公式 (1.7), 那末必定可以在 X 中定义内积 $(\cdot,\ \cdot)$, 使 $\|\cdot\|$ 就是由$(\cdot,\ \cdot)$导出的范数.

证明 当 X 是实空间时, 如果 $\|\cdot\|$ 确是由内积导出的, 那末, 我们知道极化恒等式成立, 即有(1.5), 这启发我们对给定的 $\|\cdot\|$, 作

$$(x,\ y)_1=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),\quad x,\ y\in X. \tag{1.8}$$

下面证明: 当 X 是实空间时, $(x,\ y)_1$ 确实是内积. 事实上, 从(1.8), 显然有 $(x,\ y)_1=(y,\ x)_1$, 即内积的条件(i)被满足.

再证 $(\cdot,\ \cdot)_1$ 对第一变元是线性的. 由(1.7)及(1.8)得到

$$(x,\ z)_1+(y,\ z)_1=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)=2\left(\frac{x+y}{2},\ z\right)_1. \tag{1.9}$$

由(1.8), 显然有 $(0,\ z)_1=0$. 在(1.9)中取 $y=0$, 得到

$$(x,\ z)_1=2\left(\frac{x}{2},\ z\right)_1.$$

上式说明因子"$\frac{1}{2}$"可以从$(\cdot,\ \cdot)_1$中的第一项中提出. 再在这个

式子中把 x 换成 $x+y$，又利用(1.9)得到

$$(x,\ z)_1+(y,\ z)_1=(x+y,\ z)_1. \tag{1.10}$$

上式说明 $(\cdot,\ \cdot)_1$ 对第一个变元具有可加性．对于给定的 $x,\ z\in X$，我们作函数

$$f(t)=(tx,\ z)_1,\quad -\infty<t<\infty.$$

由于(1.10)，显然函数 $f(t)$ 满足函数方程

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2),\quad -\infty<t_1,\ t_2<\infty. \tag{1.11}$$

又由于当 $t_n\to t$ 时，$\|t_nx\pm z\|\to\|tx\pm z\|$，即 $\|tx\pm z\|$ 是 t 的连续函数．由(1.8)，$f(t)$ 是连续函数．但是满足(1.11)的连续函数 $f(t)$ 必定是如下函数：

$$f(t)=f(1)t$$

(见定理 2 后注)．因此

$$(tx,\ z)_1=t(x,\ z)_1. \tag{1.12}$$

(1.10)及(1.12)合起来说明 $(\cdot,\ \cdot)_1$ 适合内积条件(ii)．

在(1.8)中，令 $y=x$，就得到

$$\|x\|^2=(x,\ x)_1,$$

所以 $(\cdot,\ \cdot)_1$ 适合内积的条件(iii)．因此，当 X 是实空间时，$(\cdot,\ \cdot)_1$ 确为内积，同时由内积 $(\cdot,\ \cdot)_1$ 导出的范数就是 $\|\cdot\|$．

如果 X 是复的赋范线性空间，我们受到极化恒等式(1.6)的启发，作

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)\\&=(x,\ y)_1+i(x,\ iy)_1,\end{aligned} \tag{1.13}$$

这里 $(x,\ y)_1$ 由等式(1.8)决定．我们来证明这是 X 上的内积．事实上，由等式(1.10)知道

$$(x,\ z)+(y,\ z)=(x+y,\ z),$$

又由(1.12)知道对任意实数 α，成立着

$$(\alpha x,\ y)=\alpha(x,\ y), \tag{1.14}$$

又由(1.13)可以直接验证

$$(ix,\ y)=i(x,\ y),$$

因此，对于任意复数 α，(1.14)仍成立．所以$(\cdot,\ \cdot)$适合内积的条件(ii)．由(1.13)易知

$$(y,\ x)=\overline{(x,\ y)}.$$

再在(1.13)中，令 $y=x$，就得到

$$(x,\ x)=\|x\|^2,$$

所以$(\cdot,\ \cdot)$确是 X 上的内积，并且由$(\cdot,\ \cdot)$决定的范数就是 $\|\cdot\|$，证毕．

注 设 $f(t)\ (-\infty<t<\infty)$ 是连续函数，且满足方程

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2),\quad -\infty<t_1,\ t_2<\infty, \tag{1.15}$$

那末对于一切 t，

$$f(t)=tf(1). \tag{1.16}$$

证明 首先证明对任何自然数 n，

$$f(nt)=nf(t),\quad -\infty<t<\infty. \tag{1.17}$$

事实上，当 $n=1$ 时，(1.17)显然成立．设对于自然数 n，(1.17)成立，由(1.15)得到

$$f((n+1)t)=f(nt)+f(t)=(n+1)f(t),$$

所以对 $n+1$，(1.17)成立．由数学归纳法，对一切自然数 n，(1.17)成立．而对任何正有理数 $\frac{n}{m}$，两次利用(1.17)，得到

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1),$$

再在(1.17)中取 $n>1$ 及 $t=0$，立即知道 $f(0)=0$；又取 $t_1=-t_2=t$，就得到

$$f(-t)=-f(t),$$

所以对一切有理数 t，(1.16)成立．再利用函数 $f(t)$ 和 $tf(1)$ 的连续性，立即可知对一切实数 t，(1.16)成立．证毕．

定理1及2说明：赋范线性空间成为内积空间的条件是范数满足平行四边形公式．由此可见，并非每个赋范线性空间都是内积空间．例如 $L^p[a,\ b]\ (p\geqslant 1,\ p\neq 2)$ 就不是内积空间．因为向量 $x(t)\equiv C$（非零常数函数），$y(t)=t$ 在 $L^p[a,\ b]$ 中就不满足平行四边形公式．

习　题

1. 举出三种类型赋范线性空间 X，使得在 X 上的范数不能由内积导出.

2. 设 X_1、X_2、…、X_n、… 是一列内积空间. 令 $X=\left\{\{x_n\}\mid x_n\in X_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\right\}$，当 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\in X$，α，$\beta\in\mathbb{K}$ 时，规定 $\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\}$，

$$(\{x_n\},\ \{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,\ y_n).$$

证明：X 是内积空间，并且 X 是 Hilbert 空间的充要条件是每个 X_n 都是 Hilbert 空间.

3. 设 X 是 n 维空间，$\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$ 是 X 的一组 Hamel 基.

证明：$(x,\ y)$ 成为 X 上的内积的充要条件是存在 $n\times n$ 正定方阵 $A=(a_{\mu\nu})$，使得

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu,\ \sum_{\nu=1}^{n}y_\nu e_\nu\right)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}x_\mu\bar{y}_\nu.$$

4. 设 H 是内积空间，$y\in H$，证明映射 $x\mapsto(x,\ y)$，$x\in H$ 是 H 上的连续线性泛函，而且它的范数是 $\|y\|$.

5. 设 H 是内积空间，x_1、…、x_n 是 H 中的向量，它们满足条件

$$(x_\mu,\ x_\nu)=\begin{cases}0, & \text{当 } \mu\neq\nu \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } \mu=\nu \text{ 时}.\end{cases}$$

证明：$\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$ 必是一组线性独立的向量.

6. 证明：n 维内积空间必与 n 维欧几里德空间等距同构，从而任一内积空间的有限维(线性)子空间是完备的.

7. 设 H 是内积空间，u、v 是两个非零向量. 证明下列三件事等价：

(1) 存在正数 α，使得 $u=\alpha v$；

(2) $(u,\ v)=\|u\|\|v\|$；

(3) $\|u+v\|=\|u\|+\|v\|$.

(证明时，不要用本节以后的知识)

8. 设 H、G 是两个内积空间，在乘积空间 $H\times G=\{\{x,y\}\mid x\in H,\ y\in G\}$ 中引入

$$(\{x_1,\ y_1\},\ \{x_2,\ y_2\})=(x_1,\ x_2)+(y_1,\ y_2).$$

证明：$H\times G$ 成为内积空间，并且 $H\times G$ 成为 Hilbert 空间的充要条件是 H、G 都是 Hilbert 空间.

9. 证明任何内积空间必可完备化成 Hilbert 空间.

10. 设 X 是线性空间, $(\cdot,\ \cdot)$ 是 X 上二元函数, 满足内积的 (i)、(ii) 及 (iii) 中的对一切 $x\in H$, $(x,\ x)\geqslant 0$. 称 $(\cdot,\ \cdot)$ 为 X 上的准内积. 证明:

(1) $L=\{x\mid (x,\ x)=0\}$ 必是 X 的线性子空间.

(2) 作 X/L 上的二元函数 $(\cdot,\ \cdot)_{\sim}$: 对任何 $\tilde{x},\ \tilde{y}\in X/L$,

$$(\tilde{x},\ \tilde{y})_{\sim}=(x,\ y),$$

那末, $(\cdot,\ \cdot)_{\sim}$ 是 X/L 上的内积.

§2 投影定理

1. 直交投影

在内积空间中, 因为向量之间定义了内积, 我们还可仿照欧几里德空间, 引入 x、y 之间的夹角 θ: $\cos\theta=\dfrac{(x,\ y)}{\|x\|\|y\|}$. 但今后最有用的情况还是 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, 即 x 与 y 直交的概念.

定义 设 H 是内积空间, $(\cdot,\ \cdot)$ 是其中的内积. 如果 H 中两个向量 x、y 满足 $(x,\ y)=0$, 就说 x 与 y 直交, 记作 $x\perp y$. 设 M 是 H 的非空子集, 当 x 与 M 中一切向量 y 直交时, 称 x 与 M 直交, 记作 $x\perp M$. 设 M 与 N 是 H 的两个非空子集, 如果对任何 $x\in M$ 及 $y\in N$, 都有 $x\perp y$, 就称 M 与 N 直交, 记作 $M\perp N$. 设 M 是 H 的非空子集, H 中所有与 M 直交的向量全体称为 M 的直交补(集), 记为 $M^{\perp}$.

显然, 当 $x\perp y$ 时, 由直接计算可得

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

这个等式称为内积空间中的勾股定理.

直交的概念是相互的, 也就是说 $x\perp y$ 时, $y\perp x$. 由内积的性质(iii), 知道零向量是和全空间一切向量直交的唯一的向量.

引理 1 设 M、N 是内积空间 H 中两个非空子集, 下列命题成立:

(1) $M^{\perp}$ 是 H 中闭线性子空间.

(2) 如果 $M\subset N$, 那末 $N^{\perp}\subset M^{\perp}$.

(3) $M\subset M^{\perp\perp}$.

(4) $M\cap M^{\perp}=\emptyset$ 或 $\{0\}$.

(5) $\{0\}^{\perp}=H$, $H^{\perp}=\{0\}$.

(6) $M^{\perp}=(\overline{\operatorname{span}}\, M)^{\perp}$.

证明 (1) 如果 $x_1, x_2\in M^{\perp}$, 那末

$$(x_1, y)=(x_2, y)=0, \quad y\in M. \tag{2.1}$$

由此可知对任何 $\alpha, \beta\in \mathbb{\Lambda}$,

$$(\alpha x_1+\beta x_2, y)=0, \quad y\in M, \tag{2.2}$$

即 $M^{\perp}$ 是线性子空间. 又如果 $\{x_n\}$ 是 $M^{\perp}$ 中收敛于 x 的点列, 那末由

$$(x_n, y)=0, \quad y\in M, \tag{2.3}$$

从$(\cdot, \cdot)$是二元连续, 立即得到

$$(x, y)=\lim_{n\to\infty}(x_n, y)=0, \quad y\in M, \tag{2.4}$$

即 M 是闭的.

(2) 因为 $M\subset N$, 所以凡与 N 中一切向量直交的 y 必直交于 M 中的向量, 从而 $M^{\perp}\supset N^{\perp}$.

(3) 设 $x\in M$, 因而 $x\perp M^{\perp}$, 从而 $x\in M^{\perp\perp}$, 即 $M\subset M^{\perp\perp}$.

(4) 如果 $M\cap M^{\perp}\neq\emptyset$, 任取 $x\in M\cap M^{\perp}$, 于是 $x\perp x$, 即 $(x, x)=0$, 由内积性质(i)立即可知 $x=0$.

(5) 显然的.

(6) 因为 $M\subset\overline{\operatorname{span}}\, M$, 根据 (2), $M^{\perp}\supset(\overline{\operatorname{span}}\, M)^{\perp}$. 反之, 设 $x\in M^{\perp}$, 因而对任何 $x_1, x_2\in M$,

$$(x, x_i)=0, \quad i=1, 2.$$

从而对任何 $\alpha, \beta\in \mathbb{\Lambda}$, $(x, \alpha x_1+\beta x_2)=0$, 即 $x\perp\operatorname{span} M$. 再利用$(\cdot, \cdot)$的连续性, 易证 $x\perp\overline{\operatorname{span}}\, M$, 即 $M^{\perp}\subset(\overline{\operatorname{span}}\, M)^{\perp}$, 从而 $M^{\perp}=(\overline{\operatorname{span}}\, M)^{\perp}$. 证毕.

定义 设 H 是内积空间, M_1 及 M_2 是 H 的两个线性子空间, 如果 $M_1\perp M_2$, 那末称 $M=\{x_1+x_2 \mid x_1\in M_1, x_2\in M_2\}$ 为 M_1

与 M_2 的直交和，记为 $M_1\oplus M_2$.

类似地可以定义有限个线性子空间的直交和.

由引理 1 的(4)可知直交和必为直接和.

显然，假定内积空间 H 分解为 M_1 与 M_2 的线性和，即 $H=\{x_1+x_2 \mid x_1\in M_1,\ x_2\in M_2\}$，那末它为直交和的充要条件是 $M_1=M_2^{\perp}$，$M_2=M_1^{\perp}$.

定义 设 M 是内积空间 H 的线性子空间，$x\in H$，如果有 $x_0\in M$，$x_1\perp M$，使得

$$x=x_0+x_1, \tag{2.5}$$

那末称 x_0 是 x 在 M 上的(直交)投影.

一般说来，对于内积空间 H 中的任意向量 x 及任意线性子空间 M，x 在 M 上的投影并不一定存在. 但是，如果 x 在 M 上有投影，那末投影一定是唯一的. 因为如果 x_0 及 x_0' 都是 x 在 M 上的投影，由定义可知 $x_0,\ x_0'\in M$，$x-x_0\perp M$，$x-x_0'\perp M$. 因此，$x_0-x_0'=(x-x_0')-(x-x_0)\in M^{\perp}$. 另一方面，由于 M 是线性子空间，所以 $x_0-x_0'\in M$，从而 $x_0-x_0'\in M\cap M^{\perp}$，所以 $x_0=x_0'$.

投影有下面重要的极值性质:

定理 1 设 M 是内积空间 H 的线性子空间，$x\in H$，$x_0\in M$，那末

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\| \tag{2.6}$$

成立的充要条件是 x_0 为 x 在 M 上的投影.

证明 充分性 因为 x_0 是 x 在 M 上的投影，所以从(2.5)得到 $x-x_0\perp M$. 对于任何 $y\in M$，由于 $x-y=(x-x_0)+(x_0-y)$，而 $x_0-y\in M$，因此 $x-x_0\perp x_0-y$，故由"勾股定理"得到

$$\|x-y\|^2=\|x-x_0\|^2+\|x_0-y\|^2\geqslant\|x-x_0\|^2, \tag{2.7}$$

显然，(2.7) 式当且仅当 $y=x_0$ 时才成立等号. 由 (2.7) 式即知 (2.6)式成立.

必要性 任取 $z\in M$，$z\neq 0$，这时对任何数 λ，因为 $x_0+\lambda z\in M$，所以

$$\inf_{y\in M}\|x-y\|\leqslant\|x-x_0-\lambda z\|^2$$

$$=\|x-x_0\|^2-2\,\mathrm{Re}(\bar{\lambda}(x-x_0,\ z))+|\lambda|^2\|z\|^2. \qquad (2.8)$$

令 $\lambda=\dfrac{(x-x_0,\ z)}{\|z\|^2}$ (这是使(2.8)式右端取极小值的 λ)，就得到

$$\inf_{y\in M}\|x-y\|\leqslant\|x-x_0\|^2-2\frac{|(x-x_0,\ z)|^2}{\|z\|^2}+\frac{|(x-x_0,\ z)|^2}{\|z\|^2}$$

$$=\|x-x_0\|^2-\frac{|(x-x_0,\ z)|^2}{\|z\|^2}.$$

因为(2.6)成立，所以 $(x-x_0,\ z)=0$. 这就证明了 $x-x_0\perp M$. 证毕.

定理1说明用(线性子空间) M 中的元 y 来逼近 x 时，当且仅当 y 等于 x 在 M 上的投影 x_0 时，逼近的程度最好. 因此在随机过程理论、逼近论和最优化以及其它许多学科中，常用投影的这个性质来研究最佳逼近.

下面我们要证明当 M 为 H 的完备子空间时，H 中任何元 x 在 M 上的投影必定存在.

2. 投影定理　我们先介绍

引理2　(变分引理)　设 M 是内积空间 H 中非空凸的完备[注]子集，$x\in H$. 记 d 为 x 到 M 的距离

$$d=\inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

那末必有唯一的 $x_0\in M$，使得 $\|x-x_0\|=d$.

证明　由距离的定义，必定有 M 中点列 $\{x_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=d.$$

这样的点列称为极小化序列. 下面证明任何极小化序列 $\{x_n\}$ 必是基本点列.

由§1的平行四边形公式(1.7)得到

$$2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2=\|x_m-x\|^2+\|x_n-x\|^2-2\left\|\frac{x_m+x_n}{2}-x\right\|^2, \qquad (2.9)$$

[注]　指 M 按 H 中的距离成为完备的子(度量)空间.

因为 M 是凸集，$\frac{x_m+x_n}{2}\in M$，所以 $\left\|\frac{x_m+x_n}{2}-x\right\|\geqslant d$. 由 (2.9) 式得到

$$0\leqslant 2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2\leqslant\|x_m-x\|^2+\|x_n-x\|^2-2d^2.$$

令 $m, n\to\infty$，就有 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|^2=0$，所以 $\{x_n\}$ 是基本点列.

因为 M 是完备的子(度量)空间，所以有 $x_0\in M$，使 $x_n\to x_0$. 这样 $\|x-x_0\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|=d$.

如果 M 中还有元 y_0，使 $\|x-y_0\|=d$，那末点列 $\{x_0, y_0, x_0, y_0, \cdots\}$ 显然也是极小化点列，因此也是基本点列，这就说明 $x_0=y_0$，即在 M 中使 $\|x-x_0\|=d$ 的元 x_0 是唯一的. 证毕.

这个变分引理是内积空间的一个基本引理，它在微分方程，现代控制论中有重要应用 (参见 [13]). 由于线性子空间是一个凸集，在本书后面应用这个引理时，常常是讨论 M 是内积空间的完备线性子空间的情况.

由定理 1 和引理 2，立即得到下面的

定理 2 (投影定理) 设 M 是内积空间 H 的完备线性子空间，那末对任何 $x\in H$，x 在 M 上必有投影. 从而 $H=M\oplus M^{\perp}$，并且，如果记 x 在 M 上投影为 x_M、$x_{M^\perp}=x-x_M$，则

$$\|x\|^2=\|x_M\|^2+\|x_{M^\perp}\|^2.$$

证明 由引理 2，对任何 $x\in H$，必有 $x_0\in M$，使得

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

又由定理 1 可知，x_0 就是 x 在 M 上的投影.

记 x_0 为 x_M，$x_{M^\perp}$ 为 $x-x_0$，由投影定义知 $x_{M^\perp}\in M^\perp$，从而 $H=M\oplus M^\perp$. 再由 $x_M\perp x_{M^\perp}$，由勾股定理，立即有

$$\|x\|^2=\|x_M\|^2+\|x_{M^\perp}\|^2.$$

证毕.

系 1 设 H 是内积空间 H 中的完备线性子空间，而且 $M\neq H$，那末 $M^\perp$ 中有非零元素.

证明　由于 $H\neq M$，$H=M\oplus M^{\perp}$，所以 $M^{\perp}\neq\{0\}$. 证毕.

容易看出，当 H 是 Hilbert 空间，M 是 H 的闭线性子空间时，引理 2 和定理 2 及系 1 等都成立.

系 2　设 H 是 Hilbert 空间，M 是 H 的线性子空间，那末 $\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$. 特别地有，$M^{\perp}=\{0\}$ 的充要条件是 M 在 H 中稠密.

证明　由引理 1，$(M^{\perp})^{\perp}$ 是 H 的闭线性子空间，它也可以看成是一个 Hilbert 空间. 显然，$(M^{\perp})^{\perp}\supset M$，而 $\overline{M}$ 是包含 M 的最小闭集，所以 $\overline{M}\subset(M^{\perp})^{\perp}$. 另一方面，由第四章 § 4，$\overline{M}$ 也是 Hilbert 空间 $(M^{\perp})^{\perp}$ 的闭线性子空间. 如果 $\overline{M}\neq(M^{\perp})^{\perp}$，那末由系 1 必有非零向量 $x\in(M^{\perp})^{\perp}$，而且 $x\in\overline{M}^{\perp}$，由此 $x\in M^{\perp}$. 但 $x\in(M^{\perp})^{\perp}$，所以 $x\perp x$，这和 $x\neq 0$ 矛盾. 因此 $(M^{\perp})^{\perp}=\overline{M}$.

特别，$M^{\perp}=\{0\}$ 就等价于 $(M^{\perp})^{\perp}=\{0\}^{\perp}=H$，也就等价于 $\overline{M}=H$. 证毕.

例 1　设 $H=L^2(\Omega,\ \boldsymbol{R},\ \mu)$，$\boldsymbol{R}$ 是 Ω 中 σ-代数. 又设 $E\in\boldsymbol{R}$，$M=\{x\,|\,x\in H,\ x(\omega)\underset{\mu}{=}0,\ \omega\in E\}$. 对任何 $x\in H$，作分解

$$
\begin{aligned}
&x(\omega)=x_1(\omega)+x_0(\omega),\\
&x_1(\omega)=x(\omega)\chi_E(\omega),\\
&x_0(\omega)=x(\omega)(1-\chi_E(\omega)).
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

显然，$x_0(\omega)\in M$，并且对任何 $y\in M$，

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|^2&=\int_\Omega|x(\omega)-y(\omega)|^2d\mu\\
&=\int_E|x_1(\omega)|^2d\mu+\int_{\Omega-E}|x_0(\omega)-y(\omega)|^2d\mu.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

由此可知，要使上式达到最小值，必须在 M 中取 $y=x_0$，即

$$
\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|. \tag{2.12}
$$

根据定理 1 和引理 2，x_0 是 x 在 M 上的投影.

以后我们还将提供求一个向量在某个子空间上投影的有效而一般的方法. 下面我们举例说明在其它领域中投影的重要性.

例 2 （最小二乘法） 在实际课题中经常遇到这样的问题：设有 $n+1$ 个变量 x_0、x_1、…、x_n，在 m 次观察中，它们每次的观察值是 $(x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)})$（假定坐标都是实数值），$j=1, 2, \cdots, m$. 我们现在要用变量 x_1、x_2、…、x_n 等的线性组合近似地表达 x_0，也就是要求出数 α_1、α_2、…、α_n，使得 $x_0^{(j)}-\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu^{(j)}$，$j=1, 2, \cdots, m$ 尽可能地小. 我们用这些误差的平方和来作为衡量总误差的标准，那末问题就归结为求 α_1、α_2、…、α_n，使得

$$\sum_{j=1}^{m}\left(x_0^{(j)}-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu^{(j)}\right)^2=\inf_{\lambda_\nu\in\mathbf{R}}\sum_{j=1}^{m}\left(x_0^{(j)}-\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu x_\nu^{(j)}\right)^2,$$

这是线性回归中常见的所谓最小二乘法. 显然，如果视 x_0、x_1、…、x_n 是 E^m 空间的向量，那末这类问题实质上就是求 Hilbert 空间 E^m 中向量 x_0 在 $M=\operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$ 上的投影.

例 3 （平方平均逼近） 在许多场合常遇到如下的函数逼近论问题：对于给定的一个较一般的函数 f，研究用给定的 n 个函数 φ_1、…、φ_n（例如是多项式，或是样条函数，或是三角多项式等）的线性组合来逼近 f，使得误差的平方平均值最小. 具体地说，例如 $f\in L^2[a, b]$，$\varphi_j=x^{j-1}$，$j=1, 2, \cdots, n$，我们要求出一组数 α_1、α_2、…、α_n，使误差

$$\left\|f-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x^{\nu-1}\right\|=\left(\int_a^b\left|f(x)-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x^{\nu-1}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

最小. 这就是要研究：用 $n-1$ 次多项式 $p=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x^{\nu-1}$ 来逼近 f 时，怎样的多项式使得按平方平均逼近的误差最小. 误差达到最小的多项式就称为 f 的按平方平均的最佳逼近多项式. 求这种多项式的问题就称为按平方平均最佳逼近问题. 类似地还有用三角多项式，或阶梯函数，或样条函数来逼近给定函数的按平方平均最佳的逼近问题. 显然，这就是求 f 在 $\operatorname{span}\{\varphi_i|i=1, 2, \cdots, n\}$ 上的投影.

例 4 （方差逼近） 在概率论，特别是随机过程理论中也有和例 3 类似的问题. 设 $(\Omega, \boldsymbol{R}, P)$ 是一个测度空间，而且 $P(\Omega)$

$=1$. 这时称$(\Omega, \boldsymbol{R}, P)$为概率测度空间，$P$ 称为概率测度. $(\Omega, \boldsymbol{R})$ 上的可测函数称为随机变量. 设 X 和 X_1、X_2、$\cdots$、X_n 是 $L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, P)$ 中给定的 $n+1$ 个随机变量. 在概率论中，常常要求出 n 个数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得

$$\left\|X-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu X_\nu\right\|=\left(\int_{\Omega}\left|X(\omega)-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu X_\nu(\omega)\right|^2 dP(\omega)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.14}$$

最小，通常称为方差逼近. 这就是用 X_1、$\cdots$、X_n 的线性组合来估计 X 的最佳估值问题.

所有上述类似的问题都可以抽象成如下的问题：

设 H 是内积空间，x_1、x_2、$\cdots$、x_n 以及 x 是 H 中 $n+1$ 个向量，要求出 n 个数 α_1、α_2、$\cdots$、α_n，使得

$$\left\|x-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu\right\|=\inf_{\lambda_\nu}\left\|x-\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu x_\nu\right\|.$$

这个问题的解法如下：我们不妨设 x_1、$\cdots$、x_n 是线性无关的(不然的话，只要从 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 中取出 $k(k\leqslant n)$个线性无关的向量，譬如 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$，使得其余的都是这 k 个向量的线性组合，这时，我们只要考虑 x_1、$\cdots$、x_k 的线性组合好了). 令 $M=\mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$. 根据第四章 § 5 (或上一节的习题 6)，$M$ 是完备的，因此由引理 2 必有 $x_0=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu\in M$，使得 $\|x-x_0\|$ 达到最小. 由定理 1，

$$(x-x_0, y)=0,\quad y\in M, \tag{2.15}$$

这显然等价于

$$(x-x_0, x_\mu)=0,\quad \mu=1, 2, \cdots, n. \tag{2.16}$$

而(2.16)就是下面的代数方程组

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(x_\nu, x_\mu)=(x, x_\mu),\quad \mu=1, 2, \cdots, n. \tag{2.17}$$

由于引理 2，达到最小的 α_1、α_2、$\cdots$、α_n 是唯一的，所以上述代数方程组的解是唯一的，因此方程组的系数行列式不等于 0. 因而解就是

$$\alpha_\nu=\frac{\begin{vmatrix}(x_1, x_1)\cdots(x, x_1)\cdots(x_n, x_1)\\(x_1, x_2)\cdots(x, x_2)\cdots(x_n, x_2)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(x_1, x_n)\cdots(x, x_n)\cdots(x_n, x_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(x_1, x_1)\cdots(x_\nu, x_1)\cdots(x_n, x_1)\\(x_1, x_2)\cdots(x_\nu, x_2)\cdots(x_n, x_2)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(x_1, x_n)\cdots(x_\nu, x_n)\cdots(x_n, x_n)\end{vmatrix}},\ \nu=1, 2, \cdots, n. \tag{2.18}$$

3. 变分引理的注

由于变分引理（见引理 2）是有关极值可达的引理，在非线性分析中它也具有重要的地位，这里将再作一些讨论.

定理 3 设 M 是内积空间 H 中的完备凸集，那末对任何 $x\in H$，下面三件事等价：

(1) $x_0\in M$，使得 $\|x-x_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$；

(2) $x_0\in M$，使得 $\operatorname{Re}(x-x_0, y-x_0)\leqslant 0$ 对一切 $y\in M$ 成立；

(3) $x_0\in M$，使得 $\operatorname{Re}(x-y, x_0-y)\geqslant 0$ 对一切 $y\in M$ 成立.

证明 (1)⇒(2) 对任何 $y\in M$，$\lambda\in[0, 1]$，因为 M 是凸的，所以 $(1-\lambda)x_0+\lambda y=x_0+\lambda(y-x_0)\in M$，从而

$$\|x-x_0\|^2\leqslant\|x-(x_0+\lambda(y-x_0))\|^2.$$

但是

$$\|x-(x_0+\lambda(y-x_0))\|^2=\|x-x_0\|^2-2\lambda\operatorname{Re}(x-x_0, y-x_0)+\lambda^2\|y-x_0\|^2, \tag{2.19}$$

从而对任何 $\lambda\in(0, 1]$，

$$\operatorname{Re}(x-x_0, y-x_0)\leqslant\frac{\lambda}{2}\|y-x_0\|^2, \tag{2.20}$$

令 $\lambda\to 0$，就得到(2).

(2)⇒(3) 由(2)，立即得到

$$\operatorname{Re}(x-y+y-x_0, y-x_0)\leqslant 0,\quad y\in M, \tag{2.21}$$

即

$$\operatorname{Re}(x-y, y-x_0)\leqslant-\|y-x_0\|^2. \tag{2.22}$$

由(2.21)，立即可以得到(3).

(3)⇒(1)　用 $x_0+\lambda(y-x_0)\in M(y\in M,\ \lambda\in(0,1])$ 代替(3)中的 y，便有

$$\mathrm{Re}(x-(x_0+\lambda(y-x_0)),\ x_0-(x_0+\lambda(y-x_0)))\geqslant 0,$$

因此

$$\mathrm{Re}(x-x_0,\ y-x_0)\leqslant\lambda\|y-x_0\|^2,\quad \lambda\in(0,1]. \tag{2.23}$$

令 $\lambda\to 0$，就得到

$$\mathrm{Re}(x-x_0,\ y-x_0)\leqslant 0. \tag{2.24}$$

在(2.19)中，令 $\lambda=1$，利用(2.24)立即知道(1)成立．证毕．

利用变分引理，作 H 到 M 的映射

$$P:\ x\mapsto x_0, \tag{2.25}$$

其中 x_0 满足 $\|x-x_0\|=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$．一般说来，$P$ 不是线性映射，但它有如下性质．

系　对任何 $x,\ y\in H$，$\|Px-Py\|\leqslant\|x-y\|$.

证明　由于定理 3 的(2)，

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Re}(x-Px,\ z-Px)\leqslant 0,\quad z\in M,\\ &\mathrm{Re}(y-Py,\ z'-Py)\leqslant 0,\ z'\in M.\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

取 $z=Py,\ z'=Px$．由(2.26)的两式的和得到

$$\mathrm{Re}(-x+Px+y-Py,\ Px-Py)\leqslant 0, \tag{2.27}$$

从而　$$\|Px-Py\|^2\leqslant\mathrm{Re}(y-x,\ Px-Py).$$

利用 Schwarz 不等式，由上式立即得到

$$\|Px-Py\|^2\leqslant\|y-x\|\|Px-Py\|,$$

从而 $\|Px-Py\|\leqslant\|x-y\|$．证毕．

习　　题

1．证明：当 $x\perp y$ 时，$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

2．设 H 是内积空间，M 是非空的子集，如果 $\overline{M}$ 是完备子空间，那末 $\overline{M}=M^{\perp\perp}$.

3．设 H 是内积空间，M、$N\subset H$．设 L 是 M 和 N (都非空)张成的线性子空间，证明 $L^\perp=M^\perp\cap N^\perp$.

4. 证明在本章§1习题2的 X 中,有下述关系: $X_n \perp X_m$ ($n \neq m$, $n, m=1, 2, \cdots$).

5. 在 Hilbert 空间 E^2 中, 设 $e_1=(1, 0)$, $e_2=(0, 1)$, $M=\text{cov}\{e_1, e_2\}$. 对任何 $x \in E^2$, 求出 $x_0 \in M$, 使得

$$\|x-x_0\|=\inf_{y \in M}\|x-y\|.$$

§3 内积空间中的直交系

1. 就范直交系

求投影最有效的办法就是引入直交系. 类似于欧几里德空间中的直交坐标系,在内积空间中可引入直交系的概念,它是数学分析中直交函数系概念的推广.

定义 设 $\mathscr{F}$ 是内积空间 H 中的一族非零向量, 如果 $\mathscr{F}$ 中任何两个不同的向量都直交, 就称 $\mathscr{F}$ 是 H 中的一个直交系. 如果直交系 $\mathscr{F}$ 中每个向量的范数都是1, 就称 $\mathscr{F}$ 是就范直交系.

例1 在 n 维欧几里德空间 E^n 中,

$$e_1=(1, 0, \cdots, 0),\ e_2=(0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,$$
$$e_n=(0, 0, \cdots, 0, 1)$$

组成就范直交系.

例2 在 $l^2(\{a_n\})$ (见§1例4)中, 如果 $a_n>0$ $(n=1, 2, \cdots)$, 那末

$$e_1=(1, 0, \cdots),\ e_2=(0, 1, 0, \cdots),\ \cdots,$$
$$e_n=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots),\ \cdots$$

就是直交系. 但一般说来,不是就范的,因为

$$\|e_n\|^2=(e_n, e_n)=a_n,$$

因而 $\left\{\dfrac{e_n}{\sqrt{a_n}}\right\}$ 是 $l^2(\{a_n\})$ 中的就范直交系.

例3 在实空间 $L^2\left([0, 2\pi], \dfrac{m}{\pi}\right)$ 中,规定内积为

$$(f, g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,\quad f,\ g\in L^2\left([0, 2\pi], \frac{m}{\pi}\right),$$

这时 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cdots$, $\cos nx$, $\sin nx$, $\cdots$ 组成 $L^2\left([0, 2\pi], \frac{m}{\pi}\right)$ 中的就范直交系.

由定义立即可知，如果 $\mathscr{F}$ 是内积空间 H 中的直交系(就范直交系)，那末 $\mathscr{F}$ 的任何子集也是 H 中的直交系(就范直交系).

在数学分析中，我们曾见到过富里埃(Fourier)级数，在那里，对于函数 $f(x)\in L^2\left([0, 2\pi], \frac{m}{\pi}\right)$，我们称

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=(f, 1),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=(f, \cos nx),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=(f, \sin nx)$$

为函数 $f(x)$ 关于三角函数的 Fourier 系数，称级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_n(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 为 f 的 Fourier 级数.

这个概念可以作如下的推广：

定义 设 $\mathscr{F}$ 是内积空间 H 中的就范直交系，$x\in H$，数集

$$\{(x, e)\,|\,e\in\mathscr{F}\}$$

称为向量 x 关于就范直交系 $\mathscr{F}$ 的 Fourier 系数集，而数 (x, e) 称为 x 关于 e 的 Fourier 系数[注].

例 4 如果一列函数 $\{e_n(t)\}(n=1, 2, \cdots)$ 都属于复空间 $L^2[a, b]$，而且

$$\int_a^b e_n(t)\overline{e_m(t)}\,dt=\delta_{nm}, \quad (n, m=1, 2, \cdots),$$

其中 δ_{mn} 满足：当 $n\neq m$ 时，$\delta_{nm}=0$；当 $n=m$ 时，$\delta_{nm}=1$，那末，

[注] 对于例 3 中的三角函数组成的就范直交系来说，按这里的定义，f 关于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的 Fourier 系数为 $\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，与数学分析中的相应的 Fourier 系数 $a_0=(f, 1)$ 相差一常数因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 但对于其余的各项 $\cos nt$, $\sin nt$ $(n\neq 0)$ 的 Fourier 系数，这里的定义和数学分析中完全一致.

$\{e_n\}$ 是 $L^2[a, b]$ 中的就范直交系. 这时, $x\in L^2[a, b]$ $(x=x(t))$ 关于 e_n 的 Fourier 系数就是

$$a_n=(x, e_n)=\int_a^b x(t)\overline{e_n(t)}dt, \quad (n=1, 2, \cdots).$$

特别地, $\{e^{i2\pi nt}\}(n=0, \pm1, \cdots)$ 是复 Hilbert 空间 $L^2[0, 1]$ 中的就范直交系, 对于 $f\in L^2[0, 1]$, 它的 Fourier 系数为

$$c_n=\int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt}dt, \quad (n=0, \pm1, \cdots).$$

就范直交系相当于三维欧几里德空间上过原点的直线, 或平面, 或空间本身中某些彼此直交的单位向量, 而向量 x 的 Fourier 系数相当于向量 x 在该单位向量方向的坐标. 由此, 易知有下面相仿的结果.

引理1 设 e_1、$\cdots$、e_n 是内积空间 H 中的就范直交系, $M=\text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$, $x\in H$, 那末

(1) $x_0=\sum_{i=1}^n(x, e_i)e_i$ 是 x 在 M 上的投影, 而且

$$\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^n|(x, e_i)|^2, \quad \|x-x_0\|^2=\|x\|^2-\|x_0\|^2; \tag{3.1}$$

(2) 成立不等式

$$\sum_{i=1}^n|(x, e_i)|^2\leqslant\|x\|^2, \quad x\in H; \tag{3.2}$$

(3) 对任何 n 个数 α_1、$\cdots$、α_n,

$$\left\|x-\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\right\|\geqslant\left\|x-\sum_{i=1}^n(x, e_i)e_i\right\|. \tag{3.3}$$

而(3.2)成为等式的充要条件是 $\alpha_i=(x, e_i)$.

证明 (1) 显然, $x_0=\sum_{i=1}^n(x, e_i)e_i\in M$, 而且 $(x_0, e_i)=(x, e_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 因此向量 $x-x_0$ 与 $e_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 直交, 从而 $x-x_0\perp M$. 这就是说, x_0 是 x 在 M 上的投影. 又由于 e_1、e_2、$\cdots$、e_n 以及 $x-x_0$ 是两两直交的, 由勾股定理即知

$$\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^n\|(x, e_i)e_i\|^2=\sum_{i=1}^n|(x, e_i)|^2,$$

$$\|x\|^2=\|(x-x_0)+x_0\|^2=\|x-x_0\|^2+\|x_0\|^2$$
$$=\|x-x_0\|^2+\sum_{i=1}^{n}|(x,\ e_i)|^2,$$

因此　　$\|x-x_0\|^2=\|x\|^2-\|x_0\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,\ e_i)|^2.$

(2) 由(3.1)式立即得(3.2)式.

(3) 由于 x_0 是 x 在 M 上的投影，所以

$$\|x-x_0\|^2=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

只要取 $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\in M$，立即得到(3.3). 证毕.

不等式(3.2)称为贝塞尔(Bessel)不等式，更一般的如下：

定理 1 (Bessel 不等式)　设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系，那末对每个 $x\in H$，x 的 Fourier 系数 $\{(x,\ e_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ 中最多只有可列个不为零，而且适合不等式

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,\ e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{3.4}$$

证明　如果 Λ 是有限集，那末(3.4)式就是(3.2). 如果 Λ 是可列集，那末 $\mathscr{F}$ 是由一列元 $\{e_n\}$ 所组成的就范直交系. 这时对任何自然数 n，(3.2) 式成立. 令 $n\to\infty$，就得到(3.4)式.

现在假设 Λ 是不可列集. 对任何自然数 k，记

$$\mathscr{F}_k=\left\{e_\lambda\middle|\lambda\in\Lambda,\ |(x,\ e_\lambda)|\geqslant\frac{1}{k}\right\},$$

并记 $\hat{\mathscr{F}}_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{F}_k$. 由于(3.2)成立，易知 $\{e_\lambda\}$ 中使 $|(x,\ e_\lambda)|\geqslant\frac{1}{k}$ 的向量 e_λ 只能是有限个，即 $\mathscr{F}_k$ 是有限集，因而 $\hat{\mathscr{F}}_0$ 至多是可列集(也可参见第一章 §2 习题 15)，而当 $e_\lambda\in\mathscr{F}-\hat{\mathscr{F}}_0$ 时，$(x,\ e_\lambda)=0$. 因此

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,\ e_\lambda)|^2=\sum_{e_\lambda\in\hat{\mathscr{F}}_0}|(x,\ e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2.$$

证毕.

[注]　由于这里指标集 Λ 可能是不可列集，因此 (3.4) 式隐含这样的意思：使 $|(x,\ e_\lambda)|^2>0$ 的 $\lambda\in\Lambda$ 最多只有可列个，而 $\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,\ e_\lambda)|^2$ 是对 Λ 中使 $|(x,\ e_\lambda)|^2>0$ 的 λ 求和.

系 设 $\{e_n\}(n=1, 2, \cdots)$是内积空间 H 中的就范直交系，那末对任何 $x\in H$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x, e_n)=0$.

证明 由定理1可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$ 收敛，由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x, e_n)=0$. 证毕.

这个系用于 $L^2[0, 2\pi]$ 中的就范直交三角函数系（见例1），就得到黎曼-勒贝格引理.

例5 设 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是任一族元素，$\{a_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是任一数集，$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|a_\lambda|^2<\infty$（因而 $\{a_\lambda\}$ 中最多只有可列个不为0）. 作形式和 $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda e_\lambda$，又如果 $y=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}b_\lambda e_\lambda(\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|b_\lambda|^2<\infty)$，那末对任何数 α、β，规定线性运算

$$\alpha x+\beta y=\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha a_\lambda+\beta b_\lambda)e_\lambda, \tag{3.5}$$

易知形式和全体 $\hat{H}=\{x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda e_\lambda|\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|a_\lambda|^2<\infty\}$，按上面线性运算成为线性空间. 如在 $\hat{H}$ 上规定

$$(x, y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\bar{b}_\lambda, \tag{3.6}$$

容易证明$(\cdot, \cdot)$是 $\hat{H}$ 上的内积.

从(3.6)式，易知 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 还是 $\hat{H}$ 上就范直交系. 如果 Λ 是不可列集，那末 $\hat{H}$ 上就范直交系 $\mathscr{F}$ 就是不可列的.

现在证 $\hat{H}$ 按内积 (3.6) 是完备的. 事实上，设 $x_n=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda^{(n)}e_\lambda$ $(n=1, 2, \cdots)$是一个基本点列. 令 $\Lambda_1=\{\lambda|a_\lambda^{(n)}\neq0, n=1, 2, \cdots\}$，由于 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|a_\lambda^{(n)}|^2<\infty(n=1, 2, \cdots)$，所以 Λ_1 是 Λ 的可列子集，不妨改记 Λ_1 中的指标为 $\{\lambda_\nu|\nu=1, 2, \cdots\}$，因此，当 $\lambda\neq\lambda_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$ 时，对一切 n，都有 $a_\lambda^{(n)}=0$，从而 $x_n=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_{\lambda_\nu}^{(n)}e_{\lambda_\nu}$，$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|a_{\lambda_\nu}^{(n)}|^2<\infty$. 由于 $\{x_n\}$ 是基本的，因而

$$\lim_{n,m\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_{\lambda_\nu}^{(n)}-a_{\lambda_\nu}^{(m)}|^2=0.$$

由 l^2 空间的完备性，必存在 $a_{\lambda_\nu}\in\Lambda(\nu=1, 2, \cdots)$，$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|a_{\lambda_\nu}|^2<\infty$,

使得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_{\lambda_\nu}^{(n)}-a_{\lambda_\nu}|^2=0.$$

在 $\hat{H}$ 中，作 $x=\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda e_\lambda$，其中，当 $\lambda\neq\lambda_\nu$ 时，$a_\lambda=0$. 显然，

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,$$

即 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 证毕.

2. 直交系的完备性

为了研究 Bessel 不等式 (3.4) 什么时候能变成等式，我们引入下面的

定义 设 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系，如果对任何 $x\in H$，成立巴塞伐尔 (Parseval) 等式

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,\ e_\lambda)|^2,\tag{3.7}$$

就称直交系 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 在 H 中是完备的. 常简称完备就范直交系为就范直交基.

Parseval 等式 (3.7) 称为 x 关于 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 的完备性公式，这个公式相当于勾股定理的推广. 它的几何意义是向量的长度平方等于关于 $\{e_\lambda\}$ 的各分量长度的平方和.

定义 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系，$x\in H$，级数 $\sum_\lambda(x,\ e_\lambda)e_\lambda$ 称为向量 x 关于 $\mathscr{F}$ 的 Fourier 级数 (或 Fourier 展开式). 当 $x=\sum_\lambda(x,\ e_\lambda)e_\lambda$ 时，就说 x 可以展开成关于 $\mathscr{F}$ 的级数 (这时，展开式的几何意义就是向量 x 等于它的各分量 $(x,\ e_\lambda)e_\lambda$ 之和).

定理 2 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系，$M=\overline{\operatorname{span}}\,\mathscr{F}$，那末对于 $x\in H$，下面三件事情是等价的：

(1) $x\in M$.

(2) $\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,\ e_\lambda)|^2$.

(3) $x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,\ e_\lambda)e_\lambda$.

证明 (1)⇒(2) 由于成立 Bessel 不等式：$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2$，所以，如果 Parseval 等式不成立，那末必存在正数 α，使得 $\|x\|^2-\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2=\alpha^2>0$. 这就是说，对于 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 中任意有限个向量 e_1、…、e_n，由引理 1 的(1)，

$$\left\|x-\sum_{\nu=1}^{n}(x, e_\nu)e_\nu\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\nu=1}^{n}|(x, e_\nu)|^2\geqslant\alpha^2.$$

再由引理 1 的 (3)，立即得到 e_1、…、e_n 的任何线性组合与 x 的距离都不小于 $\left\|x-\sum_{\nu=1}^{n}(x, e_\nu)e_\nu\right\|$ $(\geqslant\alpha)$，显然，这与假设 $x\in M$ 相矛盾，因此 Parseval 等式成立.

(2)⇒(3) 设 $\|x\|^2=\sum_{\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2$ 对任何 $x\in H$ 成立. 如果 $\mathscr{F}$ 是有限集 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，由引理 1 的(1)，

$$\left\|x-\sum_{\nu=1}^{n}(x, e_\nu)e_\nu\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\nu=1}^{n}|(x, e_\nu)|^2. \qquad (3.8)$$

从 $\|x\|^2=\sum_{\nu=1}^{n}|(x, e_\nu)|^2$ 立即得到 $x=\sum_{\nu=1}^{n}(x, e_\nu)e_\nu$. 当 $\mathscr{F}$ 是无限集时，从 $\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2$ 立即知道 $\{e_\lambda|(x, e_\lambda)\neq0\}$ 最多是可列集，不妨设为 $\{e_\nu|\nu=1, 2, \cdots\}$. 对任何自然数 n，(3.8)式总是成立. 由假设 $\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}|(x, e_\nu)|^2$，因而(3.8)式的右端当 $n\to\infty$ 时趋于 0，即

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{\nu=1}^{n}(x, e_\nu)e_\nu\right\|=0,$$

这就是说 $x=\sum_{\nu=1}^{\infty}(x, e_\nu)e_\nu=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$.

(3)⇒(1) 设 $x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$，所以 x 或是 $\mathscr{F}$ 中向量的线性组合，或是 $\mathscr{F}$ 中向量线性组合的极限，即 $x\in M$. 证毕.

系 内积空间 H 中就范直交系 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 成为完备系的充要条件是下面四个中的任何一个.

(1) $\overline{\text{span}}\,\mathscr{F}=H$.

(2) 对任何 $x\in H$,

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda. \tag{3.9}$$

(3) 对任何 $x, y\in H$,

$$(x,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)\overline{(y,e_\lambda)}. \tag{3.10}$$

(4) (斯切克洛夫(Стеклов)定理) 存在 H 中的稠密集 D, 对一切 $x\in D$,

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2. \tag{3.11}$$

证明 由定理 2 可知, (1)、(2)都是充要条件.

(3) 如果 $\mathscr{F}$ 是完备的, 那末由定理 2 可知, 对任何 $x, y\in H$,

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda,\ y=\sum_{\lambda\in\Lambda}(y,e_\lambda)e_\lambda,$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2=\|x\|^2,\ \sum_{\lambda\in\Lambda}|(y,e_\lambda)|^2=\|y\|^2.$$

不妨设 $\{e_n\}$ 是使得 $(x,e_\lambda)\neq0$ 或 $(y,e_\lambda)\neq0$ 的 $\mathscr{F}$ 中的 e_λ 全体. 因而

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i,\ y=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(y,e_i)e_i,$$

$$\begin{aligned}(x,y)&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i,\quad\sum_{i=1}^{n}(y,e_i)e_i\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)\overline{(y,e_i)}=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)\overline{(y,e_i)}\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)\overline{(y,e_\lambda)}.\end{aligned}$$

反之, 设(3.10)成立, 特别, 取 $y=x$, 由(3.10)就得到

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2,\quad x\in H.$$

由定理 2 的(2)可知 $\mathscr{F}$ 是完备的.

(4) 由定理 2 可知, 只要证明(4)的充分性就可以了. 根据定理 2, 由假设(3.11)立即得到

$$D\subset E=\overline{\operatorname{span}}\,\mathscr{F},$$

因为 E 是闭的, 所以

$$E\supset\overline{D}=H,$$

从而 $E=H$，由(1)知 $\mathscr{F}$ 是完备的．证毕．

等式(3.10)也称为 Parseval 等式．

例 3 (续) $L^2\left([0,\ 2\pi],\ \frac{m}{\pi}\right)$ 中的就范直交系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cdots, \cos nt, \sin nt, \cdots\right\}$ 是完备的．

证明 令 $\mathscr{F}$ 为 $L^2\left([0,\ 2\pi], \frac{m}{\pi}\right)$ 中的三角多项式全体，对于每个 $T\in\mathscr{F}$，当 $T=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{N}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ (这里沿用经典的习惯，取 $a_0=(f,\ 1)$) 时，易知 T 的 Fourier 系数是 a_0、a_n、b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$，而其余的 Fourier 系数为零．经直接验算可知对 T 成立 Parseval 等式．根据定理 2 的系，我们只要证明 $\mathscr{F}$ 在 $L^2[0,\ 2\pi]$ 中稠密就可以了．

事实上，对任何 $f\in L^2[0,\ 2\pi]$ 及 $\varepsilon>0$，由第四章 §5 习题知道，$\mathscr{F}$ 在 $L^2\left([0,\ 2\pi],\ \frac{m}{\pi}\right)$ 中稠密，所以 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos t,\ \sin t,\ \cdots,\ \cos nt,\ \sin nt,\ \cdots\right\}$ 是 $L^2\left([0,\ 2\pi],\ \frac{m}{\pi}\right)$ 中的完备就范直交系．证毕．

根据定理 2，对任何 $f\in L^2\left([0,\ 2\pi],\ \frac{m}{\pi}\right)$，成立着

$$f=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

不过，我们必须注意，上面等式右边级数的部分和是按照 Hilbert 空间 $L^2\left([0,\ 2\pi], \frac{m}{\pi}\right)$ 中的范数收敛于 f，换句话说，f 的 Fourier 级数的部分和平方平均收敛于 f，这并不意味着级数几乎处处收敛于 f，即未必成立下式

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\right]\underset{m}{=}f(t). \qquad (3.12)$$

早在 1913 年，鲁津 (Н. Лузин) 就猜测 (3.12) 式成立 (参见 [12])．这个猜测一直是三角级数中一个重要的课题．1923 年，柯莫哥洛夫 (А. Колмогоров) 给出一个 $f\in L\left([0,\ 2\pi],\ \frac{m}{\pi}\right)$ 但它的

Fourier 级数[注]是几乎处处发散的. 1926 年, 他又给出 $f\in L\left([0, 2\pi], \frac{m}{\pi}\right)$, 它的 Fourier 级数是处处发散的. 后来一段时间中, 人们对于鲁津的猜测较多地从否定的方面去考虑. 到 1966 年, L. Carleson 证明了鲁津的猜测是正确的(参看[10]). 紧接着, 在 1967 年, R. A. Hunt 证明: 对于 $L^p[0, 2\pi]$ $(p>1)$ 中的函数, 它的 Fourier 级数也是几乎处处收敛的. 这方面的结果是三角级数理论的一个重要突破.

从定理 2 及系的讨论可以看出, 内积空间 H 中的就范直交系是否完备是很重要的, 对于完备直交系 $\mathscr{F}$, 空间 H 中每个向量 x 都能关于 $\mathscr{F}$ 展成 Fourier 级数, 即(3.9)式成立, 并且向量的长度和向量的内积都可用它的分量来表达, 即 (3.10)、(3.11) 成立, 这就是说, 全空间 H 都可用直交系 $\mathscr{F}$ 中的向量来描述. 判断一个直交系是否完备, 常用的方法之一就是利用定理 2 系的(4). 下面将举几个常见的内积空间(其实是 Hilbert 空间) 的完备就范直交系. 但它们的仔细证明将留给读者作为练习.

例 6(勒让德(Legendre)多项式) 函数列

$$\Phi_n(x)=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}P_n(x), \quad n=0, 1, \cdots$$

其中 $P_n(x)$ 是 n 阶 Legendre 多项式:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

$\{\Phi_n\}$ 是 $L^2([-1, 1], m)$ 上完备就范直交系.

先用分部积分直接证明

$$\int_{-1}^{1}\Phi_n(x)\Phi_m(x)dx=\delta_{nm}.$$

[注] 只要 $f(t)$ 是 $[0, 2\pi]$ 上勒贝格可积函数, 就可以作级数

$$\sigma(f, t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,dt$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\,dt$. 级数 $\sigma(f, t)$ 称为 f 的 Fourier 级数.

再注意到 span $\{\Phi_n\}$ 包含了多项式全体，利用多项式的稠密性和 Стеклов 定理可知，$\{\Phi_n\}$ 是完备直交系.

定义 设 $p(x)$ 是 $\langle a, b\rangle$ 上正的勒贝格可积函数，H 是满足 $\int_a^b |f(x)|^2 p(x)dx<\infty$ 的函数 $f(x)$ 全体，在 H 中引入

$$(f, h)=\int_a^b f(x)\overline{h(x)}p(x)dx.$$

易知 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的内积，并且 H 是 Hilbert 空间，称 H 是以 $p(x)$ 为权函数的 Hilbert 空间. H 上的完备就范直交系又称为关于权函数 $p(x)$ 的完备就范直交系.

$L^2([a, b], m)$ 就是权为 1 的 Hilbert 空间.

例 7(厄米(Hermite)多项式) 函数列

$$\Phi_n(x)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x), \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

其中 $H_n(x)$ 是 n 阶 Hermite 多项式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

函数列 $\{\Phi_n\}$ 是 $L^2((-\infty, \infty), m)$ 上的完备就范直交系，换句话说 $\{(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}H_n(x)\}$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上关于权函数 e^{-x^2} 的完备就范直交系，即关于内积

$$(f, h)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{h(x)}e^{-x^2}dx \tag{3.13}$$

的完备就范直交系.

证明的方法类似于例 6.

例 8(拉盖尔(Laguerre)多项式) 函数列

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{n!}e^{-\frac{x}{2}}L_n(x), \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

其中 $L_n(x)$ 是 n 阶 Laguerre 多项式

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i n(n-1)\cdots(i+1)x^i.$$

函数列 $\{\Phi_n\}$ 是 $L^2([0, \infty), m)$ 上完备就范直交系，换言之，

$\left\{\frac{1}{n!}L_n(x)\right\}$ 是 $[0, \infty)$ 上关于权函数 e^{-x} 的完备就范直交系，即关于内积

$$(f, h)=\int_0^{\infty} f(x)\overline{h(x)}e^{-x}dx \tag{3.14}$$

的完备就范直交系.

证明的方法类似于例 6.

例 9(切比雪夫(Чебышев)多项式)　多项式

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

称为 n 阶 Чебышев 多项式. 令 $C_0=\sqrt{\frac{1}{\pi}}$, $C_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(n=1,2,\cdots)$, 那末 $\{C_nT_n|n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的完备就范直交系，即关于内积

$$(f, h)=\int_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{3.15}$$

的完备就范直交系$\left(\text{即权函数 } p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

在证明 $\{C_nT_n\}$ 是直交系时，可用变数变换 $\theta=\arccos x$, 其余证明如例 6.

例 6～9 的这些多项式都是和相应的微分方程密切联系的，可见习题.

3. 直交系的完全性

对于给定 Hilbert 空间的直交系 $\mathscr{F}$, 如果它不完备，是否能补充一些向量后成为完备的. 这就产生了直交系的完全性概念.

定义　设 $\mathscr{F}$ 是内积空间 H 中的直交系，如果 $\mathscr{F}^{\perp}=\{0\}$, 那末就称 $\mathscr{F}$ 是完全的.

由定义可知，$\mathscr{F}$ 是完全的，就是说在 H 中不存在与 $\mathscr{F}$ 直交的非零向量. 因此，它的意思就是：作为直交系，$\mathscr{F}$ 已经不能再扩大了，即 $\mathscr{F}$ 是 H 中极大的直交系.

定理 3　设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系，如果 $\mathscr{F}$ 是完备的，那末 $\mathscr{F}$ 是完全的. 如果 H 是 Hilbert 空间，

那末完全的就范直交系必定是完备的.

证明 如果 $\mathscr{F}$ 是完备的，那末对任何 $x\in H$，成立着

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,\ e_\lambda)e_\lambda.$$

因此，如果 $x\perp\mathscr{F}$，必定 $x=0$，所以 $\mathscr{F}$ 是完全的.

反过来，如果 H 是 Hilbert 空间，$\mathscr{F}$ 是完全的. 记 $\mathscr{F}$ 张成的线性闭子空间为 M，这时，M 是 H 的完备线性子空间. 由§2定理2系1，如果 $M\neq H$，那末有非零向量 x 与 M 直交，这与 $\mathscr{F}$ 的完全性相矛盾，因此 $M=H$. 这就证明了 $\mathscr{F}$ 的完备性(见定理2的系). 证毕.

下面是 Hilbert 空间中的基本定理.

定理4 在 Hilbert 空间中必存在完备就范直交系.

这个定理的证明要利用 Zorn 引理，不拟仔细证明. 大体证明过程是在 H 的所有就范直交系 $\{\mathscr{F}_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 中，按包含顺序引入序关系，然后依据 Zorn 引理，必有极大元 $\mathscr{F}_0$ (即不能再添一个单位向量，使之仍成为就范直交系)，这时必有 $\overline{\text{span}}\,\mathscr{F}_0=H$ (否则，必有就范的向量 $x_0\in H$，$x_0\perp\mathscr{F}_0$，这与极大性发生矛盾)，即 $\mathscr{F}_0$ 是完备的.

如果 H 只是内积空间，不能由完全性推出完备性. 举例如下：

例10 在 $L^2([0,\ 2\pi],\ m)$ 中，记

$$\mathscr{F}=\left\{\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\ \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\right\}.$$

又记
$$f_0=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right).$$

显然，$f_0\in L^2([0,\ 2\pi],\ m)$. 令 $H_0=\text{span}\{\mathscr{F},\ f_0\}$，即

$$H_0=\left\{\alpha_0 f_0+\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu t+\beta_\nu\sin\nu t)\,\middle|\,n>0,\ \alpha_0,\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu\in\mathbb{K},\ (\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\right\}.$$

按照 $L^2([0,\ 2\pi],\ m)$ 的运算及内积，H_0 是一个内积空间. $\mathscr{F}$ 显

然是 H_0 中的就范直交系. $\mathscr{F}$ 在 H_0 中是完全的. 这是因为如果有 $f\in H_0$, $f\perp\mathscr{F}$, 那末由 H_0 的定义, 必有 α_0; α_ν、$\beta_\nu(\nu=1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$f=\alpha_0 f_0+\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu t+\beta_\nu\sin\nu t). \tag{3.16}$$

取 $k>n$, 得到 $0=\left(f, \dfrac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right)=\dfrac{\alpha_0}{k^2}$, 因此

$$f=\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu t+\beta_\nu\sin\nu t). \tag{3.17}$$

同样, 对于 $k\leqslant n$, $0=\left(f, \dfrac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right)=\alpha_m$, $0=\left(f, \dfrac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right)=\beta_m$. 这样, 就得到 $f=0$. 也就是说, $\mathscr{F}$ 在 H_0 中是完全的. 但是

$$\|f_0\|^2=2\pi+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\nu^2}, \tag{3.18}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\left(f_0, \frac{\cos\nu t}{\sqrt{\pi}}\right)\right|^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\left(f_0, \frac{\sin\nu t}{\sqrt{\pi}}\right)\right|^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\nu^3}, \tag{3.19}$$

所以 f_0 关于 $\mathscr{F}$ 的完备性公式不成立, 即 $\mathscr{F}$ 在 H_0 中不完备.

下面利用完全性来证明两个有用的就范直交系是完备的.

例 11 $L^2([0, 1], m)$ 中的哈尔 (Haar) 系 $\mathscr{F}=\{X_0^{(0)}(x), X_n^{(k)}(x)\,[k=1, 2, \cdots, 2^n, n=0, 1, 2, \cdots\}$, 其中零级函数

$$X_0^{(0)}(x)=1, \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$X_0^{(1)}(x)=\begin{cases} 1 & \text{当 } x\in\left[0, \dfrac{1}{2}\right) \text{ 时}, \\ -1 & \text{当 } x\in\left(\dfrac{1}{2}, 1\right] \text{ 时}, \\ 0 & \text{当 } x=\dfrac{1}{2} \text{ 时}. \end{cases}$$

一级函数

$$X_1^{(1)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & \text{当 } x\in\left[0,\ \frac{1}{4}\right) \text{时},\\ -\sqrt{2}, & \text{当 } x\in\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right] \text{时},\\ 0, & \text{对其余点},\end{cases}$$

$$X_1^{(2)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & \text{当 } x\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right) \text{时},\\ -\sqrt{2}, & \text{当 } x\in\left(\frac{3}{4},\ 1\right] \text{时},\\ 0, & \text{对其余点},\end{cases}$$

……………………………

n 级函数

$$X_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2^n}, & \text{当 } x\in\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\ \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \text{时},\\ -\sqrt{2^n}, & \text{当 } x\in\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\ \frac{2k}{2^{n+1}}\right] \text{时}, \quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n\\ 0, & \text{对其余点},\end{cases}$$

……………………………

由定义易知上述 Haar 系中每个函数(称为 Haar 函数)是就范的，同级的两个Haar 函数 $X_n^{(k)}(x)$, $X_n^{(k')}(x)$ 的乘积 $X_n^{(k)}(x)X_n^{(k')}(x)=0$, 所以是直交的，而不同级的两个 Haar 函数 $X_n^{(k)}(x)$, $X_m^{(k')}(x)$ (例如 $m<n$), 由于 $X_m^{(k')}(x)$ 在 $\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}},\ \frac{2k}{2^{n+1}}\right)$ 上为常数，记为 C, 因而

$$\int_0^1 X_m^{(k')}(x)X_n^{(k)}(x)\,dx=C\int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k}{2^{n+1}}} X_n^{(k)}(x)dx=0, \tag{3.20}$$

即不同级的两个 Haar 函数也直交. 所以，Haar 系是就范直交系. 因为 $L^2([0,\ 1],\ m)$ 是 Hilbert 空间，所以要证 Haar 系是完备的，只要证明它是完全的.

设 $f\in L^2([0,\ 1],\ m)$. 如果 $f\perp\mathscr{F}$, 那末 $f\perp\text{span}\{\mathscr{F}\}$, 从而

$$\int f(x)\left(\frac{X_n^{(k)}(x)}{\sqrt{2^n}}\pm\frac{X_{n+1}^{(2k-1)}(x)}{\sqrt{2^{n+1}}}\right)dx=0,$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{3.21}$$

即

$$\int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} f(x)dx=0,\quad \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k}{2^{n+1}}} f(x)dx=0,\tag{3.22}$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

由 Schwarz 不等式

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

可知 f 是可积函数. 由 (3.22) 易知全连续函数 $F(t)=\int_0^t f(x)dx$ 在一切二进制有理点 $t=\frac{k}{2^n}$ 上的值 $F\left(\frac{k}{2^n}\right)=0$, 但二进制有理点在 $[0,\ 1]$ 上稠密, 所以对一切 $t\in[0,\ 1]$, $F(t)=0$, 从而 $f(x)=F'(x)\underset{m}{\doteq}0$. 证毕.

当然, 证明 Haar 系是完备的, 也可先证明 $\text{span}\{\mathscr{F}\}$ 在 $L^2([0,\ 1],\ m)$ 中稠密, 即证明 $\overline{\text{span}\{\mathscr{F}\}}=L^2([0,\ 1],\ m)$, 然后由定理 2 得到 Haar 系是完备的.

例 **12**　$L^2([0,\ 1],\ m)$ 中的 Walsh 系 $\mathscr{F}=\{\psi_0^{(0)}(x),\ \psi_n^{(k)}(x)\mid k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$, 其中零级函数

$$\psi_0^{(0)}=X_0^{(0)},\quad \psi_0^{(1)}=X_0^{(1)};$$

一级函数

$$\psi_1^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1^{(1)}+X_1^{(2)}),\quad \psi_1^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1^{(1)}-X_1^{(2)});$$

二级函数

$$\psi_2^{(i)}=\frac{1}{\sqrt{4}}(\varepsilon_2^{(1)}X_2^{(1)}+\varepsilon_2^{(2)}X_2^{(2)}+\varepsilon_2^{(3)}X_2^{(3)}+\varepsilon_2^{(4)}X_2^{(4)}),$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

························

n 级函数

$$\psi_n^{(i)}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=1}^{2^n}\varepsilon_n^{(j)}X_n^{(j)},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n.\tag{3.23}$$

························

其中 $\varepsilon_n^{(j)}=\pm1(j=1, 2, \cdots, 2^n)$，固定 n，当相应于 $\psi_n^{(1)}$ 的一组 $\{\varepsilon_n^{(j)}\}$ 取定为 $\{\varepsilon_n^{(j)}(1)\}$ 后，相应于 $\psi_n^{(i)}(i=2, \cdots, 2^n)$ 的 $\{\varepsilon_n^{(j)}(i)\}$ 的取法都是改变 $\{\varepsilon_n^{(j)}(1)\}$ 中符号的一半，但对于不同的 i，改变方式不同.

显然，对任何 $\varepsilon_n^{(j)}=\pm1$，由(3.23)，$\|\psi_n^{(i)}\|=1$，即 Walsh 函数是就范的. 另外，当固定级 n，由于 $\psi_n^{(i)}(i=1, 2, \cdots, 2^n)$ 符号改变方式是保留一半，改变一半，所以彼此相互直交. 不同级的 Walsh 函数 $\psi_n^{(i)}$、$\psi_m^{(j)}(n\neq m)$，由于 Haar 函数系的直交性，易知彼此直交，从而 Walsh 函数是就范直交系. 由于 Walsh 函数系张出的线性子空间和 Haar 系张出的线性子空间一样，所以由 Haar 系的完备性可知 Walsh 系也是完备的.

由于 Haar 系和 Walsh 系都是跳跃函数系，所以它们在通讯工程和信号处理方面用得较多.

4. 投影与直交系

从本节的引理 1 可以看出，如果 M 是由有限个就范直交向量 e_1、$\cdots$，e_n 张成的线性子空间（自然是闭的），这时，很容易求出空间中任何向量 x 在 M 上的投影 x_0，即 $x_0=\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$. 这个事实可以推广成一般的情况.

定理 5 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系，令 $M=\overline{\operatorname{span}}\{\mathscr{F}\}$. 任取 $x\in H$，如果 x 在 M 中有投影 x_0，那末 x_0 就是 x 关于 $\mathscr{F}$ 的 Fourier 级数 $\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$. 如果 H 是 Hilbert 空间，那末对任何 $x\in H$，$\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$ 是 x 在 M 上的投影.

证明 如果在 M 上有投影 x_0，那末由 $x_0\in M$，根据定理 2，即得

$$x_0=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x_0, e_\lambda)e_\lambda.$$

又因为 x_0 是 x 在 M 上的投影，$x-x_0\perp M$，因此 $x-x_0\perp e_\lambda$，$\lambda\in\Lambda$，即 $(x, e_\lambda)=(x_0, e_\lambda)$，所以

$$x_0=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda.$$

由于 Hilbert 空间中的线性闭子空间是完备的，因此当 H 是 Hilbert 空间时，M 是完备的．由 § 2 定理 2，对任何 $x\in H$，x 在 M 上的投影 x_0 存在，由本定理已经证明的部分知道，x_0 就是 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$．证毕．

定理 5 说明利用直交系来求一个向量的投影是很方便的．例如，如果 x 在 $M=\text{span}\{\mathscr{F}\}$（$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是就范直交系）上的投影是 x_0，那末 $x_0=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$．

应当注意，定理 5 中假设 x 在 M 上有投影 x_0，这个条件是不能少的．因为确实有这样的内积空间，并非任何向量都在任何闭线性子空间上有投影．例如，对于例 10 中的内积空间 H_0，

$$M=\overline{\text{span}}\left\{\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\,\middle|\, n=1, 2, \cdots\right\}^{[注]},$$

f_0 在 M 上就没有投影．因为如果 f_0 在 M 上有投影 x_0，那末 $f_0-x_0\perp M$，所以 f_0-x_0 与 $\left\{\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\,\middle|\, n=1, 2, \cdots\right\}$ 直交．由于直交系的完全性，只有 $f_0-x_0=0$，即 $f_0\in M$，显然这是不正确的．

定理 6（黎斯-费啸(Riesz-Fischer)） 设 H 是 Hilbert 空间，$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是就范直交系，$M=\overline{\text{span}}\{\mathscr{F}\}$，$\{c_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是满足 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|c_\lambda|^2<\infty$ 的一族数，那末必有唯一的向量 $x\in M$，以 c_λ 为 x 关于 e_λ 的 Fourier 系数，而且 x 有 Fourier 展开式 $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda e_\lambda$．

证明 当 $\mathscr{F}$ 是有限集时，定理显然是成立的．当 $\mathscr{F}$ 是无限集时，因为 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|c_\lambda|^2<\infty$，所以最多只有可列个指标 $\{\lambda_n|n=1, 2, \cdots\}$，使 $c_{\lambda_n}\neq 0$．分别改记 e_{λ_n}、c_{λ_n} 为 e_n，c_n．作点列 $x_n=\sum\limits_{\nu=1}^{n}c_\nu e_\nu$．那末，对于 $m<n$，

$$\|x_n-x_m\|^2=\left\|\sum_{\nu=m+1}^{n}c_\nu e_\nu\right\|^2=\sum_{\nu=m+1}^{n}|c_\nu|^2.$$

[注] 这里是在 H_0 中取闭包．

由于 $\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^2<\infty$，所以 $\lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m\|^2=0$，因此，$\{x_n\}$ 是 H 中的基本点列．因为 H 是完备的，必有 $x=\lim_{n\to\infty}x_n$．显然，$x\in M$，而对于任何 $\lambda\in\Lambda$，$(x, e_\lambda)=\lim_{n\to\infty}(x_n, e_\lambda)=c_\lambda$．因为 $x\in M$，所以 x 在 M 上投影就是 x 本身，由定理 5，立即有

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda=\sum_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda e_\lambda.$$

如果又有 $x'\in M$，使得 $(x', e_\lambda)=c_\lambda$，$\lambda\in\Lambda$，因而 $(x-x', e_\lambda)=0$，$\lambda\in\Lambda$．由定理 2 的(2)，$\|x-x'\|^2=0$，即 $x=x'$．证毕．

利用定理 2 和定理 6，可以给出 Hilbert 空间的模型(参见本节第 6 小节)．

5．线性无关向量系的直交化

有了直交系，计算向量的投影就方便了．但是，对于一个内积空间中给定的某个闭线性子空间 M，如何从 M 中作出一个就范直交系 $\mathscr{F}$，使得 $M=\overline{\text{span}\,\mathscr{F}}$，这自然是一个很重要的问题．下面我们将介绍一个直交化的方法．

引理 2(格拉姆-许密特(Gram-Schmidt)) 设 $G=\{g_1, g_2, \cdots\}$ 是内积空间 H 中有限个或可列个线性无关的向量系，那末必定有 H 中的就范直交系 $\mathscr{F}=\{h_1, h_2, \cdots\}$，使得对于每个自然数 n[注1]，g_n 是 h_1、h_2、$\cdots$、h_n 的线性组合，h_n 也是 g_1、g_2、$\cdots$、g_n 的线性组合，从而 $\text{span}\{g_i\}=\text{span}\{h_i\}$．并且这种 h_n 除去一个绝对值为 1 的常数因子外，由 g_1、g_2、$\cdots$、g_n 完全确定．

证明 我们不妨只考虑 G 是可列的情况．用数学归纳法，依次作 $\{h_n\}$ 如下：首先作 $h_1=\dfrac{g_1}{\|g_1\|}$，设当 $n\geqslant 2$ 时，就范直交向量组 h_1、$\cdots$、h_{n-1} 已被作好，而且 g_1、$\cdots$、g_{n-1} 与 h_1、$\cdots$、h_{n-1} 张成相同的 $n-1$ 维空间 M_{n-1}．记 g_1、$\cdots$、g_n 张成的 n 维线性空间 M_n．g_n 在 M_{n-1} 上的投影记为 x_{n-1}[注2]，$g_n-x_{n-1}\neq 0$．记

[注1] 当 G 只有 m 个向量时，要求 $n\leqslant m$．

[注2] 由于 M_{n-1} 是有限维空间，因而是完备的子空间，所以 g_n 在 M_{n-1} 上有投影 x_{n-1}，并且 $x_{n-1}=\sum_{\nu=1}^{n-1}(g, h_\nu)h_\nu$．

$$h_n=\frac{g_n-x_{n-1}}{\|g_n-x_{n-1}\|}.$$

因为 $x_{n-1}\in M_{n-1}=\mathrm{span}\{g_1, \cdots, g_{n-1}\}$，所以 h_n 是 g_1、…、g_n 的线性组合，并且 $\|h_n\|=1$，又因为 x_{n-1} 是 g_n 在 M_{n-1} 上投影，所以 h_n 与 g_1、…、g_{n-1} 直交，即 h_1、…、h_n 是就范直交系．由于 $h_1, \cdots, h_n\in M_n$，而且它们是线性无关的(见 §1 习题 5)，因此是 M_n 的一组基，所以 g_n 可以用 h_1、…、h_n 线性表出．这样，由归纳法作出了一列 $\{h_n\}$，就满足了引理的要求．

如果 $\{\alpha_n\}$ 是一列绝对值为 1 的数，那末 $\{\alpha_n h_n\}$ 仍是就范直交系，它们显然也满足引理的要求．

如果 $\{h_n'\}$ 是满足引理要求的另一就范直交系，那末对每个 n，h_1'、…、h_n' 张成的线性子空间就是 M_n，因此，h_n' 也和 h_1'、…、h_{n-1}' 张成的 M_{n-1} 直交．从而当 h_n' 按 M_n 中就范直交系 h_1、…、h_n 展开时，对 $m<n$，必然有 $(h_n', h_m)=0$，因此，$h_n'=(h_n', h_n)h_n$．由就范条件 $\|h_n\|=\|h_n'\|=1$，可知 h_n' 和 h_n 只能相差一个绝对值为 1 的常数因子．证毕．

例 13　取 $g_k(x)=x^k(k=0, 1, 2, \cdots)$，用 Gram-Schmidt 方法，分别按下面几种内积：

$$\begin{aligned}(f, h)&=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{h(x)}dx,\\(f, h)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{h(x)}e^{-x^2}dx,\\(f, h)&=\int_{0}^{\infty}f(x)\overline{h(x)}e^{-x}dx,\\(f, h)&=\int_{-1}^{1}f(x)h(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx;\end{aligned}\tag{3.24}$$

所得到的就范直交化点列，就分别是(除就范化常数因子外)例 6 中的 Legendre 多项式，例 7 中的 Hermite 多项式，例 8 中的 Laguerre 多项式，例 9 中的 Чебышев 多项式．

6. Hilbert 空间的模型

为了更好地了解内积空间，特别是 Hilbert 空间的结构，我们

常把某个一般的内积空间与一个典型的内积空间保范线性同构[注1].

定理 7 (1) 任何 n 维内积空间 H 必和 n 维欧几里德空间线性保范同构.

(2) 任何可析无限维 Hilbert 空间[注2]必和 l^2 线性保范同构.

最一般地,

(3) 任何 Hilbert 空间 H 必和 $\hat{H}$ (见例 5)线性保范同构.

证明 (1) 在 H 中取一组线性基 g_1、…、g_n, 然后用 Gram-Schmidt 方法, 作出 H 中就范直交的基 h_1、h_2、…、h_n, 作 H 到 E^n (或 C^n) 的映射 φ:

$$x \mapsto ((x, h_1), (x, h_2), \cdots, (x, h_n)).$$

容易验证, 这是 H 到 E^n(或 C^n) 上的双射, 且是保持线性及内积的映射, 因此, H 和 E^n(或 C^n)同构.

(2) 由于 H 是可析的, 在 H 中有稠密的可列集 $\{x_n\}$, 在这个点列中选一个子点列 $\{g_n\}$, 使得 $\{g_1, g_2, \cdots\}$ 是线性独立的, 而且每个 x_n 都是有限个 g_i 的线性组合(这是容易做到的).

由 G 按照 Gram-Schmidt 方法, 经过就范直交化, 就得到一个就范直交系 $\mathscr{F}=\{h_n\}$. 这时, 每个 x_n 都可用 $\mathscr{F}$ 中有限个向量的线性组合来表示, 而 $\{x_n\}$ 在 H 中稠密, 因此, $\overline{\text{span}}\,\mathscr{F}=H$. 由定理 2 的系, $\mathscr{F}$ 是 H 中的就范直交系.

[注1] 设 φ 是赋范线性空间 X_1 到赋范线性空间 X_2 的保范线性同构, 根据范数是由内积导出的充要条件是平行四边形公式成立 (§1 定理 2), 易知 X_1、X_2 中只要有一个是内积空间, 另一个必也是内积空间. 再根据内积用范数表示的极化恒等式, 易知线性映射 φ 是保范的充要条件为 φ 是保内积的, 即对任何 $x_1, x_2 \in X_1$, $(\varphi(x_1), \varphi(x_2))=(x_1, x_2)$.

[注2] 这里"n 维内积空间"、"无限维 Hilbert 空间"的维数是作为线性空间的维数谈的. 其实, 对于 Hilbert 空间, 通常用它的完备就范直交系的势(完全仿线性空间中任何两个线性基的势必相等的证明方法 (见第四章 §2 定理 1, 可以证明任何两个完备就范直交系的势相等) 作为 Hilbert 空间的维数. 对有限维的情况, 这两种维数一致, 在无限维的情况, 后一种维数不超过前一种维数, 而且确实可以不等. 例如 l^2, 按后一种维数, $\dim l^2=\aleph_0$, 而按前一种维数, $\dim l^2>\aleph_0$.

显然，$\mathscr{F}$ 是可列集．作 H 到 l^2 的映射如下：

$$\varphi: x\mapsto((x,\ h_1),\ (x,\ h_2),\ \cdots). \tag{3.25}$$

由定理 2 容易证明 φ 是保持线性运算及内积的单射．由 Riesz-Fischer 定理，对于 l^2 中向量 $(c_1,\ c_2,\ \cdots)$，因为 $\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^2<\infty$，所以有 $x\in H$，使 $(x,\ h_\nu)=c_\nu$．这时，$\varphi(x)=(c_1,\ c_2,\ \cdots)$，因此 φ 的值域就是 l^2．所以，H 和 l^2 是同构的．

(3) 由定理 4，存在 H 中的完备就范直交系 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，因而 $\overline{\mathrm{span}}\{\mathscr{F}\}=H$．再由定理 2，对任何 $x\in H$，

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,\ e_\lambda)e_\lambda.$$

仿(1)和(2)的情况，作 $H\to\hat{H}$ 的映射

$$\varphi:\ x\mapsto\{(x,\ e_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}.$$

易知 φ 是 $H\to\hat{H}$ 的线性映射，由 Riesz-Fischer 定理，知 φ 是满射．再由定理 2 的系的(3.10)，知道 φ 是保范的，因而 H 和 $\hat{H}$ 保范线性同构．证毕．

当然，也可将定理 7 中的(1)、(2)作为(3)的特例而推得．

习　题

1．设 $H_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 是一列内积空间，令 $H=\left\{\{x_n\}\,|\,x_n\in H_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots，且\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\right\}$．对 H 中任何两个向量 $x=\{x_n\}$，$y=\{y_n\}$，引入线性运算和 $(\cdot,\ \cdot)$：

$$\alpha x+\beta y=\{\alpha x_n+\beta y_n\},\ \alpha,\ \beta\in\Lambda,$$
$$(x,\ y)=\sum_n(x_n,\ y_n).$$

证明：H 按 $(\cdot,\ \cdot)$ 成为内积空间，并且 H 成为 Hilbert 空间的充要条件是所有的 $H_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 都是 Hilbert 空间$\left(通常记为\ H=\bigoplus_{n=1}^{\infty}H_n\right)$．

2．证明

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\exp i2\pi n\frac{x-a}{b-a},\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

是 $L^2([a,\ b],\ m)$ 上的完备就范直交系．

3．证明例 6～9 中的各种多项式关于相应的权函数是完备就范直交系．

4. (Sturm-Liouvile 问题) 求出$[a, b]$上满足常微分方程

$$(r(x)u'(x))'+(q(x)+\lambda p(x))u(x)=0 \tag{*}$$

和边界条件 $a_1u(a)+a_2u'(a)=0,\ b_1u(b)+b_2u'(b)=0$

的实函数 u, 其中 $u'(x)=\dfrac{d}{dx}u(x)$, p、q、γ 等都是实函数, 并且当 $x\in(a, b)$ 时, $p(x)>0$, $r(x)>0$, λ 是参数, (a_1, a_2) 和 (b_1, b_2) 是两个不全为 0 的数组.

证明: 对于 $\lambda=\lambda_n$, λ_m, 如果 (*) 分别有解 u_n、u_m, 那末当 $\lambda_n\neq\lambda_m$ 时, u_n、u_m 关于权函数 p 必是直交的 (这里总认为函数的可积性、可微性是具备的).

5. (1) 证明 n 次 Legendre 多项式满足下列方程

$$((x^2-1)u')'-n(n+1)u=0;$$

(2) 证明 n 次 Hermite 多项式满足下列方程

$$u''-2xu'+2nu=0;$$

(3) 证明 n 次 Leguerre 多项式满足下列方程

$$xu''+(1-x)u'+nu=0;$$

(4) 证明 n 次 Чебышев 多项式满足下列方程

$$(1-x^2)u''-xu'+n^2u=0.$$

6. 设 H 是可析 Hilbert 空间, $(\cdot, \cdot)_H$ 是 H 上内积, $\{e_n|n=1, 2, \cdots\}$ 是 H 上完备就范直交系, $f(t)$ 是 $[a, b]\to H$ 的映射, 并且满足

(i) $(f(t), e_i)(i=1, 2, \cdots)$勒贝格可测;

(ii) $\displaystyle\int_a^b\sum_{i=1}^\infty|(f(t), e_i)|^2dt<\infty$.

记满足上述条件的映射(向量值函数)$f(t)$全体为 $L^2([a, b], H, m)$, 并对任何 $\alpha, \beta\in\mathbb{K}$, $f, g\in L^2([a, b], H, m)$, 规定

$$(\alpha f+\beta g)(t)=\alpha f(t)+\beta g(t), \tag{1}$$

$$(f, g)=\int_a^b(f(t), g(t))_H dt. \tag{2}$$

证明 $L^2([a, b], H, m)$ 按运算(1)成为线性空间, 按 $(\cdot, \cdot)$ 成为 Hilbert 空间.

7. 设 $f(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 中的解析函数,

$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n,\quad \sum_{n=0}^\infty|a_n|^2<\infty.$$

这种解析函数的全体记为 H^2. 证明 H^2 按通常的线性运算和内积

$(f, g)=\lim\limits_{\gamma\to1-0}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta$ 成为复 Hilbert 空间. 任取

H^2 中完备就范直交系 $\{e_n(z)\}$，证明当 $|z|<1$，$|t|<1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(t)} = \frac{1}{1-z\bar{t}}.$$

8．将函数组 1、x、x^2、x^3、在 $[0,\ 1]$ 上分别按权函数 $p(x)=x$，x^n（n 是自然数），$(1-x)^2$ 等直交化．

9．设 φ 是内积空间 H_1 到内积空间 H_2 的线性映射，证明 φ 是保范的充要条件是 φ 是保内积的．

10．证明在任何无限维可析 Banach 空间 B 中不存在可列个向量 $\{x_n\}$，使得 $\{x_n\}$ 构成 B 的线性基（从而 l^2 作为线性空间的维数 $\dim l^2 > \aleph_0$）．

§4 共轭空间和共轭算子

1．连续线性泛函的表示

现在我们利用 §2 的投影定理来研究 Hilbert 空间上连续线性泛函的一般形式．

设 H 是一个内积空间，任意取 H 中一个固定的向量 y，可以在 H 上作泛函 F_y 如下：

$$F_y(x)=(x,\ y);\quad x\in H. \tag{4.1}$$

由内积对第一个变元的线性，即知泛函 F_y 是线性的．由 Schwarz 不等式，即得 $|F_y(x)|=|(x,\ y)|\leqslant\|x\|\|y\|$，因此 F_y 还是连续泛函，而且 $\|F_y\|\leqslant\|y\|$．另一方面，只要取 $x=y$ 就知道 $\|F_y\|=\|y\|$．我们称 F_y 为**向量 y 导出的连续线性泛函**．

当 H 是 Hilbert 空间时，上述事实的逆命题也是成立的，就是说，H 上的任何一个连续线性泛函都是有(4.1)的形式的．

定理 1（F. Riesz） 设 H 是 Hilbert 空间，F 是 H 上的连续线性泛函，那末必有唯一的向量 $y\in H$，使得对任何 $x\in H$，都成立

$$F(x)=(x,\ y), \tag{4.2}$$

并且 $\|F\|=\|y\|$．

证明 如果 $F=0$，只要取 $y=0$ 就好了．因此不妨设 $F\neq 0$．令 $\mathcal{N}(F)$ 是 F 的零空间，即 $\mathcal{N}(F)=\{x\,|\,F(x)=0\}$．因为

F 是连续线性泛函，由第五章§1定理3的(1)，可知 $\mathscr{N}(F)$ 是闭线性子空间，又因 $F\neq 0$，所以 $\mathscr{N}(F)\neq H$. 要证明的(4.2)式启发我们要到 $\mathscr{N}(F)^{\perp}$ 中去找向量 y. 由§2定理2的系1，必定有 $z\neq 0$，$z\perp\mathscr{N}(F)$. 这时，从 $\mathscr{N}(F)\cap\mathscr{N}(F)^{\perp}=\{0\}$ 可知 $z\overline{\in}\mathscr{N}(F)$，所以 $F(z)\neq 0$.

对于任何 $x\in H$，由于 $F\left(x-\dfrac{F(x)}{F(z)}z\right)=0$，就得到

$$x-\frac{F(x)}{F(z)}z\in\mathscr{N}(F),$$

所以 $\left(x-\dfrac{F(x)}{F(z)}z\right)\perp z$，即

$$\left(x-\frac{F(x)}{F(z)}z,\ z\right)=0,$$

这就是 $F(x)=\dfrac{F(z)}{\|z\|^2}(x,z)$. 如果取 $y=\dfrac{\overline{F(z)}}{\|z\|^2}z$，就知道(4.2)式对任何 x 成立.

在定理1的条件下，泛函 F 既然表示成(4.1)的形式，即 F 是由向量 y 导出的，所以 $\|F\|=\|y\|$. 又向量 y 是由 F 唯一确定的. 因为，如果又有 z，使 $F_y=F_z$，那末 $F_{y-z}=0$. 从 $\|F_{y-z}\|=0$，得到 $\|y-z\|=0$. 由此即知 $y=z$. 证毕.

2. 共轭空间

我们作 Hilbert 空间 H 到它的共轭空间 H^* 的映射 C 如下:

$$C:\ y\mapsto F_y,\quad (y\in H),$$

其中 F_y 就是((4.1)式所规定的)由向量 y 导出的泛函. 那末由 Riesz 定理，C 是 H 到 H^* 的双射，并且保持范数不变.

容易看到，映射 C 是共轭线性的(又称是反线性的)，即对于两个数 α、β 及 y, $z\in H$，成立着 $C(\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}Cy+\bar{\beta}Cz$. 这直接由

$$\begin{aligned}F_{\alpha y+\beta z}(x)&=(x,\ \alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x,\ y)+\bar{\beta}(x,\ z)\\&=\bar{\alpha}F_y(x)+\bar{\beta}F_z(x)\end{aligned}$$

总之，上面所作的映射 C 是 H 到 H^* 的双射，它是共轭线性的，而且保持范数不变，称 C 为"复共轭"线性同构(映射 C 不是 H 到 H^* 的线性同构)．今后我们将把 y 和 F_y 看成是同一的，即把向量 y 看成泛函 F_y，把泛函 F_y 看成向量 y．这样，H 和 H^* 就一致化了(复 Hilbert 空间的共轭空间常用这种表示)．因此称 H 是自共轭空间．但要注意的是，对于数 α 及 $y\in H$，把 αy 作为泛函看时，它在点 x 的值是泛函 y 在 x 点的值乘以 $\bar{\alpha}$．这和第五章§3情况略有不同．当然，对于实 Hilbert 空间，这两者就没有区别了．

3．共轭算子

由于 Hilbert 空间 H 和它的共轭空间可以一致化，因此共轭空间上的共轭算子的概念可以引入到 Hilbert 空间本身中去．

定理 2　设 G 是内积空间，H 是 Hilbert 空间，A 是 $H\to G$ 的有界线性算子，那末必有 $G\to H$ 的唯一的有界线性算子 B (并且 $\|B\|\leqslant\|A\|$)，使得对任何 $x\in H$，$y\in G$，有

$$(Ax,\ y)=(x,\ By)\text{[注]}.\tag{4.3}$$

证明　对任何 $y\in G$，因为

$$|(Ax,\ y)|\leqslant\|Ax\|\|y\|\leqslant\|A\|\|x\|\|y\|,$$

所以

$$\varphi_y(x)=(Ax,\ y)$$

是 H 上的有界线性泛函．因为 H 是完备的，由 Riesz 定理，对每个 y，相应地有唯一的 $z\in H$，使

$$(Ax,\ y)=(x,\ z),\quad x\in H.\tag{4.4}$$

我们作 G 到 H 的算子 B 如下：对于 $y\in G$，把使(4.4)式成立的 z 作为 By．这样就作出了算子 B 使(4.3)式成立．

下面证明 B 是 $G\to H$ 的有界线性算子．对于 y_1，$y_2\in G$ 及数 α、β，

$$\begin{aligned}(Ax,\ \alpha y_1+\beta y_2)&=\bar{\alpha}(Ax,\ y_1)+\bar{\beta}(Ax,\ y_2)\\&=\bar{\alpha}(x,\ By_1)+\bar{\beta}(x,\ By_2)\\&=(x,\ \alpha By_1+\beta By_2),\end{aligned}$$

[注]　(4.3)式中左方的 $(\cdot,\ \cdot)$ 表示 G 中的内积，而右方的则表示 H 中的内积．

因此 $B(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha By_1+\beta By_2$，即 B 是线性算子．另外，由 B 的定义可知，对任何 $y\in G$，有 $\|By\|=\|\varphi_y\|\leqslant\|A\|\|y\|$，因此 B 是有界的，而且 $\|B\|\leqslant\|A\|$．

显然，使(4.3)式成立的算子 B 是由 T 唯一确定的．证毕．

定义 设 H 和 G 是两个内积空间，A 是 $H\to G$ 的线性算子，又设 A^* 是 $G\to H$ 的线性算子，适合

$$(Ax,\ y)=(x,\ A^*y),\quad x\in H,\ y\in G, \tag{4.5}$$

那末称 A^* 是 A 的**共轭算子或伴随算子**．

显然，适合(4.5)的 A^* 是唯一的．事实上，如果又有 A'，使得

$$(Ax,\ y)=(x,\ A'y),\quad x\in H,\ y\in G.$$

从而
$$(x,\ (A^*-A')y)=0,\quad x\in H,\ y\in G,$$

那末对任何 y，$(A^*-A')y=0$，即 $A^*=A'$．

又从定义的(4.5)可知，$A^{**}=(A^*)^*=A$．

定理 2 说明当 H 是 Hilbert 空间时，对任何 $A\in\mathfrak{B}(H\to G)$，必存在共轭算子 A^*，而且 $A^*\in\mathfrak{B}(G\to H)$．

在第五章 § 3 中，对于 Banach 空间的有界线性算子，曾引进过共轭算子的概念．但现在的共轭算子与那里稍有不同．这里当 A，$B\in\mathfrak{B}(H\to G)$，α、β 是复数时，$(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*$，而在 Banach 空间中，按过去的共轭算子的概念应为 $(\alpha A+\beta B)^*=\alpha A^*+\beta B^*$(可参看下面定理 3 的(iii)和第五章 § 3 定理 8 的(2))．但是在实空间中两者是完全一致的．

例 1 设 C^n 是 n 维复内积空间，$\{e_i\}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是 C^n 的就范直交基．设 A 是 C^n 的线性算子(这时 A 必定是有界的)．由于 e_1、e_2、$\cdots$、e_n 是 C^n 的基，A 是线性算子，所以 $Ae_\mu(\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的值就决定了算子 A．如果

$$Ae_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu\mu}e_\nu$$

(参看第五章 § 1 例 1)，由上所述，C^n 中线性算子 A 由 $n\times n$ 阵 $(\alpha_{\nu\mu})(\mu,\ \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 所决定．而对给定的任何 n^2 个数 $\alpha_{\nu\mu}$，由上式也决定了一个线性算子 A．我们把 n 阶方阵 $(\alpha_{\nu\mu})$ 称为线

性算子 A 在就范直交基 e_1、…、e_n 下的表示阵. 由

$$Ae_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\nu\mu}e_\nu$$

知道 $\alpha_{\nu\mu}=(Ae_\mu,\ e_\nu)$.

容易知道, 在取定的就范直交基下, 线性算子 A 与它的表示阵 $(\alpha_{\nu\mu})$ 之间的这种对应关系是算子与 n 阶方阵之间的一一对应.

如果 A 的表示阵$(\alpha_{\nu\mu})$, 那末 $\alpha_{\nu\mu}=(Ae_\mu,\ e_\nu)$, A 的共轭算子 A^* 就使得

$$(A^*e_\mu,\ e_\nu)=\overline{(e_\nu,\ A^*e_\mu)}=\overline{(Ae_\nu,\ e_\mu)}=\overline{\alpha_{\mu\nu}},$$

因此 A^* 的表示阵$(\overline{\alpha}_{\mu\nu})$就是 A 的表示阵$(\alpha_{\nu\mu})$的共轭阵(又称关联矩阵,即先取转置阵,再对每个元素取复共轭).

例 2 设 H 是 $L^2[a,\ b]$, A 是 Fredholm 型积分算子

$$Ax(t)=\int_a^b K(t,\ s)x(s)ds,\quad x(s)\in L^2[a,\ b],\qquad(4.6)$$

其中 $K(t,\ s)$ 是矩形 D: $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant b$ 上可测函数, 而且 $|K(t,\ s)|^2$ 在 D 上可积, A 是 $L^2[a,\ b]$ 上的有界线性算子(参见第五章§1 例 4, 它的有界性见第五章§1 习题 9).

现在我们证明由下式定义的算子 A^* 是 A 的共轭算子:

$$A^*x(t)=\int_a^b \overline{K(s,\ t)}x(s)ds,\quad x(s)\in L^2[a,\ b].\qquad(4.7)$$

由于 $K(s,\ t)$ 在 D 上可测而且绝对值平方可积, 因此, 由(4.7)式定义的算子 A^* 是有界线性算子. 要证明 A^* 确是 A 的共轭算子, 只要证明(4.3)式成立就可以了, 也就是要证明对任何 $x,\ y\in L^2[a,\ b]$, 成立 $(Ax,\ y)=(x,\ A^*y)$. 对于 $x,\ y\in L^2[a,\ b]$, 显然, 函数 $|x(t)y(s)|$ 在 D 上是平方可积的, 根据 Hölder 不等式, $K(s,\ t)x(t)y(s)$ 在 D 上可积. 再利用 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}(x,\ A^*y)&=\int_a^b x(t)\overline{\int_a^b \overline{K(s,\ t)}y(s)ds}\,dt\\&=\int_a^b\int_a^b K(s,\ t)x(t)\overline{y(s)}ds\,dt\\&=\int_a^b\int_a^b K(t,\ s)x(s)\overline{y(t)}ds\,dt=(Ax,\ y),\end{aligned}$$

所以由(4.7)式定义的算子 A^* 是 A 的共轭算子.

显然, A^* 也是 Fredholm 型积分算子. 如果记

$$A^*x(t)=\int_a^b K^*(t, s)x(s)ds,$$

那末积分算子 A^* 的核是 $K^*(t, s)=\overline{K(s, t)}$, 积分方程论中常称 $K^*(t, s)$ 是核 $K(t, s)$ 的共轭核.

由例1我们看到, Hilbert 空间中共轭算子是共轭矩阵概念的推广, 它具有许多与共轭矩阵类似的性质. 阅读下面定理3时可参照第五章§3定理8~9以及第五章§4习题1.

定理3 共轭算子有下面的性质: 设 H 和 K 是 Hilbert 空间, G 是内积空间, $A, B\in\mathfrak{B}(H\to G)$, $C\in\mathfrak{B}(K\to H)$, α、β 是数, 那末

(1) $I_H^*=I_H$, $A^{**}=A$;

(2) $\|A^*\|^2=\|A\|^2=\|A^*A\|$;

(3) (共轭线性) $(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*$;

(4) $(AC)^*=C^*A^*$;

(5) A 为正则算子[注]的充要条件是 A^* 为正则算子, 当 A 正则时, 有 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$;

(6) 当 G 也是 Hilbert 空间时

$$\mathscr{N}(A)=\mathscr{R}(A^*)^{\perp},\ \mathscr{N}(A^*)=\mathscr{R}(A)^{\perp}, \tag{4.8}$$
$$\overline{\mathscr{R}(A)}=\mathscr{N}(A^*)^{\perp},\ \overline{\mathscr{R}(A^*)}=\mathscr{N}(A)^{\perp};$$

(7) 设 $A\in\mathfrak{B}(H\to H)$, 又设两个非零向量 $x, y\in H$, 满足 $(A-\lambda I)x=0$, $(A^*-\mu I)y=0$, 那末当 $\lambda\neq\bar{\mu}$ 时, $x\perp y$.

证明 (1) $I_H^*=I_H$ 是显然的. 对任何 $x\in H$, $y\in G$, 因为 $(Ax, y)=(x, A^*y)$, 所以 $(A^*y, x)=(y, Ax)$, 从而立即得到 $(A^*)^*=A$.

(2) 对任何 $y\in G$, 在(4.5)中取 $x=\dfrac{A^*y}{\|A^*y\|}$, 立即得到

$$\|A^*y\|=|(Ax, y)|\leqslant\|Ax\|\|y\|\leqslant\|A\|\|y\|,$$

[注] 当 A^{-1} 是全空间定义的有界算子时, 称 A 是正则算子(见第五章§4). 注意, 这时由 H 是 Hilbert 空间必可推出 G 也是 Hilbert 空间.

所以$\|A^*\|\leqslant\|A\|$. 用 A^* 代替 A, 又得到 $\|A\|=\|(A^*)^*\|\leqslant\|A^*\|$. 因此, $\|A^*\|=\|A\|$.

显然, $\|A^*A\|\leqslant\|A^*\|\|A\|$. 另一方面, 对任何 $x\in H$, $\|x\|=1$, 由 Schwarz 不等式有

$$\|Ax\|^2=(Ax,\ Ax)=(A^*Ax,\ x)\leqslant\|A^*Ax\|\|x\|\leqslant\|A^*A\|,$$

所以
$$\|A\|^2=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|^2\leqslant\|A^*A\|,$$

这就证明了 $\|A^*\|^2=\|A\|^2=\|A^*A\|$.

(3) 对任何 $x\in H$, $y\in G$ 及数 α、β, 由于

$$\begin{aligned}((\alpha A+\beta B)x,\ y)&=\alpha(Ax,\ y)+\beta(Bx,\ y)\\&=\alpha(x,\ A^*y)+\beta(x,\ B^*y)\\&=(x,\ (\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*)y),\end{aligned}$$

所以
$$(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*.$$

(4) 对任何 $x\in K$, $y\in G$,

$$(ACx,\ y)=(Cx,\ A^*y)=(x,\ C^*A^*y),$$

所以
$$(AC)^*=C^*A^*.$$

(5) 当 A 是正则算子时, A^{-1} 是全空间定义的有界线性算子. $AA^{-1}=I_G$, $A^{-1}A=I_H$(I_G、I_H 分别是 G、H 上的恒等算子). 由(4)即知

$$(A^{-1})^*A^*=I_G,\ A^*(A^{-1})^*=I_H,$$

因此 A^* 的逆算子就是$(A^{-1})^*$, 它是全空间定义的有界线性算子, 所以 A^* 是正则算子. 反过来, 如果 A^* 是正则算子, 那末, 由于 $A=(A^*)^*$, 所以 A 也是正则算子.

(6) 如果 $x\in\mathscr{N}(A)$, 那末 $Ax=0$, 从而对一切 $y\in G$,

$$0=(Ax,\ y)=(x,\ A^*y),$$

即 $x\perp\mathscr{R}(A^*)$, 所以 $\mathscr{N}(A)\subset\mathscr{R}(A^*)^\perp$. 反之, 任取 $x\in\mathscr{R}(A^*)^\perp$, 显然, 对任何 $y\in H$ 必有

$$(Ax,\ y)=(x,\ A^*y)=0.$$

既然 Ax 与一切 $y\in G$ 直交, 因此 $Ax=0$, 即 $\mathscr{R}(A^*)^\perp\subset\mathscr{N}(A)$. 这样, 就得到(4.8)中第一行的第一式. 用 A^* 代替第一式中的 A,

就得到(4.8)中第一行的第二式.

如果注意到任何线性子空间 L 总满足 $\overline{L}=L^{\perp\perp}$, 将(4.8)第一行的等式取直交补, 立即得到(4.8)的第二行等式.

(7) 由 $Ax=\lambda x$ 及 $A^*y=\mu y$, 得到

$$\lambda(x, y)=(Ax, y)=(x, A^*y)=(x, \mu y)=\overline{\mu}(x, y),$$

所以 $(\lambda-\overline{\mu})(x, y)=0$. 由假设 $\lambda\neq\overline{\mu}$, 所以 $(x, y)=0$, 即 $x\perp y$. 证毕.

4. 无界算子的共轭算子

Hilbert 空间是 Banach 空间的特殊情况. 类似于第五章§3, 在 Hilbert 空间中, 自然也可以引入一般线性算子 (可能无界) 的共轭算子的概念.

定义 设 H 和 G 是内积空间, T 是 H 到 G 的稠定线性算子, 它的定义域为 $\mathscr{D}(T)$, 记 $\mathscr{D}(T^*)=\{y\,|\,y\in G$, 存在 $y^*\in H$, 使 $(Tx, y)=(x, y^*)$ 对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 成立$\}$, 并在 $\mathscr{D}(T^*)$ 上作算子 T^*: $y\mapsto y^*(y\in\mathscr{D}(T^*))$, 那末, T^* 称为 T 的共轭算子, 或伴随算子.

由上所述, T 的共轭算子 T^* 的意义是完全确定的, 从共轭算子的定义可知, 对于任何 $x\in\mathscr{D}(T)$ 及 $y\in\mathscr{D}(T^*)$, 成立着等式

$$(Tx, y)=(x, T^*y). \tag{4.9}$$

完全和 Banach 空间一样, 有下述定理.

定理4 设 T、T_1、T_2 都是 Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 G 的稠定线性算子, 那末

(1) T^* 是闭线性算子;

(2) 对任何 $\alpha\in\mathbb{A}$, $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$;

(3) 当 $\overline{\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2)}=H$ 时,

$$(T_1+T_2)^*\supset T_1^*+T_2^*,$$

特别, 当 T_1、T_2 中有一个是全空间 H 上定义的有界线性算子时,

$$(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*;$$

(4) 当 $T_1\subset T_2$ 时, $T_2^*\subset T_1^*$;

(5) 当 C 是 G 到 Hilbert 空间 K 的线性算子, 并且 $\overline{\mathscr{D}(CT)}$

$=H$ 时

$$(CT)^* \supset T^* C^*,$$

特别地，如果又有 $C \in \mathfrak{B}(G \to K)$，那末

$$(CT)^* = T^* C^*,$$

当 B 是 Hilbert 空间 K 到 H 的线性算子，并且 $\overline{\mathscr{D}(TB)} = K$ 时

$$(TB)^* \supset B^* T^*;$$

(6) 当 T 是稠定闭算子时，T^* 必是稠定闭算子，并且 $T^{**} = T$;

(7) 当 $G=H$ 时，如果有非零向量 $x \in \mathscr{D}(T)$，$y \in \mathscr{D}(T^*)$，并且 $(T-\lambda I)x=0$，$(T^*-\mu I)y=0$，当 $\lambda \neq \bar{\mu}$ 时，$x \perp y$.

证明 (1)～(5) 都是和 Banach 空间的情况一样证明（参见第五章 § 3 定理 10），(7)和有界情况一样证明（见定理 3 的(7)），下面证明(6).

作乘积空间 $H \times G$，$G \times H$（它们都是 Hilbert 空间，见 § 1 习题 8）的算子

$$\begin{aligned} V&: \{x, y\} \mapsto \{-y, x\}, \\ U&: \{y, x\} \mapsto \{-x, y\}. \end{aligned} \quad (x \in H,\ y \in G) \tag{4.10}$$

显然，V、U 分别是 $H \times G$ 到 $G \times H$，$G \times H$ 到 $H \times G$ 的线性保范同构，并且

$$UV = -I_{H \times G},\ VU = -I_{G \times H}. \tag{4.11}$$

利用上述符号，易知(4.9)等价于下列等式

$$G(T^*) = (VG(T))^{\perp}, \tag{4.12}$$

其中 $G(T)$、$G(T^*)$ 分别表示 T 和 T^* 的图象（见第四章 § 4 的第 14 小节）.

今证 T^* 是稠定的. 假如 $y_0 \perp \mathscr{D}(T^*)$，从而 $G \times H$ 中点 $\{y_0, 0\} \perp G(T^*)$，但 $G(T^*) = (VG(T))^{\perp}$，即 $\{y_0, 0\} \in (VG(T))^{\perp\perp} = \overline{VG(T)}$.

易知 $$\overline{VG(T)} = V\overline{G(T)} = VG(T),$$

这就是说

$$\{0, y_0\} = U\{y_0, 0\} \in UVG(T) = -G(T) = G(T),$$

从而，只有 $y_0=T0=0$，即 T^* 是稠定的。

由于 $\overline{\mathscr{D}(T^*)}=G$，所以 T^{**} 存在，用 T^* 代替 (4.12) 中的 T (自然，V 要换成 U)，就有

$$G(T^{**})=(UG(T^*))^{\perp}=(U(VG(T))^{\perp})^{\perp}$$
$$=(UVG(T))^{\perp\perp\text{[注]}}=G(T)^{\perp\perp}=G(T).$$

证毕。

例 3 在(复) $L^2([0,1],m)$ 中，令 $\mathscr{D}=\{f|f(t)$ 在 $[0,1]$ 上全连续，$f(0)=f(1)=0$，并且 $f'(t)\in L^2([0,1],m)\}$。显然，$\overline{\mathscr{D}}=L^2([0,1],m)$，并且 $\mathscr{D}$ 是线性子空间。作算子 T 如下：$\mathscr{D}(T)=\mathscr{D}$，

$$T:\ f(t)\mapsto if'(t),\quad f\in\mathscr{D}(T).$$

可以仿第五章 §3 例，求出 T^*，唯一要注意的是，在第五章 §3 中，$L^2([0,1],m)$ 只是作为 Banach 空间出现，因此对于一个 $g\in L^2([0,1],m)$，在那里视为 Banach 空间 $L^2([0,1],m)$ 上连续线性泛函是

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt. \tag{4.13}$$

而现在，g 视为 Hilbert 空间 $L^2([0,1],m)$ 上连续线性泛函是

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt, \tag{4.14}$$

因此，只要将第五章 §3 例的证明中 g，$\frac{d}{dt}$ 分别用 $\bar{g}$，$i\frac{d}{dt}$ 代替，可以证明

$\mathscr{D}(T^*)=\{\tilde{g}|\tilde{g}$ 在 $[0,1]$ 上全连续，并且 $g'(t)\in L^2([0,1],m)\}$，

$$T^*g=ig',\ g\in\mathscr{D}(T^*). \tag{4.15}$$

特别，如果视 $T=i\frac{d}{dt}$ 为定义在

$\mathscr{D}_0=\{f|f(t)$ 在 $[0,1]$ 上全连续，$f(0)=f(1)$，$f'(t)\in(L^2[0,1],m)\}$，那末，必有 $\mathscr{D}(T^*)=\mathscr{D}_0=\mathscr{D}(T)$，并且 $T^*=T$。

[注] 容易证明 $U(VG(T))^{\perp}=(UVG(T))^{\perp}$。

习　题

1. 设 f 是复 Hilbert 空间 H 上的泛函，如果对任何的 $x, y\in H$, $\alpha, \beta\in \mathbb{C}$, $f(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}f(x)+\bar{\beta}f(y)$，称 f 是 H 上共轭线性泛函（也称反线性泛函）. 证明下述 Riesz 表示定理：对复 Hilbert 空间 H 上任何共轭线性泛函 f，必存在唯一的 $y\in H$，使得 $f(x)=(y, x)$.

2. 设 $H=L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu)$, $M(\omega)$ 是 Ω 上有界可测函数. 证明 H 上乘积算子

$$T_M:\ f(\omega)\mapsto M(\omega)f(\omega),\quad f\in L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu),$$

的共轭算子是 T_M^*: $f(\omega)\mapsto \overline{M(\omega)}f(\omega)$.

3. 设 H 是复 Hilbert 空间，A 是 H 上的有界线性算子，证明 $A=-A^*$ 的充要条件是对一切 $x\in H$, $\mathrm{Re}(Ax, x)=0$.

4. 设 A 是 l^2 上的有界线性算子，当 $x=\{x_\nu\}\in l^2$ 时，记 $Ax=\{y_\nu\}$,

$$y_\mu=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\mu\nu}x_\nu,\quad \mu=1, 2, \cdots$$

设 $A^*x=\{y_\nu^*\}$, $y_\mu^*=\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}a_{\mu\nu}^*x_\nu$, $\mu=1, 2, \cdots$. 证明 $a_{\mu\nu}^*=\bar{a}_{\nu\mu}$.

5. 设 $H_n(n=1, 2, \cdots)$ 是一列 Hilbert 空间，按 § 3 习题 1，作 Hilbert 空间 $H=\left\{\{x_n\}\,|\,x_n\in H_n,\ n=1, 2, \cdots,\ 且\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\right\}$, $(x, y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$. 又设 A_n 是 H_n 上有界线性算子，并且 $\{\|A_n\|\}$ 是有界数列，证明：

(1) H 上算子 A: $\{x_n\}\mapsto\{A_nx_n\}$ 是 H 上有界线性算子，并且 $\|A\|=\sup\|A_n\|$.

(2) A 的共轭算子是 A^*: $\{x_n\}\mapsto\{A_n^*x_n\}$.

6. 证明(4.10)所作的算子 U、V 具有下列性质：

(1) U、V 是线性、保范算子，并且 $\mathscr{R}(U)=H\times G$, $\mathscr{R}(V)=G\times H$;

(2) $UV=-I_{H\times G}$, $VU=-I_{G\times H}$;

(3) 当 $\{x_1, y_1\}\perp\{x_2, y_2\}$ 时，

$$V\{x_1, y_1\}\perp V\{x_2, y_2\},$$

当 $\{y_1, x_1\}\perp\{y_2, x_2\}$ 时，

$$U\{y_1, x_1\}\perp U\{y_2, x_2\};$$

(4) M、N 分别是 $H\times G$, $G\times H$ 的子集，$VM^\perp=(VM)^\perp$, $UN^\perp=(UN)^\perp$.

7. 证明(4.9)等价于(4.12).

8. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上稠定线性算子，并且 T、T^* 都是单射. 证明 T^{-1} 必是稠定线性算子，并且 $T^{-1*}=T^{*-1}$.

9. 在定理4中，如果仅假设H、G是两个内积空间，问定理4中的结论(1)～(7)那些仍然成立？为什么？

10. 设T是Hilbert空间H上稠定线性算子．证明$\mathscr{R}(A)^{\perp}=\mathscr{N}(A^*)$，$\overline{\mathscr{R}(A)}=\mathscr{N}(A^*)^{\perp}$．

§5 Hilbert空间中重要的线性算子

Hilbert空间比一般的Banach空间具有更好的空间结构，具体地说，就是有直交投影．利用直交投影，可以解决极值$\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$（此地$M$是Hilbert空间的凸完备子集）可达问题．这种极值可达是不需要假设M是紧或列紧（致密）之类条件的．特别，当M是线性子空间时，利用Hilbert空间直交系可以很快地确定达到极值

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|$$

的x_0的，因而Hilbert空间理论在分析数学里有广泛的应用．同样，Hilbert空间上线性变换（算子）理论也获得很多成功的应用．在这一节中，我们只拟简单地介绍Hilbert空间中常见的几种重要的算子及其性质．它们主要是自共轭算子、酉算子、正规算子、投影算子和对称算子等．

1. 有界自共轭算子

定义 设A是Hilbert空间$H\longrightarrow H$的有界线性算子[注]，如果$A^*=A$，就称A是*自共轭算子*或*自伴算子*．

自共轭算子是自共轭矩阵的推广．

定理1 设A是复Hilbert空间H上的有界线性算子，那末A是自共轭算子的充要条件是对一切$x\in H$，(Ax, x)是实数．

证明 必要性 设$A=A^*$，那末根据定义，

$$(Ax, x)=(x, Ax)=\overline{(Ax, x)},$$

所以(Ax, x)是实数．

[注] 通常"有界线性算子"指定义域是全空间的算子，不是全空间定义的有界线性算子都将指明它的定义域．

充分性　首先，直接验算可知：对（复）Hilbert 空间 H 中任一有界线性算子 A 和 $x, y\in H$，类似于 §1 中的极化恒等式，有

$$(Ax, y)=\frac{1}{4}[(A(x+y), x+y)-(A(x-y), x-y)+i(A(x+iy), x+iy)-i(A(x-iy), x-iy)] \tag{5.1}$$

（这也称为极化恒等式）．如果对一切 $x\in H$，(Ax, x) 是实数，那末由(5.1)可知

$$(Ax, y)=\overline{(Ay, x)},\quad x, y\in H,$$

从而 $(Ax, y)=(x, Ay)$ 对一切 $x, y\in H$ 成立．由于 A 的共轭算子 A^* 是唯一的，所以 $A^*=A$．证毕．

如果 H 是实 Hilbert 空间，那末对一切 $x\in H$ 和 H 上任何有界线性算子 A，(Ax, x) 都是实数，但 A 并不都是自共轭算子．例如在 E^n 中，取一组就范正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，E^n 上线性算子 A 在这个基下的矩阵表示为 $(a_{\mu\nu})$，A 是 E^n 上自共轭算子等价于 $(a_{\mu\nu})$ 是对称阵．由此可知，$(a_{\mu\nu})$ 不是对称阵的算子就不是 E^n 上自共轭算子，但仍满足对一切 $x\in E^n$，(Ax, x) 是实数．这就是说，定理 1 只是在复 Hilbert 空间情况下才成立．

设 A 是 Hilbert 空间 H 上线性算子，$\mathscr{D}(A)$ 是它的定义域，$\lambda\in\Lambda$，如果存在非零向量 x，使 $Ax=\lambda x$，称 λ 是 A 的**特征值**，x 是**相应于 λ 的特征向量**．

系 1　设 A 是 Hilbert 空间 H 上有界自共轭算子，则下列命题成立[注]：

(1) $\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax, x)|=\|A\|$．

(2) 如果 λ 是 A 的特征值，那末 λ 必是实数．

(3) 设 λ、μ 是两个不同的特征值，x、y 分别是相应于 λ、μ 的特征向量，那末 $x\perp y$．

[注]　本系的所有命题也可从自共轭算子谱论中的谱分解定理（见第七章 §4）直接推出．

(4) 对任何复数 $\lambda=\sigma+i\tau$，当 $\tau\neq 0$ 时，$A-\lambda I$ 必是正则算子，并且 $\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|\tau|}$.

证明 (1) 显然，对任何 $x\in H$，$\|x\|=1$，

$$|(Ax,\ x)|\leqslant\|Ax\|\|x\|\leqslant\|A\|, \tag{5.2}$$

因此，我们只要证明

$$\sup_{\|x\|=1}|(Ax,\ x)|\geqslant\|A\|.$$

记 $c=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,\ x)|$。显然，对任何 $y\in H$，

$$|(Ay,\ y)|\leqslant c\|y\|^2. \tag{5.3}$$

当 $(Ax,\ y)$ 是实数时，利用 $A=A^*$，容易直接证明

$$(Ax,\ y)=\frac{1}{4}[(A(x+y),\ x+y)-(A(x-y),\ x-y)].$$

由(5.3)和平行四边形公式，立即得到

$$|(Ax,\ y)|\leqslant\frac{c}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)$$

$$=\frac{c}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{5.4}$$

当 $(Ax,\ y)$ 不是实数时，令 $\lambda=e^{-i\theta}$，$\theta=\arg(Ax,\ y)$，这时，$(A\lambda x,\ y)$ 便是实数，因而

$$|(Ax,\ y)|=|\lambda(Ax,\ y)|\leqslant\frac{c}{2}(\|\lambda x\|^2+\|y\|^2)$$

$$=\frac{c}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

从而 (5.4) 对一切 x，$y\in H$ 都成立．设 t 是任何非零实数，由(5.4)，

$$|(Ax,\ y)|=\left|\left(Atx,\ \frac{1}{t}y\right)\right|\leqslant\frac{c}{2}\left(\|tx\|^2+\left\|\frac{1}{t}y\right\|^2\right). \tag{5.5}$$

当 x, y 都不等于零时，取 $t=(\|y\|/\|x\|)^{\frac{1}{2}}$，由(5.5)得到

$$|(Ax,\ y)|\leqslant c\|x\|\|y\|.$$

显然，当 x、y 中有一个等于零时，上式仍成立．由上式立即得到

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=\|y\|=1}|(Ax,\ y)|\leqslant c=\sup_{\|x\|=1}|(Ax,\ x)|.$$

(2) 因为

$$\lambda(x, x)=(Ax, x)=(x, Ax)=(x, \lambda x)=\bar{\lambda}(x, x), \quad (5.6)$$

但是$(x, x)\neq 0$, 所以$\lambda=\bar{\lambda}$, 即λ是实数.

(3) 因为

$$\lambda(x, y)=(Ax, y)=(x, Ay)=(x, \mu y)=\bar{\mu}(x, y), \quad (5.7)$$

但是$\lambda\neq\bar{\mu}$, 所以$(x, y)=0$, 即$x\perp y$.

(4) 因为对任何$x\in H$,

$$((A-\lambda I)x, x)=((A-\sigma I)x, x)-i\tau(x, x), \quad (5.8)$$

其中$((A-\sigma I)x, x)$, $\tau(x, x)$是实数, 所以

$$\|(A-\lambda I)x\|\|x\|\geqslant|((A-\lambda I)x, x)|\geqslant|\tau|\|x\|^2,$$

即

$$\|(A-\lambda I)x\|\geqslant|\tau|\|x\|. \quad (5.9)$$

由此可知$(A-\lambda I)$是单射, 并且对任何

$$y\in\mathscr{R}(A-\lambda I), \ \|(A-\lambda I)^{-1}y\|\leqslant\frac{1}{|\tau|}\|y\|.$$

由逆算子定理可知, 余下仅需证明$\mathscr{R}(A-\lambda I)=H$. 事实上, 当(5.9)中换$\lambda$为$\bar{\lambda}$时, 不等式仍成立, 从而$(A-\bar{\lambda}I)$也是单射, 因此, $\mathscr{N}((A-\lambda I)^*)=\mathscr{N}(A-\bar{\lambda}I)=\{0\}$. 由§4定理3的(6)可知$\overline{\mathscr{R}(A-\lambda I)}=H$. 这样, 对任何$y\in H$, 必有$x_n\in H$, 使得$(A-\lambda I)x_n=y_n\to y$. 从而$\{(A-\lambda I)x_n\}$是基本点列. 根据(5.9), $\{x_n\}$必也是基本点列, 因此, 存在$x_0\in H$, 使得$x_n\to x_0$. 由于$A-\lambda I$是连续的, 所以

$$(A-\lambda I)x_0=\lim_{n\to\infty}(A-\lambda I)x_n=y,$$

这样就得到$\mathscr{R}(A-\lambda I)=H$. 证毕.

定义 设A是复 Hilbert 空间上有界线性算子, 分别称有界线性算子

$$\mathrm{Re}(A)=\frac{A+A^*}{2}, \ \mathrm{Im}(A)=\frac{A-A^*}{2i} \quad (5.10)$$

为A的实部和虚部. 显然, 有分解$A=\mathrm{Re}(A)+i\,\mathrm{Im}(A)$, 称它为$A$的直角(坐标)分解.

系 2 设 A 是复 Hilbert 空间上有界线性算子，那末

(1) $\mathrm{Re}(A)$、$\mathrm{Im}(A)$ 都是自共轭算子；

(2) A^*A, AA^* 都是自共轭算子；

(3) $\|A^*A\|=\|A\|^2=\|A^*\|^2=\|AA^*\|$.

证明 由定理 1 直接可得(1)和(2).

(3) 由 §4 定理 3 的(ii)可得(3). 也可由系 1 的(1)，有

$$\|A^*A\|=\sup_{\|x\|=1}|(A^*Ax, x)|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|^2=\|A\|^2.$$

同样可以证明，$\|AA^*\|=\|A^*\|^2$，又因为 $\|A^*\|=\|A\|$，所以 (3) 成立. 证毕.

例 1 设 $\{e_n|n=1, 2, \cdots\}$ 是 Hilbert 空间 H 上完备就范直交系，$\{a_n\}$ 是有界的实数列，记 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ie_i$ 为$(x_1, x_2, \cdots)$，算子

$$A: (x_1, \cdots, x_n, \cdots)\mapsto(a_1x_1, \cdots, a_nx_n, \cdots),\quad (x_1, \cdots, x_n, \cdots)\in H, \tag{5.11}$$

是有界自共轭算子.

事实上，算子 A 的线性是显然的. 又对任何 x，有

$$\|Ax\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|a_ix_i|^2\leqslant\sup_i|a_i|^2\|x\|^2,$$

所以 A 是有界的，而且 $\|A\|\leqslant\sup\limits_i|a_i|$ (读者可以证明 $\|A\|=\sup\limits_i|a_i|$). 由于对 H 中任何的 $x=(x_1, \cdots, x_n, \cdots)$, $y=(y_1, \cdots, y_n, \cdots)$,

$$(Ax, y)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\bar{y}_i=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{a_iy_i}=(x, Ay),$$

因此 $A=A^*$，即 A 是自共轭算子.

例 2 设 $H=L^2((-\infty, \infty), m)$，$x(t)$ 是$(-\infty, \infty)$上任何一个实有界勒贝格可测函数，乘 $x(t)$ 的算子为

$$A: f(t)\mapsto x(t)f(t),\quad f\in L((-\infty, \infty), m). \tag{5.12}$$

那末，A 是 H 上有界自共轭算子，并且 $\|A\|=\operatorname*{ess\,sup}\limits_t|x(t)|$[注].

[注] 记号 $\operatorname*{ess\,sup}\limits_t|x(t)|$ 是 $x(t)$ 的本质最大模，见第四章 §3 的第 13 小节.

事实上，由于 $x(t)\in L^\infty((-\infty,\infty),m)$，因此

$$\|Af\|^2=\int|x(t)f(t)|^2dt\leqslant(\operatorname*{ess\,sup}_t|x(t)|^2)\int|f(t)|^2dt$$
$$=(\operatorname*{ess\,sup}_t|x(t)|)^2\|f\|^2,$$

所以 A 是有界的，并且 $\|A\|\leqslant\operatorname*{ess\,sup}_t|x(t)|$.

反之，对任何 $\varepsilon>0$，集 $E_+=\{t|x(t)\geqslant\operatorname*{ess\,sup}_t|x(t)|-\varepsilon\}$ 和 $E_-=\{t|x(t)\leqslant-\operatorname*{ess\,sup}_t|x(t)|+\varepsilon\}$ 中必至少有一个具有正的 Lebesgue 测度，例如 $m(E_+)=\delta>0$. 在 $L^2((-\infty,\infty),m)$ 上取函数

$$f_\delta(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{\delta}}, & \text{当 } x\in E_+ \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in} E_+ \text{ 时}.\end{cases}$$

显然，$\|f_\delta\|=1$，但

$$\|Af_\delta\|^2=\int|x(t)f_\delta(t)|^2dt\geqslant(\operatorname*{ess\,sup}_t|x(t)|-\varepsilon)^2,$$

即 $\|A\|\geqslant|\operatorname*{ess\,sup}_t|x(t)|-\varepsilon|$. 令 $\varepsilon\to0$，就得到

$$\|A\|\geqslant\operatorname*{ess\,sup}_t|x(t)|.$$

从而 $\|A\|=\operatorname*{ess\,sup}_t|x(t)|$.

又对任何 $f,\ g\in L^2((-\infty,\infty),m)$，有

$$(Af,\ g)=\int x(t)f(t)\overline{g(t)}dt=\int f(t)\overline{x(t)g(t)}dt=(f,\ Ag),$$

因此，$A=A^*$，即 A 是自共轭算子.

2. 保距算子和酉算子

定义　设 V 是内积空间 H 到内积空间 G 的线性算子，$\mathscr{D}(V)$ 是 V 的定义域，如果对任何 $x\in\mathscr{D}(V)$，$\|Vx\|=\|x\|$，那末称 V 是部分保距算子；假设 V 是 H 到 G 的部分保距算子，并且 $\mathscr{D}(V)=H$，那末称 V 是保距算子；设 V 是 H 到 G 的保距算子，并且 $\mathscr{R}(V)=H$，那末称 V 是酉算子(而当 H、G 都是实空间时，称 V 是正交算子).

显然，部分保距算子必是连续算子，并且 $\|V\|_{\mathscr{D}(V)}=1$. 利用这一点，易知 V 必可唯一地延拓成 $\overline{\mathscr{D}(V)}$ 上定义的保距算子，因此部分保距算子的定义域一般总假定是闭线性子空间. 另外，当 H 是 Hilbert 空间时，对于部分保距算子 $V(\mathscr{D}(V)=\overline{\mathscr{D}(V)})$，如果它不是保距的，即 $\mathscr{D}(V)^{\perp}\neq\{0\}$，从而 $H=\mathscr{D}(V)\oplus\mathscr{D}(V)^{\perp}$. 于是对任何 $x\in H$，有唯一的分解 $x=x_1+x_2$，$x_1\in\mathscr{D}(V)$，$x_2\in\mathscr{D}(V)^{\perp}$. 这时，可将 V 延拓成全空间上定义的算子

$$\hat{V}: x\mapsto Vx_1,\quad x\in H.$$

读者容易证明：$\hat{V}$ 是 H 到 G 的有界线性算子. 换言之，$\hat{V}$ 是将 V 在 $\mathscr{D}(V)^{\perp}$ 上补充定义为零的算子. 通常 Hilbert 空间 H 到 G 的"部分保距算子"这个术语是指 V 的这种延拓 $\hat{V}$. 本书中也将采用这种涵意.

例 3 设 $\{e_n|n=1, 2, \cdots\}$ 是 Hilbert 空间 H 上完备就范直交系，m 是自然数，$L_m=\overline{\operatorname*{span}_{n\geq m}}\{x_n\}$，又设 k 是任何一个自然数，定义 $L_m\to H$ 的算子

$$V: x=\sum_{i=m}^{\infty}x_ie_i\mapsto Vx=\sum_{i=m}^{\infty}x_ie_{i+k}. \tag{5.13}$$

显然，V 是线性算子. 因为 $\|Vx\|^2=\sum_{i=m}^{\infty}|x_i|^2=\|x\|^2$，所以 V 是 H 上的部分保距算子. 特别，当 $m=1$ 时，$L_1=H$，这时 V 就是保距算子.

例 4 设 $\{e_n|n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 是 Hilbert 空间 H 上完备就范直交系，k 是任何整数，H 上算子 U 定义为

$$U: x=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x_ie_i\mapsto Ux=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x_ie_{i+k}. \tag{5.14}$$

显然，U 不仅是保距算子，而且 $\mathscr{R}(U)=H$，即 U 是酉算子.

例 5 设 $H=(\text{复})L^2(-\infty, \infty)$，$a\in(-\infty, \infty)$，作 H 上算子(平移算子)

$$\tau_a: f(t)\mapsto f(t+a),\quad f\in H. \tag{5.15}$$

易知 τ_a 是 H 上有界线性算子而且 $\mathscr{R}(\tau_a)=H$，即 τ_a 是酉算子.

例 6 设 $H=$(复)$L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu)$, $\theta(\omega)$ 是 Ω 上任一实可测函数, H 上乘 $e^{i\theta(\omega)}$ 的算子为

$$T_\theta: f(\omega)\mapsto e^{i\theta(\omega)}f(\omega), \quad f\in H. \tag{5.16}$$

易知 T_θ 是 H 上酉算子.

定理 2 设 H、G 是两个内积空间, $V\in\mathfrak{B}(H\to G)$, 那末下列命题彼此等价:

(1) $\mathscr{R}(V)=G$, 且

$$\|Vx\|=\|x\|, \quad x\in H. \tag{5.17}$$

(2) $\mathscr{R}(V)=G$, 且

$$(Vx, Vy)=(x, y), \quad x, y\in H. \tag{5.18}$$

(3) $V^{-1}\in\mathfrak{B}(G\to H)$, 且 $V^{-1}=V^*$.

(4) $V^*V=I_H$, $VV^*=I_G$. $\quad$ (5.19)

(5) $\mathscr{R}(V)=G$, 且 V 将 H 上任何完备就范直交系变成 G 上完备就范直交系.

(6) $\mathscr{R}(V)=G$, 且 V 将 H 上某个完备就范直交系变成 G 上就范直交系.

证明 (1)⇒(2) 对 (Vx, Vy) 和 (x, y) 分别用极化恒等式(见 §1 的(1.5)或(1.6)), 立即由等式(5.17)得到(5.18).

(2)⇒(3) 由(5.18)的特例(取 $y=x$)(5.17)可知 V 是单射. 又由于 $\mathscr{R}(V)=G$, 所以对任何 $z\in G$, 有唯一的 $y\in H$, 使得 $Vy=z$. 由(5.17), $\|z\|=\|Vy\|=\|y\|$, 即

$$\|V^{-1}z\|=\|y\|=\|z\|, \quad z\in G, \tag{5.20}$$

因而 $V^{-1}\in\mathfrak{B}(G\to H)$. 由(5.18)就得到

$$(Vx, z)=(x, V^{-1}z), \quad x\in H, z\in G, \tag{5.21}$$

因此 $V^{-1}=V^*$.

(3)⇒(4) 因为 $V^{-1}V=I_H$, $VV^{-1}=I_G$, 所以由(3)立即得到(4).

(4)⇒(5) 设 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 H 中任一完备就范直交系, 这样, $H=\overline{\text{span}}\{e_\lambda\}$. 对任何 $\lambda, \mu\in\Lambda$, 由(5.19),

$$(e_\lambda, e_\mu)=(V^*Ve_\lambda, e_\mu)=(Ve_\lambda, Ve_\mu). \tag{5.22}$$

(5.22)说明 V 将 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 仍变成就范直交系 $\{Ve_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$. 剩下仅需证明 $\{Ve_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是完备的.

因为 $H=\overline{\text{span}}\{e_\lambda\}$, 所以对任何 $x\in H$, 存在 $\lambda_\nu(\nu=1,2,\cdots)\in\Lambda$, 使得 $\mu\neq\lambda_\nu(\nu=1,2,\cdots)$ 时, $(x,e_\mu)=0$, 且

$$x=\sum_{\nu=1}^{\infty}(x,e_{\lambda\nu})e_{\lambda\nu},\tag{5.23}$$

即 $x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}(x,e_{\lambda\nu})e_{\lambda\nu}$. 由于 $V\in\mathscr{B}(H\to G)$, 所以

$$Vx=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}(x,e_{\lambda\nu})Ve_{\lambda\nu},\tag{5.24}$$

即 $Vx\in\overline{\text{span}}\{Ve_\lambda\}$, 从而 $\mathscr{R}(V)\subset\overline{\text{span}}\{Ve_\lambda\}$. 但根据(5.19)的 $VV^*=I_G$, 可得 $\mathscr{R}(V)=G$, 从而 $G=\overline{\text{span}}\{Ve_\lambda\}$. 由§3的定理2, 直交系 $\{Ve_\lambda\}$ 是完备的.

(5)⇒(6) 是显然的.

(6)⇒(1) 设 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 H 上的某一个完备就范直交系, 并且 $\{Ve_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 也是 G 上的就范直交系. 对任何 $x\in H$, 显然(5.23)成立, 从而由(5.24)立即得到

$$\begin{aligned}\|Vx\|^2&=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{\nu=1}^{n}(x,e_{\lambda\nu})Ve_{\lambda\nu}\right\|^2\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}|(x,e_{\lambda\nu})|^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}|(x,e_{\lambda\nu})|^2\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2=\|x\|^2,\end{aligned}$$

即(5.17)成立. 证毕.

系 设 H 是 Hilbert 空间, V 是 H 到 H 的线性算子, $\mathscr{D}(V)$ 是 V 的定义域.

(1) V 是部分保距算子的充要条件是

$$V^*V=I_{\mathscr{D}(V)},\quad VV^*=I_{\mathscr{R}(V)};$$

(2) V 是保距算子的充要条件是

$$(Vx,Vy)=(x,y),\quad x,y\in H;$$

(3) V 是酉算子的充要条件是下列条件中的任何一个成立:

(i) $VV^*=I$, $V^*V=I$;

(ii) $V^{-1}=V^*$;

(iii) V 将 H 上完备就范直交系变成完备就范直交系.

证明　当 V 是 H 上部分保距算子时，可以视 V 为内积空间 $\mathscr{D}(V)$ 到内积空间 $\mathscr{R}(V)$ 上有界线性算子. 利用定理 2 中 (1) 与 (4)的等价性，立即得到本系的 (1).

系的 (2) 和(3) 的 (i)、(ii) 以及(iii)的必要性部分显然由定理 2 可得.

今证：当 (3) 的 (iii) 满足时，V 必是酉算子. 事实上，如果 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 H 的完备就范直交系，由假设 $\{Ve_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 不仅是 H 的完备就范直交系，而且 $\{Ve_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\subset\mathscr{R}(V)$，从而

$$H=\overline{\mathrm{span}}\,\{Ve_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\subset\overline{\mathscr{R}(V)}.$$

另一方面，因为 V 满足(iii)，从定理 2 的 (6)⟹(1) 的证明可知对一切 $x\in H$，$\|Vx\|=\|x\|$. 再从 V 的保距性以及 H 的完备性，易知 $\mathscr{R}(V)$ 是闭的，即 $H=\overline{\mathscr{R}(V)}=\mathscr{R}(V)$. 这就是说，$V$ 是酉算子. 证毕.

3. L^2-Fourier 变换

分析数学中一个重要的酉算子就是 Hilbert 空间 $L^2(-\infty,\infty)$上的 Fourier 变换(在第二章中，我们曾介绍过 L^1-Fourier 变换).

定理 3　(Plancherel 定理)　对任何 $f\in L^2(-\infty,\infty)$，存在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中函数

$$(Uf)(x)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}{}^{[注]}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{ixy}f(y)dy, \qquad (5.25)$$

而且 $U: f\mapsto Uf$ 是 $L^2(-\infty,\infty)$ 中的酉算子，它的逆算子的形式是

$$(U^{-1}f)(x)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ixy}f(y)dy. \qquad (5.26)$$

证明　把有限区间的特征函数全体记为 A，A 中有限个函数

[注]　这里"(强) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}$"是指 $L^2(-\infty,\infty)$ 上的强收敛.

的线性组合全体就是 C_0 类，那末对 $f\in C_0$，记

$$(U_1f)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}f(y)dy,$$

$$(U_2f)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixy}f(y)dy.$$

当 $f=\chi_{(a,b)}$ 时，显然

$$(U_1f)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin bx-\sin ax}{x}+i\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\right)$$
$$\in L^2(-\infty,\ \infty),$$

$$(U_2f)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin bx-\sin ax}{x}-i\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\right)$$
$$\in L^2(-\infty,\ \infty),$$

所以对任何 $f\in C_0$，U_1f、U_2f 也都属于 $L^2(-\infty,\ \infty)$. 再利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx=\pi|\alpha|.$$

可以直接算出当 $f,\ g\in A$ 时，

$$\begin{aligned}&(U_1f,\ U_2g)=(f,\ g),\ (U_2f,\ U_2g)=(f,\ g),\\&(U_1f,\ g)=(f,\ U_2g),\end{aligned}\tag{5.27}$$

而 U_1, U_2 显然是线性的，因此 (5.27) 式对于 $f,\ g\in C_0$ 也是成立的.

因为 C_0 在 $L^2(-\infty,\ \infty)$ 中稠密，U_1、U_2 是 C_0 上的有界线性算子，因此，U_1、U_2 可以唯一地延拓成为 $L^2(-\infty,\ \infty)$ 上的线性算子，延拓之后的算子仍记为 U_1 及 U_2，由内积的连续性可知，(5.27)式对 $f,\ g\in L^2(-\infty,\ \infty)$ 成立. 由 U_1、U_2 的保范性即知 $U_1^*U_1=U_2^*U_2=I$，再由 $U_2=U_1^*$ 得到 $U_1U_1^*=I$，因此，由定理 2 術系，U_1 是酉算子，从而 $U_2=U_1^*=U_1^{-1}$ 也是酉算子.

现在再证 (5.25)、(5.26) 成立. 对 $\lambda>0$，令 $N_\lambda=\{f|f\in L^2(-\infty,\ \infty)$，当 $|x|>\lambda$ 时 $f(x)=0\}$. 那末当 $f\in N_\lambda$，并且 $\alpha>0$ 时，由 $U_1^*=U_2$ 和 $U_2\chi_{[0,\alpha]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{-ix}(e^{-i\alpha x}-1)$ 得到

$$\int_0^\alpha (U_1 f)(x)dx = (U_1 f,\ \chi_{[0,\alpha]}) = (f,\ U_2\chi_{[0,\alpha]})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{e^{i\alpha x}-1}{ix} f(x)dx.$$

两边对 α 求导数，得到当 $f\in N_\lambda$ 时，

$$(U_1 f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\alpha x} f(x)dx. \tag{5.28}$$

类似地，当 $f\in N_\lambda$ 时，

$$(U_2 f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-i\alpha x} f(x)dx. \tag{5.29}$$

对于 $f\in L^2(-\infty,\ \infty)$，因为 $f=$(强)$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\chi_{[-\lambda,\lambda]}f)$，由(5.28)及(5.29)，因为 U_1、U_2 是酉算子，易知(5.25)、(5.26)右边的强极限存在，再由 U_1、U_2 的连续性，就知道 $U=U_1$，$U^{-1}=U_2$. 证毕.

定义　设 $f\in L^2(-\infty,\ \infty)$，函数

$$\hat{f}(\alpha) = (\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\alpha x} f(x)dx$$

称为 f 的 L^2-Fourier 变换. 又称 U: $f\to\hat{f}$ 为 L^2-Fourier 变换. 类似地，函数

$$\check{f}(\alpha) = (\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-i\alpha x} f(x)dx$$

称为 f 的 L^2-Fourier 逆变换，也称 $f\mapsto\check{f}$ 为 L^2-Fourier 逆变换. 公式 $(\hat{f},\ \hat{g})=(f,\ g)$ 称为 Parseval 公式.

这里，L^2-Fourier 变换比第三章中的 L^1-Fourier 变换多一个常数因子 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，这是为了使 Parseval 公式成立，同时，也是为了使 Fourier 变换和逆变换之间具有对称性. 从泛函分析来看，其实这样才能使 Fourier 变换成为 $L^2(-\infty,\ \infty)$ 上的酉算子.

4. 正常(正规)算子

比自共轭算子、酉算子更一般的是正常算子.

定义　设 H 是 Hilbert 空间，N 是 H 上有界线性算子，如果

$$NN^* = N^*N, \tag{5.30}$$

那末称 N 是正常算子，又称为正规算子.

如果 A 是自共轭算子，U 是酉算子. 显然，它们都满足(5.30)的条件，因而自共轭算子、酉算子都是正常算子.

例 7 设 $H=L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu)$（见§1例2），$M(\omega)$是 Ω 上可测函数. H 上乘积算子

$$T_M: f(\omega)\mapsto M(\omega)f(\omega), \quad f\in H,$$

的共轭算子 $T_M^*=T_{\overline{M}}$（见§4习题2）. 显然，对任何 $f\in H$,

$$(T_M^*T_Mf)(\omega)=M(\omega)\overline{M(\omega)}f(\omega)=(T_MT_M^*f)(\omega),$$

即 T_M 是正常算子.

例 8 $H=L^2((-\infty, \infty)\times(-\infty, \infty), \mu\times\nu)$，其中 μ、ν 是 $(-\infty, \infty)$上勒贝格-斯蒂阶测度，H 上乘积算子是

$$T_z: f(z)\mapsto zf(z), \ z=x+iy, \ f\in H.$$

易知 T_z 是 H 上正常算子，并且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(T_z+T_z^*)&=\frac{1}{2}(T_z+T_{\bar{z}})=T_x,\\ \frac{1}{2i}(T_z-T_z^*)&=\frac{1}{2i}(T_z-T_{\bar{z}})=T_y,\end{aligned}\tag{5.31}$$

其中 T_x、T_y 分别是乘 x、乘 y 的算子.

定理 4 设 N 是复 Hilbert 空间上有界线性算子，那末 N 是正常算子的充要条件是 $\mathrm{Re}(N)$ 与 $\mathrm{Im}(N)$ 可交换，即

$$\frac{N+N^*}{2}\,\frac{N-N^*}{2i}=\frac{N-N^*}{2i}\,\frac{N+N^*}{2}.\tag{5.32}$$

这个定理留给读者证明.

5. 投影算子

在 Hilbert 空间 H 上可利用投影定理引入投影算子. 它在 Hilbert 空间算子理论中占有特别重要的地位. 对于 Hilbert 空间，投影定理可复述如下：设 L 是 Hilbert 空间的闭线性子空间，那末对任何 $x\in H$，必存在唯一的向量 $y\in L$, $z\perp L$，使得 $x=y+z$，称向量 y 是 x 在 L 上的投影. 下面引入投影算子.

定义 L 是 Hilbert 空间 H 中任意取定的一个闭子空间，作算子 P 如下：对 H 中元 x，令 Px 是 x 在 L 上的投影，这样定义

的算子 P 称做(由 H 到) L 上的直交投影算子，简称为投影算子.

有时为了标出 P 是在 L 上的投影算子，记 P 为 P_L.

例 9 现在考察 n 维 Hilbert 空间 E^n 中的投影算子. 设 L 是 E^n 的一个子空间，P_L 是 E^n 到 L 中的投影，设 e_1、…、e_m 为 L 中的一组就范直交系. 我们在 $L^\perp$ 中再任意补充 $n-m$ 个就范直交向量 e_{m+1}、…、e_n，使 e_1、…、e_n 为 E^n 中一组就范直交基. 考察算子 P_L. 因为

$$P_Le_i=\begin{cases}e_i, & \text{当 } i\leqslant m \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } i>m \text{ 时},\end{cases}$$

所以在基 e_1、…、e_n 之下，和算子 P_L 相应的矩阵 (α_{ij}) 为

$$\alpha_{ij}=(P_Le_j,\ e_i)=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq j \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } i=j,\ i>m \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } i=j,\ i\leqslant m \text{ 时},\end{cases}$$

因此 (α_{ij}) 形为

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 & 0 & \cdots & 0}^{m} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

例 10 设 H 为内积空间，e_1、…、e_n 为 H 中的就范直交系，$M=\mathrm{span}\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$ 所张成的子空间，则由 §3 的引理 1，

$$P_Mx=\sum_{\nu=1}^{n}(x,\ e_\nu)e_\nu.$$

定理 5 Hilbert 空间 H 上的投影算子有下面一系列的性质:

(1) 投影算子必定是线性有界算子，并且非零投影算子的范数是 1.

(2) 相应于闭线性子空间 L 的投影算子 P 把全空间 H 投影到

$$PH=\{x|x\in H,\ Px=x\}=L. \tag{5.33}$$

(3) $P|_{PH}=I$[注], $P|_{(PH)^{\perp}}=0.$ (5.34)

证明 (1) 设 P 是 Hilbert 空间 H 到闭线性子空间 L 上的投影算子. 当 $x_1, x_2\in H$ 时, 有 $x_1=Px_1+z_1$, $x_2=Px_2+z_2$, 这里 $z_1, z_2\perp L$. 这时, $\alpha x_1+\beta x_2=(\alpha Px_1+\beta Px_2)+(\alpha z_1+\beta z_2)$, 而且

$$\alpha Px_1+\beta Px_2\in L,\ \alpha z_1+\beta z_2\perp L,$$

所以

$$P(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Px_1+\beta Px_2,$$

可见 P 是个线性算子.另一方面,当 $x\in H$ 时, $x=Px+(x-Px)$, 而 $Px\perp(x-Px)$. 由于勾股定理

$$\|x\|^2=\|Px\|^2+\|x-Px\|^2,$$

所以

$$\|Px\|\leqslant\|x\|,\ x\in H, \tag{5.35}$$

因而 P 是个有界算子,而且 $\|P\|\leqslant1$.

如果 $L=\{0\}$, 那末 P 就是 O 算子, 这时 $\|P\|=0$. 如果 $L\neq\{0\}$, 那末存在非零 $x\in L$. 因为 $x=x+0$, 所以 $Px=x$, 从而 $\|P\|\geqslant1$. 但上面已证明过 $\|P\|\leqslant1$, 所以 $\|P\|=1$.

(2) 设 P 是相应于 L 的投影算子,显然

$$PH\subset L.$$

反之,对任何 $x\in L$, 因为 $Px=x$, 所以 $L\subset PH$, 即

$$PH=L.$$

今证 $PH=\{x|Px=x,\ x\in H\}$. 显然, $\{x|Px=x,\ x\in H\}\subset PH$. 反之, 因为任何 $y\in PH=L$ 都有 $Py=y$, 这就是说 $PH\subset\{x|Px=x,\ x\in H\}$, 因此(5.33)成立.

(3) 由(2)的等式 $PH=\{x|Px=x,\ x\in H\}$, 易知 $P|_{PH}=I$. 由等式 $PH=L$ 和投影的定义, 也易知 $P|_{(PH)^{\perp}}=P|_{L^{\perp}}=0$, 因此, (5.34)成立. 证毕.

对于任何闭线性子空间 L, Hilbert 空间 H 有如下分解:

[注] 显然,这里 I 是表示 PH 上恒等算子.

$$H=L\oplus L^{\perp}. \tag{5.36}$$

根据定理 5 的(3)，相应于 L 的投影算子 P 是一种很简单的算子，即 P 在 L 上是恒等算子，而 P 在 $L^{\perp}$ 是零算子，人们常常用这类投影算子的线性组合来逼近复杂的、一般的线性算子.

定理 6 设 P 是复 Hilbert 空间 H 的全空间上定义的线性算子，下列命题等价：

(1) P 是 H 上的投影算子.

(2) 对一切 $x\in H$,

$$\|Px\|^2=(Px,\ x). \tag{5.37}$$

(3) P 是定义在 H 上幂等(即 $P^2=P$)、自共轭的线性算子.

证明 (1)⇒(2) 对任何 $x\in H$, $x=Px+(I-P)x$, $(I-P)x\perp Px$, 所以

$$\begin{aligned}\|Px\|^2&=(Px,\ Px)=(Px,\ Px+(I-P)x)\\&=(Px,\ x),\quad x\in H.\end{aligned}$$

(2)⇒(3) 由(5.37)得到 $\|Px\|^2=(Px,\ x)\leqslant\|Px\|\|x\|$，因此，当 $Px\neq 0$ 时，

$$\|Px\|\leqslant\|x\|. \tag{5.38}$$

当 $Px=0$ 时，上式显然也成立，所以 P 是有界线性算子. 再由(5.37)，$(Px,\ x)$ 是实数，由极化恒等式，对一切 $x,\ y\in H$,

$$(Px,\ y)=(x,\ Py),$$

即 $P=P^*$，所以 P 是有界自共轭算子. 由(5.37)还得到

$$(P^2x,\ x)=(Px,\ Px)=(Px,\ x),$$

从而 $((P^2-P)x,\ x)=0$ 对一切 $X\in H$ 成立. 利用本节习题 1，立即得到 $P^2=P$.

(3)⇒(1) 由于 $\mathscr{D}(P)=H$, $P=P^*$，所以 P 是全空间 H 上定义的闭算子(见 § 4 定理 4 的 (i))，由闭图象定理，P 是有界线性算子. 由于 $P^2=P$，所以

$$P(I-P)=P-P^2=0. \tag{5.39}$$

对任何 $y\in PH$，存在 $x\in H$，使得 $Px=y$，因此

$$Py=P^2x=Px=y,$$

反之，如果 y 满足 $Py=y$，那末 $y\in PH$. 这就是说

$$PH=\{y\,|\,Py=y,\ y\in H\}. \tag{5.40}$$

因为 P 是有界算子，由上式可知 PH 是闭线性子空间. 今证 P 是相应于 $L=PH$ 的投影算子. 事实上，对任何 $x\in H$，显然

$$x=Px+(I-P)x.$$

$Px\in L$，而且对任何 $y\in H$，由于(5.39)，

$$(Pz,\ (I-P)x)=(z,\ P(I-P)x)=0,\quad z\in H, \tag{5.41}$$

即 $(I-P)x\perp L$. 这就是说，Px 是 x 在 L 上的投影，从而 P 是相应于 L 的投影算子. 证毕.

注意，在实 Hilbert 空间中，定理 6 的(1)、(3)仍等价(下面的讨论中要用到这个事实).

6. 投影算子的运算

下面我们研究投影算子间的运算.

定理 7 设 P_L 和 P_M 是 Hilbert 空间 H 上两个投影算子，那末

(1) $L\perp M$ 的充要条件是 $P_LP_M=0$;

(2) P_L+P_M 是投影算子的充要条件是 $P_LP_M=0$. 当 $P_LP_M=0$ 时，$P_L+P_M=P_{L\oplus M}$.

证明 (1) 必要性 如果 $L\perp M$，那末对任何 $x\in H$，$P_Mx\in M$，因此 $P_Mx\perp L$，从而 $P_L(P_Mx)=0$，这就是 $P_LP_M=0$.

充分性 如果 $P_LP_M=0$，那末对任何 $x\in M$，

$$P_Lx=P_LP_Mx=0,$$

所以 $x\perp L$，也就是说，M 中任何元都与 L 直交，这就说明 $L\perp M$.

(2) 必要性 如果 P_L+P_M 是投影算子，那末它是幂等的，即

$$\begin{aligned}P_L+P_M&=(P_L+P_M)^2=P_L^2+P_LP_M+P_MP_L+P_M^2\\&=P_L+P_LP_M+P_MP_L+P_M,\end{aligned}$$

即

$$P_LP_M+P_MP_L=0. \tag{5.42}$$

分别对上式左、右乘上 P_L，得到

$$P_LP_M+P_LP_MP_L=0,\ P_LP_MP_L+P_MP_L=0,$$

所以 $P_LP_M=P_MP_L$. 再利用(5.42)式就得到 $P_LP_M=0$.

充分性 P_L+P_M 显然是有界自共轭算子. 如果 $P_LP_M=0$, 那末 $P_MP_L=(P_LP_M)^*=0$. 利用这一点, 经直接计算容易得到 $(P_L+P_M)^2=P_L+P_M$. 由定理 6 的 (3), 即知 P_L+P_M 是投影算子.

最后, 我们还要证明当 P_L+P_M 是投影算子时, $P_L+P_M=P_{L\oplus M}$.

由(1), 这时 $L\perp M$, 故 $L\oplus M$ 的写法是合理的.

对于 $x\in L$, 必有 $x\perp M$, 所以 $(P_L+P_M)x=P_Lx+P_Mx=x$. 同样, 对于 $y\in M$, 必有 $(P_L+P_M)y=y$. 可见对于 $L\oplus M$ 中的向量, 经 P_L+P_M 作用后仍为自身. 而对于 $z\perp L\oplus M$, 因为 $z\perp L$, $z\perp M$, 所以

$$(P_L+P_M)z=P_Lz+P_Mz=0.$$

对每个 $x\in H$, 有唯一分解 $x=P_{L\oplus M}x+z$, $z\perp L\oplus M$. 由于 $P_{L\oplus M}x\in L\oplus M$, 所以 $(P_L+P_M)x=P_{L\oplus M}x$, 即 $P_L+P_M=P_{L\oplus M}$. 证毕.

定义 如果两个投影算子 P、Q 满足 $PQ=0$, 就称 P 和 Q 是直交, 记为 $P\perp Q$.

上面定理 7 的意思就是: 两个投影算子直交的充要条件是它们的投影子空间是直交的; 两个投影算子的和是投影算子的充要条件是它们直交, 且这时它们的和就是投影子空间的直交和上的投影算子.

定理 7 可以推广成: 有限个两两直交的投影算子之和仍是投影算子. 下面将它推广到一列投影算子的情况.

定理 8 设 $P_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是 Hilbert 空间 H 中一列两两直交的投影算子, 那末必有投影算子 P, 使得对任何 $x\in H$, 有

$$Px=\sum_{i=1}^{\infty}P_ix. \tag{5.43}$$

证明 首先要说明(5.43)式的右端是有意义的.

记 $Q_n=\sum_{i=1}^{n}P_i$. 由上所述, $Q_n(n=1, 2, \cdots)$ 是投影算子,对于任何 $x\in H$,

$$\|x\|^2\geqslant\|Q_nx\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{n}P_ix\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|P_ix\|^2, \qquad (5.44)$$

因此, 级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\|P_ix\|^2$ 收敛,所以 $\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=m}^{n}\|P_ix\|^2=0$. 又由勾股定理,

$$\|Q_nx-Q_mx\|^2=\left\|\sum_{i=m+1}^{n}P_ix\right\|^2=\sum_{i=m+1}^{n}\|P_ix\|^2\to 0, \quad (n,\ m\to\infty),$$

由此, $\{Q_nx\}$ 是基本点列, 因而必定收敛于一个向量. 对于每个 $x\in H$, 我们把 $\lim_{n\to\infty}Q_nx=\sum_{i=1}^{\infty}P_ix$ 记作为 Px, 这样就作出了一个算子 P.

容易看出,这样作出的算子 P 是线性的,而且

$$\|Px\|=\lim_{n\to\infty}\|Q_nx\|\leqslant\|x\|,$$

即 P 是个有界线性算子. 还要证明的就是 P 确实是一个投影算子.

由(5.43)和 $Q_n^*=Q_n$, $Q_n^2=Q_n(n=1, 2, \cdots)$, 对任何 x、$y\in H$,

$$(Px,\ y)=\lim_{n\to\infty}(Q_nx,\ y)=\lim_{n\to\infty}(x,\ Q_ny)=(x,\ Py),$$

$$P^2x=\lim_{n\to\infty}PQ_nx=\lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{m>n\\ m\to\infty}}Q_mQ_nx$$

$$=\lim_{n\to\infty}Q_n^2x\text{[注]}=\lim_{n\to\infty}Q_nx=Px,$$

即 P 是幂等、自共轭算子,从而 P 是 H 上投影算子. 证毕.

定理 8 中的算子也可记为 $\sum_{i=1}^{\infty}P_i$,这个级数和是指部分和算子序列 $\left\{\sum_{i=1}^{n}P_i\,\middle|\,n=1,\ 2,\ \cdots\right\}$ 的强收敛的极限. P 的投影子空间是怎样的子空间呢? 为回答这个问题,先引入一个定义.

定义 设 $\{L_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中一列两两互相直交的闭

[注] 等式 $Q_mQ_nx=Q_n^2x(m>n)$ 的获得是利用了 $P_iP_j=0(i\neq j)$.

线性子空间. 作

$$L=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}x_i \,\middle|\, x_i\in L_i(i=1,\ 2,\ \cdots),\ \sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2<\infty\right\},\qquad(5.45)$$

称 L 为 $\{L_n\}$ 的直交和, 记为 $L=\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}L_i$.

显然, L 是 H 的闭子空间.

系　设 $\{L_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中一列两两直交的闭线性子空间, 那末 $P_{\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}L_i}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_{L_i}$(上式右边的级数是指算子的强收敛).

证明　由定理 8, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_{L_i}$ 确是投影算子, 把它记为 P. 当 $x\in H$ 时, 由于(5.43)式,

$$\|Px\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|P_{L_i}x\|^2,\quad P_{L_i}x\in L_i,$$

所以 $Px\in L=\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}L_i$. 因此, $\{x\,|\,Px=x\}\subset L$. 反之, 对于 $x\in L$, 记 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$, 其中 $x_i\in L_i$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2<\infty$. 由 $\{L_n\}$ 的相互直交性, 我们有

$$P_{L_k}x_n=\begin{cases}x_n, & 当\ k=n\ 时,\\ 0, & 当\ k\neq n\ 时,\end{cases}$$

所以 $P_{L_k}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_{L_k}x_n=x_k$, 因此, $Px=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_{L_k}x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k=x$. 这就说明 P 是在 L 上的投影算子. 证毕.

注意, 直交和的定义以及上面的定理 8 及系的成立, 都并不只限于 $\{L_n\}$ 是一列闭线性子空间 (即可以是不可列个) 的情况. 读者可相仿地引入定义, 并加以证明.

现在我们讨论什么时候两个投影算子的乘积仍是投影算子的问题.

定理 9　设 P_L、P_M 是 Hilbert 空间 H 上两个投影算子, 那末 P_LP_M 成为投影算子的充要条件是 $P_LP_M=P_MP_L$. 而且当 P_LP_M 是投影算子时, $P_LP_M=P_{L\cap M}$.

证明　必要性　如果 P_LP_M 是投影算子, 那末它是自共轭算

子，所以 $P_MP_L=P_M^*P_L^*=(P_LP_M)^*=P_LP_M$.

充分性 如果 $P_LP_M=P_MP_L$，那末

$$(P_LP_M)^*=(P_MP_L)^*=P_L^*P_M^*=P_LP_M,$$

$$(P_LP_M)^2=P_LP_MP_LP_M=P_LP_LP_MP_M=P_L^2P_M^2=P_LP_M,$$

这两个式子说明 P_LP_M 是幂等的自共轭算子. 由定理 6 的(3)，P_LP_M 是投影算子.

最后，当 P_LP_M 是投影算子时，如果 $x\in L\cap M$，那末

$$P_LP_Mx=P_Lx=x.$$

反过来，如果向量 x 使 $x=P_LP_Mx$，那末 $x\in L$，又因 $x=P_MP_Lx$，所以 $x\in M$，因此，$x\in L\cap M$. 由投影算子的定理 5，P_LP_M 是相应于 $L\cap M$ 的投影算子. 证毕.

定义 设 A 及 B 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，如果对任何 $x\in H$ 都成立不等式

$$((B-A)x,\ x)\geqslant 0,$$

就说 A 小于或等于 B(也可以说 B 大于或等于 A)，记为

$$A\leqslant B \quad 或 \quad B\geqslant A$$

(这是算子集中常用的一种序关系).

定理 10 设 P_L 和 P_M 是 Hilbert 空间 H 中两个投影算子，那末下列命题是彼此等价的：

(1) $P_L\geqslant P_M$.

(2) $\|P_Lx\|\geqslant\|P_Mx\|$ 对任何 $x\in H$ 成立.

(3) $L\supset M$.

(4) $P_LP_M=P_M$.

(5) $P_MP_L=P_M$.

证明 (1)⇒(2) 由 $P_L\geqslant P_M$，对任何 $x\in H$

$$\|P_Lx\|^2=(P_Lx,\ P_Lx)=(P_Lx,\ x)\geqslant(P_Mx,\ x)=\|P_Mx\|^2.$$

(2)⇒(3) 当 $x\in M$ 时，由 $\|P_Lx\|\geqslant\|P_Mx\|$，有

$$\|P_Lx\|^2\geqslant\|P_Mx\|^2=\|x\|^2=\|x-P_Lx\|^2+\|P_Lx\|^2,$$

所以 $\|x-P_Lx\|=0$，即 $x=P_Lx$，因此 $x\in L$. 这样就得到 $M\subset L$.

(3)⇒(4) 由 $M\subset L$，对任何 $x\in H$，$P_Mx\in M\subset L$，所以

$$P_L(P_Mx)=P_Mx,$$

因此，$P_LP_M=P_M$.

(4)⟹(5) 当(4)成立时，P_LP_M 是投影算子，由定理 9，

$$P_MP_L=P_LP_M=P_M.$$

(5)⟹(1) 当 $P_MP_L=P_M$ 时，对于 $x\in H$，有

$$(P_Mx, x)=\|P_Mx\|^2=\|P_MP_Lx\|^2\leqslant\|P_M\|\|P_Lx\|^2$$
$$\leqslant\|P_Lx\|^2=(P_Lx, x),$$

这就是 $P_M\leqslant P_L$. 证毕.

定义 设 L、M 是 Hilbert 空间 H 的两个闭线性子空间，而且 $L\supset M$，L 中与 M 直交的向量全体称为 M 在 L 中的直交补，记为 $L\ominus M$.

显然，$\qquad L\ominus M=\{x|x\in L \text{ 且 } x\perp M\}=L\cap M^{\perp}$.

定理 11 设 P_L、P_M 是 Hilbert 空间 H 上两个投影算子，那末 P_L-P_M 是投影算子的充要条件是 $L\supset M$. 当 P_L-P_M 是投影算子时，$P_L-P_M=P_{L\ominus M}$.

证明 必要性 如果 P_L-P_M 是投影算子，由于 P_L-P_M 与 P_M 之和，即 P_L，是投影算子，由定理 7，$(P_L-P_M)P_M=0$. 由此，$P_LP_M=P_M$. 再由定理 10 即得 $L\supset M$.

充分性 如果 $L\supset M$，由定理 10，$P_LP_M=P_MP_L=P_M$，所以

$$(P_L-P_M)^2=P_L^2-P_LP_M-P_MP_L+P_M^2$$
$$=P_L-P_M-P_M+P_M=P_L-P_M,$$

因此，P_L-P_M 是幂等的. 而 P_L-P_M 的自共轭性是显然的，根据定理 6 的 (3)，P_L-P_M 是投影算子.

最后，如果 P_L-P_M 是投影算子，记它的投影子空间为 L_1，即 $P_L-P_M=P_{L_1}$，因而 $P_{L_1}+P_M=P_L$. 由定理 7 的(2)，$L_1\oplus M=L$. 这表明 L_1 是 L 中与 M 直交的元全体，即 $L_1=L\ominus M$. 证毕.

系 设 P_L、P_M 是 Hilbert 空间 H 上两个投影算子，那末

(1) $I-P_L$ 是投影算子，并且 $I-P_L=P_{L^\perp}$.

(2) 如果 $P_LP_M=P_MP_L$，那末 $P_L+P_M-P_LP_M$ 是投影算子，并且

$$P_L+P_M-P_LP_M=P_{\overline{\mathrm{span}(M,L)}}.$$

(3) P_LP_M 是投影算子的充要条件是

$$(L\ominus(L\cap M))\perp(M\ominus(L\cap M)).$$

本系的证明留给读者作为练习.

例 11 我们考察 Hilbert 空间 $L^2(\Omega,\ \boldsymbol{R},\ \mu)$ (见§1 例 2). 设 $E\in\boldsymbol{R}$, $\chi_E(x)$ 是可测集 E 上的特征函数, $P(E)$ 表示定义在 $L^2(\Omega,\ \boldsymbol{R},\ \mu)$ 上的如下的算子:

$$P(E)f=\chi_E(x)f(x),\ (f\in L^2(\Omega,\ \boldsymbol{R},\ \mu)).$$

容易验证 $P(E)$ 是 $L^2(\Omega,\ \boldsymbol{R},\ \mu)$ 的投影算子. 对于这种形式的投影算子, $P(E)P(F)=0$ 相当于 $E\cap F$ 是 μ-零集; 当 $E\cap F$ 是 μ-零集时, $P(E)+P(F)=P(E\cup F)$; $P(E)$ 与 $P(F)$ 总是可交换的, 且 $P(E)P(F)=P(E\cap F)$; $P(E)\geqslant P(F)$ 相当于 $F-E$ 是 μ-零集, 这时 $P(E)-P(F)=P(E-F)$; 如果 $E_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$是有限个或可列个两两互不相交的$(\Omega,\ \boldsymbol{R})$可测集, 那末

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right).$$

上面这些都是可以直接验证的.

7. 不变子空间与投影算子

现在我们来考察对应于算子的不变子空间的投影算子.

定义 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, M 是 H 的闭线性子空间, 如果 $AM\subset M$, 称 M 是 A 的不变子空间, 如果 M 和 $M^\perp=H\ominus M$ 都是 A 的不变子空间, 就称 M 是 A 的约化子空间, 或简称 M 约化 A.

定理 12 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, M 是 H 中的闭线性子空间, 那末

(1) M 是 A 的不变子空间的充要条件是 $AP_M=P_MAP_M$.

(2) M 是 A 的约化子空间的充要条件是 P_M 与 A 可交换.

(3) M 约化 A 的充要条件是 M 为 A 与 A^* 的公共不变子空间. 特别, 当 $A=A^*$ 时, A 的不变子空间必是约化子空间.

证明 (1) 必要性 如果 M 是一个不变子空间, 那么当 $x\in$

M 时 $Ax\in M$. 由于对任何 $x\in H$, $P_Mx\in M$, 所以 $AP_Mx\in M$, 因此

$$P_M(AP_Mx)=AP_Mx, \tag{5.46}$$

这等式就说明 $P_MAP_M=AP_M$.

反之，如果 $P_MAP_M=AP_M$, 那末对任何 $x\in M$, 由

$$P_MAP_Mx=AP_Mx,$$

得到 $P_MAx=Ax$, 所以 $Ax\in M$, 即 M 是 A 的不变子空间.

(2) 由于 (1), M 是 A 的约化子空间的充要条件是下面两个等式同时成立:

$$P_MAP_M=AP_M, \tag{5.47}$$

$$(I-P_M)A(I-P_M)=A(I-P_M). \tag{5.48}$$

假设 M 约化 A, 利用(5.47)计算(5.48), 立即得到

$$P_MA=AP_M. \tag{5.49}$$

反之，如果(5.49)成立，那末利用 $P_M^2=P_M$, 立即由 (5.49) 可以得到(5.47). 再从(5.49)、(5.47)又可推得(5.48), 即 M, $M^\perp$ 必都是 A 的不变子空间.

(3) M 是 A、A^* 的不变子空间的充要条件是

$$P_MAP_M=AP_M,\ P_MA^*P_M=A^*P_M. \tag{5.50}$$

对第二式取*, 就得到 $P_MAP_M=P_MA$, 由此可知 (5.50) 成立的充要条件是 $AP_M=P_MA$. 由 (2) 立即得到 M 约化 A 的充要条件是(5.50)成立. 证毕.

例 12 设 H 是 Hilbert 空间, A 是 H 上有界线性算子, 如果 M 是 H 的闭线性子空间, 那末空间 H 有直交分解 $H=M\oplus M^\perp$. 因此, 对每个算子 A 可作四个算子 $A_{11}=P_MAP_M$, $A_{12}=P_MAP_{M^\perp}$, $A_{21}=P_{M^\perp}AP_M$, $A_{22}=P_{M^\perp}BP_{M^\perp}$. 换言之, 在空间分解 $H=M\oplus M^\perp$ 下, A 总可以表示成 2×2 的算子值的矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}M\\ M^\perp\end{matrix} \tag{5.51}$$

由此可见, M 是 A 的不变子空间的充要条件是 $A_{21}=P_{M^\perp}AP_M=0$, 即

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}M\\ M^{\perp}\end{matrix} \tag{5.52}$$

而 M 是 A 的约化子空间的充要条件是 $A_{21}=0$, $A_{12}=0$, 即

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}M\\ M^{\perp}\end{matrix} \tag{5.53}$$

而且

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}^* & 0\\ 0 & A_{22}^*\end{pmatrix}\begin{matrix}M\\ M^{\perp}\end{matrix} \tag{5.54}$$

$A_{11}^*=P_MA^*P_M$, $A_{22}^*=P_{M^\perp}A^*P_{M^\perp}$.

显然,如果 M 约化 A,那末 A 为正则算子的充要条件是 A_{11}、A_{22} 分别是 M、$M^{\perp}$ 上的正则算子,并且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1} & 0\\ 0 & A_{22}^{-1}\end{pmatrix}\begin{matrix}M\\ M^{\perp}\end{matrix} \tag{5.55}$$

由此可见,"约化"就是把"大算子"A 分解成两个(互不影响)的"小算子" A_{11} 和 A_{22}.

8. 对称算子和(无界)自共轭算子

很多微分算子(一般是无界的线性算子)属于某些 Hilbert 空间上的所谓对称算子,本节对它将作一初步的讨论. 学习本小节时,应先看§4的第四小节.

定义 内积空间 H 上的稠定线性算子 A,如果有 $A\subset A^*$,就称 A 是对称的,而当 $A=A^*$ 时,就称 A 是自共轭的或自伴的.

显然,自共轭算子必是对称算子,但对称算子不一定是自共轭的. 例如§4的例3中的算子 $A=i\dfrac{d}{dt}$,由于 $\mathscr{D}(A^*)\supset\mathscr{D}\supset\mathscr{D}(A)$,并且当 $f\in\mathscr{D}$ 时, $Af=A^*f=if'$, 所以 A 是对称算子. 但是, $\mathscr{D}(A^*)\neq\mathscr{D}$, 所以 A 并不是自共轭算子. 如果把 $i\dfrac{d}{dt}$ 视为定义在 $\mathscr{D}_0$(见§4例3末)上,那末它才是自共轭算子. 当 A 是全空间定义的有界线性算子时, 这里的自共轭算子概念是与本节第1小节的相一致.

对于无界的对称算子和自共轭算子, 也具有有界自共轭算子

的定理1及系1中相似的结论。

定理13　设 A 是复 Hilbert 空间 H 上的稠定算子.

(1) A 为对称算子的充要条件是对一切 $x\in H$, (Ax, x) 是实数。

(2) 如果 λ 是对称算子 A 的特征值,那末 λ 必是实数.

(3) 设 λ、μ 是对称算子 A 的不同的特征值, x、y 分别是相应于 λ、μ 的特征向量,那末 $x\perp y$.

(4) A 是对称算子,对任何复数 $\lambda=\sigma+i\tau(\tau\neq 0)$, $A-\lambda I$ 必是单射,并且 $\mathscr{R}(A-\lambda I)$ 是闭线性子空间. 当视 $A-\lambda I$ 是 $\mathscr{D}(A)$ 到 $\mathscr{R}(A-\lambda I)$ 的算子时,

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\tau}, \tag{5.56}$$

特别,当 A 是自共轭算子时, $A-\lambda I$ 是正则算子.

(5) 全空间 H 上定义的对称算子,必是有界自共轭算子.

(6) 假设 A 是 H 上自共轭算子, B 是 H 上对称算子. 如果 $A\subset B$, 则 $A=B$(即自共轭算子不能有对称的真延拓).

证明　(1)～(4)的证明完全仿定理1以及它的系1.

(5) 当 A 是对称算子,并且 $\mathscr{D}(A)=H$ 时,显然 $\mathscr{D}(A^*)=\mathscr{D}(A)=H$,并且对一切 $x\in H$, $Ax=A^*x$, 即是全空间定义的自共轭算子. 但对任何稠定算子 A, A^* 是闭算子,因而 A 是全空间定义的闭线性算子. 由闭图象定理, A 是有界的.

(6) 因为一般地有:当 $A\subset B$ 时, $B^*\subset A^*$. 由于 $A=A^*$, $B\subset B^*$, 所以

$$B^*\subset A^*=A\subset B\subset B^*, \tag{5.57}$$

从而 $A=B$. 证毕.

复 Hilbert 空间 H 上自共轭算子具有很好的性质(参见谱论中谱分解一节).在量子物理学中,一切物理量都是用某个 Hilbert 空间(物理上称为态矢量空间)的自共轭算子来表示. 对称算子形式上似乎与自共轭算子差别不大(仅在于 $\mathscr{D}(A^*)\supset\mathscr{D}(A)$ 而不是 $\mathscr{D}(A^*)=\mathscr{D}(A)$), 但从谱论观点来看,很多地方是有根本差别的,

这两者不应混淆.

定理 14 设 $\{H_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 上一列两两直交的闭线性子空间, 并且 $H=\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}H_n$. 又设 $\{A_n\}$ 是一列有界线性算子, A_n 仅是 H_n 到 H_n 的自共轭算子[注].

$$\mathscr{D}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}x_n \,\middle|\, x_n\in H_n(n=1,\ 2,\ \cdots),\right. \left.\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty \quad 并且 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\|A_nx_n\|^2<\infty\right\}, \tag{5.58}$$

作 $\mathscr{D}\to H$ 的算子

$$A:\ \sum_{n=1}^{\infty}x_n\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}A_nx_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathscr{D}, \tag{5.59}$$

那末 A 是 H 上自共轭算子.

证明 显然, $\overline{\mathscr{D}}=H$, 并且 A 是线性算子, 从而 A 是 H 上稠定线性算子. 对任何 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathscr{D}$, $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n\in\mathscr{D}$, 由于 $H_n\perp H_m$ $(n\neq m)$,

$$\begin{aligned}(Ax,\ y)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_nx_n,\ y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_nx_n,\ y_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,\ Ay_n)=(x,\ Ay),\end{aligned} \tag{5.60}$$

所以 $A\subset A^*$, 因此只要证明 $\mathscr{D}(A^*)\subset\mathscr{D}$ 即可.

今证明 $\mathscr{D}(A^*)\subset\mathscr{D}$. 设 $y\in\mathscr{D}(A^*)$, 令 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ (其中 y_n 是 y 在 H_n 上投影), $x_N=\sum\limits_{n=1}^{N}A_ny_n$, 显然 $x_N\in\mathscr{D}$, 因此

$$(Ax_N,\ y)=(x_N,\ A^*y).$$

但是, 当 $n>N$ 时, $A_ny_n\perp x_N$, 所以

$$\begin{aligned}(Ax_N,\ y)&=\left(\sum_{\nu=1}^{N}A_\nu^2y_\nu,\ y\right)=\left(\sum_{\nu=1}^{N}A_\nu^2y_\nu,\ \sum_{\nu=1}^{N}y_\nu\right)\\&=\sum_{\nu=1}^{N}\|A_\nu y_\nu\|^2=\|x_N\|^2.\end{aligned}$$

[注] 如果补充规定在 $H_n^{\perp}$ 上, $A_n=0$, 那末 A_n 可视为 H 上有界自共轭算子.

由 Schwarz 不等式，$\|x_N\|^2=(x_N, A^*y)\leqslant\|x_N\|\|A^*y\|$，所以 $\|x_N\|\leqslant\|A^*y\|$. 因此，$\sum_{n=1}^{N}\|A_ny_n\|^2\leqslant\|A^*y\|^2$，令 $N\to\infty$，即得 $y\in\mathscr{D}$. 证毕.

如果定理 14 中的 A 用“无限维”矩阵表示，那末

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & A_n & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \\ \vdots \end{matrix} \tag{5.61}$$

即A在非对角线上全是零算子. 定理 14 表示在一列互相直交的子空间上的有界自共轭算子可以拼成全空间的自共轭算子，它的定义域 $\mathscr{D}$(见(5.58))，它可能是无界的. 读者容易证明: A 是 H 上全空间定义的有界自共轭算子的充要条件是 A_n 不仅是 H_n 上有界自共轭算子，而且 $\{\|A_n\|\}$ 是有界数列.

由定理 14 所定义的算子 A 常记为 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}A_n$.

利用定理 14，可以得到下面重要的自共轭算子的例(此例也可直接证明).

例 13 $H=L^2((-\infty, \infty), \mu)$，$\mu$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格–斯蒂阶测度，$\varphi(t)$ 是$(-\infty, \infty)$上任何一个实可测函数，取

$$\mathscr{D}=\left\{f \mid f\in H, \quad \text{并且} \quad \int|\varphi(t)f(t)|^2d\mu<\infty\right\},$$

H 上以 $\mathscr{D}$ 为定义域的乘 φ 算子为

$$A_\varphi: f(t)\mapsto\varphi(t)f(t), \quad f\in\mathscr{D},$$

A_φ 便是 H 上自共轭算子. 特别，当 $\varphi(t)=t$(即 $L^2((-\infty, \infty), \mu)$ 上乘自变量的算子)时，A_t 是自共轭算子.

事实上，记 $E_n=\{t \mid n<\varphi(t)\leqslant n+1\}$，$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$，令 $H_n=L^2(E_n, \mu)$. 容易证明，$A_n=A_\varphi|_{H_n}$ 是 H_n 上有界自共轭算子(并且 $\|A_n\|\leqslant\max(|n+1|, |n|)$). 由定理 14 便知 $H=\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}H_n$,

$A_\varphi = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$, $A_\varphi = A_\varphi^*$.

定理 15 设 H 是 Hilbert 空间.

(1) 如果 A 是 H 上自共轭算子, 并且 A 是单射, 那末 A^{-1} 必是 H 上自共轭算子.

(2) 如果 A 是稠定闭算子, 那末 A^*A, AA^* 都是 H 上自共轭算子.

证明 这两个性质可用图象方法证明(并参见 §4 定理 4 的 (vi) 的证明).

(1) 和 §4 定理 3 的(6)一样证明, 对无界算子也有 $\mathscr{R}(A) = \mathscr{N}(A^*)^\perp$ (参见 §4 的习题 10), 所以当 A 是单射且自共轭时, $\overline{\mathscr{R}(A)} = H$, 即 A^{-1} 是 H 上稠定算子, 因而 A^{-1*} 存在. 在 $H\times H$ 上引入

$$W: \{x, y\} \to \{y, x\},$$

显然, W 是 Hilbert 空间 $H\times H$ 上酉算子, 并且

$$G(A^{-1}) = WG(A). \tag{5.62}$$

由 §4 的(4.12), 注意到 $VW\{x, y\} = \{-x, y\}$, 有

$$\begin{aligned} G(A^{-1*}) &= (VG(A^{-1}))^\perp = (VWG(A))^\perp \\ &= G(-A)^\perp, \end{aligned} \tag{5.63}$$

而 $\{y, z\} \in G(-A)^\perp$ 的充要条件是

$$(x, y) - (Ax, z) = 0, \tag{5.64}$$

即 $z \in \mathscr{D}(A^*) = \mathscr{D}(A)$, $y = A^*z = Az$, 即

$$G(A^{-1*}) = G(A^{-1}),$$

从而 $A^{-1*} = A^{-1}$.

(2) 对任何稠定算子 A,

$$G(A^*) = (VG(A))^\perp, \text{ 或者 } \quad G(A^*)^\perp = \overline{VG(A)}.$$

但因为 A 是闭算子, 所以 $\overline{G(A)} = G(A)$, 从而 $VG(A)$ 也是闭集, 并且

$$H\times H = G(A^*) \oplus VG(A). \tag{5.65}$$

根据上式, 对任何 $\{h, 0\}$ $(h\in H)$, 必有唯一的 $x \in \mathscr{D}(A)$, $y \in$

$\mathscr{D}(A^*)$，使得

$$\{h,\ 0\}=\{y,\ A^*y\}+\{-Ax,\ x\},\tag{5.66}$$

即

$$h=y-Ax,\quad A^*y+x=0.\tag{5.67}$$

解(5.67)，立即得到

$$h=(I+AA^*)y,\tag{5.68}$$

这说明适合(5.66)的$y\in\mathscr{D}(AA^*)$，并且$\mathscr{R}(I+AA^*)=H$. 显然，$I+AA^*$是$\mathscr{D}(AA^*)$到H的双射，并且$(I+AA^*)^{-1}$是有界线性算子($\|(I+AA^*)^{-1}\|\leqslant 1$).

今证$(I+AA^*)^{-1}$是自共轭算子. 事实上，对任何$h_1,\ h_2\in H$，必有$y_1,\ y_2\in\mathscr{D}(AA^*)$，使得

$$h_i=(I+AA^*)y_i,\quad i=1,\ 2,$$

因而

$$\begin{aligned}((I+AA^*)^{-1}h_1,\ h_2)&=(y_1,\ (I+AA^*)y_2)\\&=((I+AA^*)y_1,\ y_2)=(h_1,\ (I+AA^*)^{-1}h_2),\end{aligned}$$

此即说明$(I+AA^*)^{-1}$是自共轭算子.

由(1)，$(I+AA^*)$是H上自共轭算子，再根据§4定理4的(3)，$AA^*=(I+AA^*)-I$也是自共轭算子.

同样，用$\{0,\ h\}$代替$\{h,\ 0\}$，类似可证A^*A也是H上自共轭算子. 证毕.

9. Cayley 变换

熟知分式线性变换$z=\dfrac{\lambda+i}{\lambda-i}$将实轴变成单位圆周，而它的逆变换$\lambda=i\dfrac{z+1}{z-1}$将单位圆周变成实轴. 在$n$维复欧几里德空间上，自共轭算子$A$和不以1为特征值的酉算子之间，通过下列Cayley变换

$$U=(A+iI)(A-iI)^{-1},\ A=i(U+I)(U-I)^{-1}\tag{5.69}$$

联系起来. 这样，研究自共轭算子等价于研究不以1为特征值的酉算子.

对于一般的复Hilbert空间，也可推广上述结果，类似的变换也成为研究有关算子的工具. 当然，由于空间维数可能是无限的，

情况要复杂一些.

定理16 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上的对称算子，那末

(1) $(A\pm iI)$是 $\mathscr{D}(A)$ 到 $\mathscr{R}(A\pm iI)$ 的可逆算子，并且 $\|(A\pm iI)^{-1}\|\leqslant 1$;

(2) 算子

$$U_A=(A+iI)(A-iI)^{-1} \tag{5.70}$$

是 H 上部分保距算子，$\mathscr{D}(U_A)=\mathscr{R}(A-iI)$，$\mathscr{R}(U_A)=\mathscr{R}(A+iI)$，$\mathscr{D}(A)=\mathscr{R}(U_A-I)$，而且 1 不是 U_A 的特征值;

(3) 如果 A 还是闭的，则 $\mathscr{D}(U_A)$ 是闭线性子空间.

(4) 如果 A 是自共轭的，那末 U_A 是酉算子.

证明 (1) 对任何 $x\in\mathscr{D}(A)$，因为(Ax, x)是实数，所以

$$\|(A\pm iI)x\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2,\ x\in\mathscr{D}(A), \tag{5.71}$$

由此可知，$A\pm iI$ 都是单射. 如令 $y=(A\pm iI)x$，那末由 (5.71) 得到

$$\|(A\pm iI)^{-1}y\|^2=\|x\|^2\leqslant\|y\|^2, \tag{5.72}$$

即 $\|(A\pm iI)^{-1}\|\leqslant 1$.

(2) 对任何 $x\in\mathscr{D}(A)$，记 $y=(A-iI)x$，由(5.71)可知

$$\begin{aligned}\|y\|^2&=\|(A-iI)x\|^2=\|Ax\|^2+\|x\|^2\\&=\|(A+iI)x\|^2=\|(A+iI)(A-iI)^{-1}y\|^2.\end{aligned}$$

显然，$(A-iI)^{-1}$、$(A+iI)$ 分别是 $\mathscr{R}(A-iI)$ 到 $\mathscr{D}(A)$，$\mathscr{D}(A)$到 $\mathscr{R}(A+iI)$的双射，再由上式可知 U_A 是 $\mathscr{R}(A-iI)$ 到 $\mathscr{R}(A+iI)$ 上的保距算子.

反解(5.70)式，可以得到

$$\begin{cases}U_A=[(A-iI)+2iI](A-iI)^{-1}=I+2i(A-iI)^{-1},\\U_A=[2A-(A-iI)](A-iI)^{-1}=-I+2A(A-iI)^{-1},\end{cases}$$

从而

$$\begin{cases}U_A-I=2i(A-iI)^{-1}, & (5.73)\\U_A+I=2A(A-iI)^{-1}. & (5.74)\end{cases}$$

(5.73)说明 1 不是 U_A 的特征值. 并且 $\mathscr{D}(U_A)=\mathscr{R}(A-iI)$.

(3) 设 A 是闭的，今证 $\mathscr{D}(U_A)$ 是闭集. 设 $\{y_n\}$ 是 $\mathscr{D}(U_A)=\mathscr{R}(A-iI)$ 中基本点列，令 $x_n\in\mathscr{D}(A)$, $y_n=(A-iI)x_n(n=1,2,\cdots)$. 由(5.71)可知 $\{x_n\}$ 必是 $\mathscr{D}(A)$中基本点列，因为 A 是闭的，所以 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in\mathscr{D}(A)$, 并且

$$(A-iI)x_0=\lim_{n\to\infty}(A-iI)x_n=\lim_{n\to\infty}y_n,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\in\mathscr{R}(A-iI)$, 从而 $\mathscr{R}(A-iI)=\mathscr{D}(U_A)$ 是闭的.

(4) 当 $A=A^*$ 时，显然，要证明 U_A 是酉算子，只要证明 $\mathscr{D}(U_A)=\mathscr{R}(U_A)=H$, 即 $\mathscr{R}(A\pm iI)=H$. 又由(3)可知，只要证明 $\mathscr{R}(A\pm iI)$ 在 H 中稠密就可以了. 如果不对，例如存在非零向量 $x\in\mathscr{R}((A+iI)^{-1})$, 注意有 $(A+iI)^*=A-iI$, 所以 $x\in\mathscr{N}(A-iI)$, 这将与 $(A-iI)$ 是单射相冲突，所以 $\mathscr{R}(A+iI)=H$. 同样，有 $\mathscr{R}(A-iI)=H$, 即 U_A 是酉算子. 证毕.

称定理 16 中的 U_A 是对称算子 A 的 Cayley 变换.

从(5.70)中反解出的方程(5.73)、(5.74)可知

$$i(U_A+I)(U_A-I)^{-1}=2iA(A-iI)^{-1}\frac{1}{2i}(A-iI)=A. \tag{5.75}$$

下面证明更一般的结果.

定理 17 设 V 是复 Hilbert 空间 H 上的部分保距算子，如果 $\mathscr{R}(V-I)$ 在 H 中稠，那末

(1) 算子

$$A_V=i(V+I)(V-I)^{-1} \tag{5.76}$$

必是对称算子.

(2) 对称算子 A_V 的 Cayley 变换就是 $U_{A_V}=A$.

(3) 当 $\mathscr{D}(V)$ 是闭线性子空间时，A 是闭算子.

(4) 如果 V 还是 H 上酉算子，那末 A 必是自共轭的.

证明 (1) 先证 $V-I$ 是单射：事实上，如果有 $Vx_0=x_0$, 那末对任何 $y=(V-I)x(x\in\mathscr{D}(V))$, 便有

$$(x_0, y)=(x_0, (V-I)x)=(Vx_0, -Vx)+(x_0, Vx)$$
$$=((V-I)x_0, Vx)=0.$$

因为$\overline{\mathscr{R}(V-I)}=H$，从而只有$x_0=0$，所以$V-I$是单射。

因为$V-I$是单射，所以(5.76)可定义，并且$\mathscr{D}(A_V)=\mathscr{R}(V-I)$在$H$中稠。而对任何$x\in\mathscr{D}(A_V)$，令$y\in\mathscr{D}(V)$，使得$(V-I)y=x$，由(5.76)可知

$$(A_Vx, x)=(i(V+I)y, (V-I)y)$$
$$=-i(Vy, y)+i(y, Vy)$$
$$=-i[(Vy, y)-\overline{(Vy, y)}]$$

是实数，因而A_V是对称算子。

(2) 类似于反解(5.70)，从而获得(5.73)、(5.74)的方法，反解方程(5.76)，就得到$U_A=V$。

(3) 假设$\{x_n\}$是$\mathscr{D}(A_V)$中基本点列，并且$\{A_Vx_n\}$也是基本点列。令$x_n=(V-I)y_n$，$y_n\in\mathscr{D}(V)$，所以$A_Vx_n=i(V+I)y_n$，从而$\{(V-I)y_n\}$、$\{(V+I)y_n\}$都是基本点列。由此立即得到$\{y_n\}$是$\mathscr{D}(V)$中基本点列。由于$\mathscr{D}(V)$是闭的，所以存在y_0，使得

$$\lim_{n\to\infty}y_n=y_0\in\mathscr{D}(V), \tag{5.77}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(V-I)y_n=(V-I)y_0, \tag{5.78}$$

$$\lim_{n\to\infty}A_Vx_n=\lim_{n\to\infty}(V+I)y_n=i(V+I)y_0. \tag{5.79}$$

由(5.78)可知，$x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=(V-I)y_0\in\mathscr{D}(A_V)$，从而$y_0=(V-I)^{-1}x_0$。再由(5.79)，又得到

$$\lim_{n\to\infty}A_Vx_n=i(V+I)y_0=i(V+I)(V-I)^{-1}x_0=A_Vx_0,$$

即A_V是闭算子。

(4) 假设V还是酉算子。这时由(5.76)得到

$$\begin{cases}A_V=iI+2(V-I)^{-1}, & (5.80)\\ A_V^*=-iI+2(V-I)^{-1*}. & (5.81)\end{cases}$$

但是$V-I$是有界线性算子，根据§4定理4的(5)，

$$((V-I)(V-I)^{-1})^*=(V-I)^{-1*}(V^*-I),$$

因为 $(V-I)(V-I)^{-1}=I_{\mathscr{R}(V-I)}$, 显然 $I^*_{\mathscr{R}(V-I)}=I$. 利用 $V^*=V^{-1}$, 所以

$$I=(V-I)^{-1*}(V^*-I)=(V-I)^{-1*}(I-V)V^{-1}, \quad (5.82)$$

这就是说, $(V-I)^{-1*}$ 将 $\mathscr{R}(I-V)=\mathscr{R}((I-V)V^*)$ 变到整个 H.

现在证明 $\mathscr{D}((V-I)^{-1*})=\mathscr{R}(I-V)$. 如果不然, 有 $x\bar{\in}\mathscr{R}(I-V)$, $x\in\mathscr{D}((V-I)^{-1*})$, 令 $y=(V-I)^{-1*}x$, 对于 y, 根据 $(V-I)^{-1*}\mathscr{R}(I-V)=H$, 又必有 $x_0\in\mathscr{R}(I-V)$, 使得

$$(V-I)^{-1*}x_0=y,$$

从而 $0\neq x-x_0\in\mathscr{N}((V-I)^{-1*})$. 因此, $\overline{\mathscr{R}((V-I)^{-1})}\perp(x-x_0)$, 但 $\mathscr{R}((V-I)^{-1})=H$, 这是不可能的. 所以,只有

$$\mathscr{D}((V-I)^{-1*})=\mathscr{R}(I-V).$$

从(5.82)得到 $(V-I)^{-1*}=V(I-V)^{-1}$. 代入(5.81), 得到

$$A_V^*=-iI+2V(V-I)^{-1}=i(V+I)(V-I)^{-1}=A_V.$$

证毕.

称(5.76)是部分保距算子 V 的 Cayley 变换.

显然, (5.70)和(5.76)是一对互逆变换, 所以又称一个是另一个的逆变换.

通过定理 16、17 的讨论知道, 一个对称算子能否有自共轭延拓等价于由它的 Cayley 变换所得到的部分保距算子 U_A 是否可以延拓成酉算子. 而保距算子 V 有酉延拓的充要条件显然是 $\dim\mathscr{D}(V)^{\perp}=\dim\mathscr{R}(V)^{\perp}$. 如果引入下面的定义:

定义 设 A 是复 Hilbert 空间上对称算子, 令 $\dim\mathscr{R}(A+iI)^{\perp}=m$, $\dim\mathscr{R}(A-iI)^{\perp}=n$, 称数对 (m, n) 为 A 的亏指数.

那末, 立即得到对称算子的自共轭延拓定理.

定理 18 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上对称算子, (m, n) 是 A 的亏指数, 那末 A 具有自共轭延拓的充要条件是 $m=n$.

习　题

1. 证明复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子 A, 如果对一切 $x\in H$, 满足

$(Ax, x)=0$, 那末 $A=0$. 请举例说明当 H 是实空间时,结论不再成立.

2. 设 A 是 Hilbert 空间上有界自共轭算子, 令

$$M=\sup_{\|x\|=1}(Ax, x),\ m=\inf_{\|x\|=1}(Ax, x),$$

证明对任何 $\lambda\in(-\infty, \infty)-[m, M]$, $A-\lambda I$ 必是正则算子, 并且

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\min(|\lambda-m|, |\lambda-M|)}.$$

3. 设 $H=L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu)$, $\Omega\in\boldsymbol{R}$. 又设 φ 是 Ω 上的有界实可测函数. 证明: H 上算子

$$A_\varphi: f(t)\mapsto\varphi(t)f(t),\quad f\in H,$$

必是有界自共轭算子, 并且 A_φ^{-1} 是有界算子的充要条件是存在正常数 C, 使得 $|\varphi(t)|\underset{\mu}{\geqslant}C$.

4. 设 V 是 Hilbert 空间 H 上保距算子, 如果存在非零向量 x, 使得 $Vx=x$, 那末 $V^*x=x$. 更一般地, 当 T 是 H 上压缩算子, 即 $\|T\|\leqslant1$, 如果 $x\neq0$, $Tx=x$, 那末必有 $T^*x=x$.

5. 设 V 是 Hilbert 空间 H 上线性算子, $\mathscr{D}(V)=H$, 证明 V 是部分保距算子的充要条件是

$$V^*V=P_{\mathscr{N}(V)^\perp},\ VV^*=P_{\mathscr{R}(V)}.$$

6. 举例说明在内积空间中, 把某个完备就范直交系变成完备就范直交系的线性算子未必是酉算子.

7. 证明复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子 N 是正常的充要条件是 $\mathrm{Re}(N)$ 与 $\mathrm{Im}(N)$ 可交换.

8. 设 $\{N_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 上一列有界的正常算子, 并且 $\{N_n\}$ 强收敛于正常算子 N, 那末 $\{N_n^*\}$ 必也强收敛于 N^*.

9. 设 N 是复 Hilbert 空间 H 上线性有界算子, N 是正常算子的充要条件是对任何 $x\in H$, $\|Nx\|=\|N^*x\|$.

10. 设 A、B 是 Hilbert 空间 H 上两个自共轭算子, 那末 AB 是自共轭的充要条件是 $AB=BA$.

11. 设 A、B 是 Hilbert 空间 H 上两个正常算子,那末当 A 与 B、B^* 都可交换时, AB, $A+B$ 都是正常算子(其实,对于复 Hilbert 空间上正常算子 N 有如下结果: 如果有界线性算子 A 满足 $AN=NA$, 那末必有 $AN^*=N^*A$, 从而本习题也可仅假设 A 与 B 可交换,此时结论仍成立).

12. 设 H 是复 Hilbert 空间, J 是 H 上的一个自共轭算子, 而且对一切 x, $(Jx, x)\geqslant C(x, x)$, 此地 C 是一个正常数. 在 H 中引入另一内积 $(x, y)_J=(Jx, y)$, $x, y\in H$. 证明 H 按 $(\cdot, \cdot)_J$ 成为复 Hilbert 空间, 记为 H_J. 证

明 H 中一个有界线性算子 A 在 H_J 中(关于内积$(\cdot, \cdot)_J$)自共轭的充要条件是

$$JA=A^*J,$$

这里 A^* 表示 A 在原来的 Hilbert 空间 H 中(关于内积$(\cdot, \cdot)$)的共轭算子.

13. 设 P_1 和 P_2 是 Hilbert 空间 H 中的两个投影算子, 而且 $P_1+P_2-P_1P_2$ 也是投影算子, 问此时 $P_1P_2=P_2P_1$ 是否成立?

14. 设 H 是 Hilbert 空间, $\{P_\alpha|\alpha\in \Lambda\}$ 是 H 中的一族投影算子. 设 P 是 H 中的投影算子, 而且 $P\geqslant P_\alpha$, $\alpha\in\Lambda$, 同时, 对任何投影算子 Q, 当 $Q\geqslant P_\alpha$, $\alpha\in\Lambda$ 时, 必有 $Q\geqslant P$. 这时, 称 P 为 $\{P_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 的**上确界**, 记为

$$P=\sup_{\alpha\in\Lambda}P_\alpha \quad (\text{或 } P=\bigvee_{\alpha\in\Lambda}P_\alpha).$$

类似地可以定义投影算子族的**下确界**. 证明 H 中任何一族投影算子的上确界和下确界都存在, 并求出相应于它们所投影的子空间.

15. 设 H 是可析的 Hilbert 空间, $\{P_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是一族投影算子. 证明必有 Λ 的有限或可列子集 Λ_0, 使得

$$\sup_{\alpha\in\Lambda}P_\alpha=\sup_{\alpha\in\Lambda_0}P_\alpha.$$

16. 设 P 是 Hilbert 空间 $L^2[a, b]$ 中的投影算子. 如果对于 $[a, b]$ 上任何有界 Lebesgue 可测函数 φ, 都有

$$(P(\varphi f))(x)=\varphi(x)(Pf)(x),\ f\in L^2[a, b].$$

证明这时必有$[a, b]$的可测子集 M, 使 $PL^2[a, b]=\{f|\ \text{在 } M \text{ 外},\ f\doteq_{m} 0\}$

17. 设 H 是 Hilbert 空间, $\{P_n\}$是H 中一列两两直交的非零投影算子. 又设 $\{\lambda_n\}$ 是一个有界数列. 证明在 H 中必有(有界的)正常算子 A, 使得

$$A=(\text{强})\lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=1}^{N}\lambda_\nu P_\nu,$$

并且对任何 ν, 当 $x\in P_\nu H$ 时, $(A-\lambda_\nu I)x=0$.

18. 设 $\{P_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的投影算子组成的单调序列, 即 $P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_n\leqslant\cdots$, 或 $P_1\geqslant P_2\geqslant\cdots\geqslant P_n\geqslant\cdots$. 证明 $\{P_n\}$ 必强收敛于一个投影算子.

19. 证明对非零幂等的有界线性算子 A, 必有 $\|A\|\geqslant 1$.

20. 设 H 是 Hilbert 空间, 又设闭子空间 M 是有界线性算子 A 的不变子空间. 如果(5.52)中 A_{11}、A_{22} 分别是 M、$M^\perp$ 上的正则算子, 那末 A 必是 $H=M\oplus M^\perp$ 上的正则算子, 而且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1}\end{pmatrix}\begin{matrix} M \\ M^\perp\end{matrix}$$

21. 证明定理 13 中的(1)～(4).

22. 直接证明例13中的算子是自共轭算子.

23. 举例说明在实Hilbert空间中,线性有界算子 P 虽满足定理6中的(2)(即(5.37)对一切 $x\in H$ 成立),但 P 未必是投影算子. 如果 P 是自共轭的,那末满足定理6的(2)的算子将是投影算子.

§6 线性算子与双线性泛函

双线性泛函不仅是线性分析而且也是非线性分析某些理论中一个重要的概念,它与线性算子有着密切的联系,常常也用它来讨论线性算子的某些问题. 泛函分析中的双线性泛函是线代数中双线性泛函的直接推广.

1. 双线性泛函

定义 设 H 是线性空间, $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 是 H 上的两元函数. 如果对任何 $x,\ y,\ z\in H$ 及 $\alpha,\ \beta\in \Lambda$,

$$\varphi(\alpha x+\beta y,\ z)=\alpha\varphi(x,\ z)+\beta\varphi(y,\ z), \tag{6.1}$$

$$\varphi(x,\ \alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}\varphi(x,\ y)+\bar{\beta}\varphi(x,\ z), \tag{6.2}$$

那末称 $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 是 H 上的双线性泛函.

由定义可知, 当 H 是复线性空间时, $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 对于第二个变元来说,并不是线性的,而只是共轭线性的. 因此,在复空间上严格地说不能称为双线性泛函,所以有些书上称为"一个半"线性泛函.

定义 设 H 是线性空间, $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 是 H 上的二元函数. 如果对任何 $x,\ y\in H$, 都成立

$$\varphi(x,\ y)=\overline{\varphi(y,\ x)}, \tag{6.3}$$

就称 $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 是 H 上的 Hermite 泛函. 当 H 是实空间时, H 上的 Hermite 泛函又称为对称泛函.

在(6.3)成立时, (6.1) 及 (6.2) 式只要成立一个就可以推出另一个,但从(6.1)和(6.2)式并不能推出(6.3)式.

定义 设 H 是内积空间, A 是定义在整个 H 上的线性算子, 那末称

$$\varphi(x, y)=(Ax, y) \tag{6.4}$$

是由算子 A 导出的泛函。

显然，由算子 A 导出的泛函是 H 上的双线性泛函. 如果算子 A 又是自共轭的：

$$(Ax, y)=(x, Ay), \quad x, y \in H, \tag{6.5}$$

那末，由算子 A 导出的泛函 φ 是双线性 Hermite 泛函.

定义　设 φ 是内积空间 H 上的双线性泛函，如果有正的常数 C，使得

$$|\varphi(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\|, \quad x, y \in H,$$

那末称 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是 H 上有界双线性泛函. 当 φ 是有界双线性泛函时，记 $\|\varphi\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1}|\varphi(x, y)|$，称它为泛函 φ 的范数.

因此，如果 A 是 H 上有界线性算子，那末由 A 导出的泛函 φ 便是有界的双线性泛函. 这是因为

$$|\varphi(x, y)|=|(Ax, y)| \leqslant\|A\|\|x\|\|y\|, \tag{6.6}$$

所以 φ 不仅是有界双线性泛函，而且 $\|\varphi\| \leqslant\|A\|$. 另一方面，在 (6.4) 中取 $y=Ax$ 时，

$$\|Ax\|^2=|\varphi(x, Ax)| \leqslant\|\varphi\|\|x\|\|Ax\|,$$

由此，易知也有 $\|A\| \leqslant\|\varphi\|$. 这样就得到

$$\|\varphi\|=\|A\|. \tag{6.7}$$

定理 1　设 H 是线性空间，$\varphi(\cdot, \cdot)$ 是 H 上双线性泛函

(1) 当 H 是复空间时，φ 是 H 上双线性 Hermite 泛函的充要条件是对一切 $x \in H$，$\varphi(x, x)$ 是实数.

(2) 当 H 是内积空间时，φ 是 H 上有界双线性泛函的充要条件是 φ 是二元连续函数(即对任何 $x_n \rightarrow x$，$y_n \rightarrow y$，必有 $\varphi(x_n, y_n) \rightarrow \varphi(x, y)$).

(3) 当 H 是内积空间，且 φ 是 H 上双线性 Hermite 泛函时，如果有常数 C，对一切 $x \in H$，都有

$$|\varphi(x, x)| \leqslant C\|x\|^2, \tag{6.8}$$

那末 φ 必是有界双线性泛函，并且 $\|\varphi\| \leqslant C$.

(4) 当 H 是复内积空间时，如果 H 上双线性泛函 φ 对一切 $x\in H$, $\varphi(x, x)$ 都是实数，并且存在常数 C，使得 $|\varphi(x, x)|\leqslant C\|x\|^2$，那末必有 $\|\varphi\|\leqslant C$.

证明 (1) 必要性是显然的，今证充分性如下：

利用 φ 是双线性的，对复空间 H 中任何 x、y，有下列等式

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{4}\{\varphi(x+y, x+y)-\varphi(x-y, x-y)+i\varphi(x+iy, x+iy)-i\varphi(x-iy, x-iy)\}. \tag{6.9}$$

对调 x 与 y，又得到

$$\varphi(y, x)=\frac{1}{4}\{\varphi(x+y, x+y)-\varphi(y-x, y-x)+i\varphi(y+ix, y+ix)-i\varphi(y-ix, y-ix)\}. \tag{6.10}$$

由 φ 的双线性性质，从(6.9)，(6.10)易知

$$\varphi(x, y)=\overline{\varphi(y, x)},$$

即 φ 是 Hermite 泛函.

(2) 当 φ 是有界双线性泛函时

$$\begin{aligned}&|\varphi(x_n, y_n)-\varphi(x, y)|\\ \leqslant&|\varphi(x_n, y_n)-\varphi(x_n, y)|+|\varphi(x_n, y)-\varphi(x, y)|\\ \leqslant&\|\varphi\|\{\|x_n\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\|\},\end{aligned} \tag{6.11}$$

所以 φ 是二元连续函数.

反之，设 φ 是二元连续函数. 如果 φ 不是有界的，即存在 $\|x_n\|=1$, $\|y_n\|=1$，使得 $|\varphi(x_n, y_n)|\geqslant n^3(n=1, 2, \cdots)$，显然

$$\frac{x_n}{n}\to 0,\quad \frac{y_n}{n}\to 0. \tag{6.12}$$

又因为 φ 是双线性泛函，易知 $\varphi(0, y)=\varphi(x, 0)=\varphi(0, 0)=0$，从而由(6.12)得到

$$\left|\varphi\left(\frac{x_n}{n}, \frac{y_n}{n}\right)-\varphi(0, 0)\right|\geqslant n,$$

这与 φ 是二元连续函数的假设矛盾，所以 φ 必是有界的.

(3) 对任何 $x, y\in H$，当 $\varphi(x, y)$ 是实数时，由 φ 的双线性 Hermite 泛函，易知

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y, x+y)-\varphi(x-y, x-y)], \qquad (6.13)$$

因此

$$|\varphi(x, y)|\leqslant\frac{1}{4}[C\|x+y\|^2+C\|x-y\|^2]$$
$$=\frac{C}{2}[\|x\|^2+\|y\|^2].$$

当 $\varphi(x,y)$ 不是实数时，记 $\lambda=\dfrac{\overline{\varphi(x, y)}}{|\varphi(x, y)|}$，有 $|\lambda|=1$，并且 $\varphi(\lambda x, y)=\lambda\varphi(x, y)$ 是实数．从而

$$|\varphi(x, y)|=|\varphi(\lambda x, y)|\leqslant\frac{C}{2}(\|\lambda x\|^2+\|y\|^2)$$
$$=\frac{C}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

对任何实数 $t\neq 0$，由上面的不等式得到

$$|\varphi(x,y)|=\left|\varphi\left(tx, \frac{y}{t}\right)\right|\leqslant\frac{C}{2}\left(\|tx\|^2+\frac{\|y\|^2}{t^2}\right). \qquad (6.14)$$

这样，对于 $x\neq 0$，$y\neq 0$，在 (6.7) 式中取 $t^2=\dfrac{\|y\|}{\|x\|}$，就得到

$$|\varphi(x, y)|\leqslant C\|x\|\|y\|.$$

当 x、y 中有一个是零时，总有 $\varphi(x, y)=0$，因此上式当然成立，从而上式对一切 $x, y\in H$ 成立．由此可知 φ 是有界的，并且 $\|\varphi\|\leqslant C$．

(4) 这是(1)和(3)的直接推论．证毕．

由于定理 1 的(2)，所以有界双线性泛函又称为连续双线性泛函．

2．双线性泛函与线性算子

现在给出由连续双线性泛函决定连续线性算子的一个条件．

定理 2　设 H 是 Hilbert 空间，$\varphi(\cdot, \cdot)$ 是 H 上双线性泛函，并且固定一个变元时是另一个变元的连续泛函，那末必有 H 上唯一的有界线性算子 A，使 φ 就是由 A 导出的泛函(即(6.4)式

成立，从而 φ 是连续双线性泛函)，并且 $\|\varphi\|=\|A\|$. 如果 φ 是 Hermite 的，那末 A 是自共轭的.

证明 对任意固定的 $y\in H$，我们考察 H 上的泛函 φ_y: $x\mapsto \varphi(x, y)\ (x\in H)$，那末 φ_y 是线性泛函，并且对 x 是连续的，所以 φ_y 是连续线性泛函. 由 Riesz 定理(§4 定理 1)，必有 $y^*\in H$，使得对任何 $x\in H$，成立

$$\varphi_y(x)=\varphi(x, y)=(x, y^*), \tag{6.15}$$

y^* 是由 y 唯一确定的，而且 $\|y^*\|=\|\varphi_y\|$.

这样，对于每个 $y\in H$，我们把由(6.15)式决定的 y^* 记为 By，这样就作出了在 H 上定义的算子 B, B: $y\mapsto y^*$，B 是由方程

$$\varphi(x, y)=(x, By), \quad x, y\in H, \tag{6.16}$$

所决定的.

现在证明 B 是线性算子. 对任何 $x, y, z\in H$ 及任何两个数 $\alpha, \beta\in \mathbb{K}$，由于

$$\varphi(x, y)=(x, By), \ \varphi(x, z)=(x, Bz),$$

因而

$$\begin{aligned}\varphi(x, \alpha y+\beta z)&=\bar{\alpha}\varphi(x, y)+\bar{\beta}\varphi(x, z)\\&=\bar{\alpha}(x, By)+\bar{\beta}(x, Bz)=(x, \alpha By+\beta Bz).\end{aligned}$$

由(6.16)式，即知 $B(\alpha y+\beta z)=\alpha By+\beta Bz$. 所以 B 是线性算子.

同样，固定 x，$\varphi(x, y)$ 是 y 的共轭线性泛函，由 Riesz 定理(§4 习题 1)，存在定义于 H 上的线性算子 A，使得

$$\varphi(x, y)=(Ax, y). \tag{6.17}$$

由(6.16)、(6.17)得到

$$(Ax, y)=(x, By); \quad x, y\in H, \tag{6.18}$$

因为 $\mathscr{D}(A)=H$，所以 $A^*=B$，从而 B 是闭算子. 但 $\mathscr{D}(B)=H$，因而 B 是有界的，从而 $A=B^*$ 也是有界的. 又显然，$\|\varphi\|=\|A\|=\|B\|$.

如果 φ 又是 Hermite 的，那末对于 $x, y\in H$，

$$(Ax, y)=\varphi(x, y)=\overline{\varphi(y, x)}=\overline{(Ay, x)}=(x, Ay),$$

所以 A 是自共轭的. 算子 A 的唯一性是显然的. 证毕.

由此可见，Hilbert 空间上的连续双线性泛函相当于有界线性算子. 而如果泛函又是 Hermite 的，那末算子还是自共轭的.

3. 二次泛函

与双线性泛函这种二元函数相联系的一元函数是二次泛函.

定义　设 H 是线性空间，$\psi(\cdot)$ 是定义在 H 上的泛函，如果满足下列两个条件：

(i)（二次齐性）　对任何 $x\in H$，$\alpha\in \mathbb{K}$，

$$\psi(\alpha x)=|\alpha|^2\psi(x). \tag{6.19}$$

(ii)（平行四边形公式）　对任何 $x, y\in H$，

$$\psi(x-y)+\psi(x+y)=2(\psi(x)+\psi(y)), \tag{6.20}$$

那末称 ψ 是 H 上的*二次泛函*. 如果对一切 $x\in H$，$\psi(x)$ 还是实数，那末称 ψ 是*实二次泛函*. 进一步，当 H 是内积空间，φ 是 H 上二次泛函时，如果存在常数 C，使得

$$|\psi(x)|\leqslant C\|x\|^2, \tag{6.21}$$

那末称 ψ 是*有界二次泛函*，并称 $\|\psi\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|\psi(x)|$ 为 ψ 的*范数*.

如果 A 是 Hilbert 空间 H 上的线性算子，那末记

$$\psi(x)=(Ax, x), \ (x\in H). \tag{6.22}$$

容易验证 ψ 是个二次泛函，由(6.22)式定义的 ψ 称为*由 A 导出的二次泛函*. 当 A 是有界线性算子时，由 A 导出的泛函 ψ 是有界二次泛函，并且 $\|\psi\|\leqslant\|A\|$.

定理 3　设 H 是 Hilbert 空间，ψ 是实的有界二次泛函，那末必有 H 上唯一的有界自共轭算子 A，使得 ψ 是由 A 导出的二次泛函，而且这时 $\|\psi\|=\|A\|$.

证明　设 H 是复空间，类似于§1 定理 2 的证明，在 H 上作二元函数

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{4}[\psi(x+y)-\psi(x-y)+i\psi(x+iy)-i\psi(x-iy)]. \tag{6.23}$$

由 φ 的定义即知 $\varphi(x, x)=\psi(x)$. 再利用(6.20)，又有

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \frac{\|\psi\|}{4}[\|x+y\|^2+\|x-y\|^2+\|x+iy\|^2+\|x-iy\|^2]$$
$$=\|\psi\|(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{6.24}$$

现证二元函数 φ 是连续的双线性 Hermite 泛函. 事实上, 与§1定理2的方法类似地可以证明对任何 $x, y, z\in H$,

$$\varphi(x, z)+\varphi(y, z)=\varphi(x+y, z),$$

从而对任何有理数 r, $\varphi(rx, z)=r\varphi(x, z)$. 再利用 $\varphi(x, y)=\overline{\varphi(y, x)}$, 又得到对任何有理实数 r_1、r_2, $\varphi(r_1x, r_1y)=r_1r_2\varphi(x, y)$. 利用二次齐性及(6.24)式就得到

$$|r_1r_2||\varphi(x, y)|=|\varphi(r_1x, r_2y)|$$
$$\leqslant\|\psi\|(r_1^2\|x\|^2+r_2^2\|y\|^2). \tag{6.25}$$

如果 x、y 都不为零, 取两列有理数 $\{r_1^{(n)}\}$, $\{r_2^{(n)}\}$, 使得

$$r_1^{(n)}=\frac{1}{r_2^{(n)}}\to\sqrt{\frac{\|y\|}{\|x\|}},$$

那末由(6.25),

$$|\varphi(x, y)|\leqslant 2\|\psi\|\|x\|\|y\|.$$

如果 x, y 中有一个为零, 上式显然也成立. 由此易知 $\varphi(x, y)$ 是连续双线性泛函. 由于 $\varphi(x, x)$ 是实的, 由定理1, φ 还是 Hermite 泛函.

由定理2, 有 H 上的有界自共轭算子 A, 使得

$$(Ax, y)=\varphi(x, y), \quad x, y\in H,$$

且 $\|\varphi\|=\|A\|$. 所以 $\psi(x)=\varphi(x, x)=(Ax, x)$. 在定理1的(4)中取 $C=\|\psi\|$, 立即得到 $\|\psi\|\geqslant\|\varphi\|$. 另一方面, 显然有 $\|\psi\|\leqslant\|\varphi\|$, 所以 $\|\psi\|=\|\varphi\|=\|A\|$.

今证适合(6.22)的算子 A 的唯一性. 如果又有 B, 使得 $(Ax, x)=(Bx, x)$ 对 $x\in H$ 成立. 用类似于(6.23)的式子可知对一切 $x, y\in H$, $(Ax, y)=(Bx, y)$, 所以 $A=B$.

当 H 是实空间时, 只要把(6.23)改成

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{4}(\psi(x+y)-\psi(x-y)),$$

其余照旧可以证明. 证毕.

4. Lax-Milgram 定理

这是偏微分方程理论中一个很有用的定理.

定理 4 设 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是 Hilbert 空间 H 上连续双线性泛函. 如果存在正常数 C, 使得

$$|\varphi(x, x)| \geqslant C\|x\|^2, \quad x \in H, \tag{6.26}$$

那末对于 H 上任何连续线性泛函 f, 必有唯一的 $y \in H$, 满足

$$\varphi(x, y) = f(x), \; x \in H, \tag{6.27}$$

并且 $\|y\| \leqslant \frac{1}{C}\|f\|$.

由定理 2, 易知存在 H 上有界线性算子 B, 使得 $\varphi(x, y) = (x, By)$, 因此定理 4 有一个等价的算子形式:

定理 4′ 设 B 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 如果存在正常数 C, 使得

$$|(x, Bx)| \geqslant C\|x\|^2, \quad x \in H, \tag{6.26′}$$

那末方程

$$By = f \tag{6.27′}$$

对任何 $f \in H$, 必有唯一解 y, 并且 $\|y\| \leqslant \frac{1}{C}\|f\|$.

定理 4′ 的证明 显然, 由 (6.26′) 立即得到 $\|Bx\|\|x\| \geqslant |(x, Bx)| \geqslant C\|x\|^2$, 即

$$\|Bx\| \geqslant C\|x\|, \quad x \in H. \tag{6.28}$$

类似地又有

$$\|B^* x\| \geqslant C\|x\|, \quad x \in H. \tag{6.29}$$

由 (6.29) 可知 $\mathscr{R}(B)^{\perp} = \mathscr{N}(B^*) = \{0\}$, 从而 $\overline{\mathscr{R}(B)} = H$. 又由 (6.28) 可知 B 是单射, 而且 $\mathscr{R}(B)$ 是闭的, 因而 $\mathscr{R}(B) = H$. 根据逆算子定理立即得到 B^{-1} 是全空间 H 上定义的有界线性算子. 再由 (6.28), 易知 $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{C}$. 证毕.

如果定理 4 中的连续双线性泛函 φ 在复空间上满足比 (6.26) 更强的条件:

$$\operatorname{Re}\varphi(x, x) \geqslant C\|x\|^2, \quad x \in H, \tag{6.30}$$

那末称 φ 为椭圆的连续双线性泛函，这时还可给出 (6.27) 求解的简单方法.

事实上，(6.30) 等价于相应于 φ 的定理 4′ 中的算子 B 满足

$$(Bx, x)+(B^*x, x)\geqslant C'(x, x), \ (C'=2C). \tag{6.31}$$

求方程(6.27)的解 y 等价于求映射 B_r 的不动点，这里

$$B_r: y\to y-r(By-f), \tag{6.32}$$

其中 r 是非零实数. 我们只要适当选取常数 r，使得 B_r 是压缩映射，那末，(6.32) 的不动点就可利用压缩映射原理很方便地获得. 为此考虑

$$\begin{aligned}\|B_rx-B_ry\|^2&=\|x-y-rB(x-y)\|\\&=\|x-y\|^2-2r\mathrm{Re}(B(x-y), x-y)+r^2\|B(x-y)\|^2\\&\leqslant(1-2rC+r^2\|B\|^2)\|x-y\|^2,\end{aligned}$$

由此可知，只要取 $r\in\left(0, \dfrac{2C}{\|B\|^2}\right)$（注意 $\|B\|=\|\varphi\|$），那末 $\alpha=1-2rC+r^2\|B\|^2<1$. 特别，取 $r=\dfrac{C}{\|B\|^2}$ 时，α 达到最小. 自然，这时求（(6.27) 的）解（即求 B_r 的不动点）的迭代过程收敛速度最快.

习　题

1. 设 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是复内积空间的双线性泛函，如果

$$\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x, x)|<+\infty,$$

问 φ 是否为连续的?

2. 设 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是复内积空间 H 的双线性泛函，如果对一切 $x\in H$，$\mathrm{Re}\,\varphi(x, x)=0$，问是否成立等式

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1}|\varphi(x, y)|=\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x, x)|.$$

当 H 是实内积空间时，情况又如何?

3. 设 X、Y 是两个 Banach 空间，$\varphi(\cdot, \cdot)$ 是 $X\times Y$ 上的函数，并且对任何 $x_1, x_2\in X$, $y_1, y_2\in Y$, $\alpha, \beta\in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\alpha x_1+\beta x_2, y_1)=\alpha\varphi(x_1, y_1)+\beta\varphi(x_2, y_1),$$

$$\varphi(x_1, \alpha y_1+\beta y_2)=\alpha\varphi(x_1, y_1)+\beta\varphi(x_1, y_2),$$

称 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是 X、Y 上双线性泛函. 如果存在常数 M，使得

$$|\varphi(x, y)| \leqslant M\|x\|\|y\|, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

称 φ 是有界的. 证明:

(1) $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是有界的和 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是二元连续的等价.

(2) $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是二元连续的充要条件是固定一个变元时 φ 必是另一个变元的连续线性泛函.

(3) $\varphi(\cdot, \cdot)$ 有界的充要条件是存在 $B \in \mathfrak{B}(Y \to X^*)$ 或存在 $A \in \mathfrak{B}(X \to Y^*)$, 使得

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \langle x, By \rangle, \\ \varphi(x, y) &= \langle Ax, y \rangle, \end{aligned} \quad x \in X, \ y \in Y,$$

这里, $\langle x, f\rangle$, $\langle g, y\rangle$ 分别是 $f(x)$、$g(y)$ 的形式记号.

4. 设 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是复 Hilbert 空间 H 上有界双线性泛函, 证明必存在 H 上两个有界 Hermite 双线性泛函 $\varphi_1(\cdot, \cdot)$, $\varphi_2(\cdot, \cdot)$, 使得

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y),$$

$$\|\varphi_i\| \leqslant \|\varphi\| \quad (i=1, 2).$$

5. 设 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是复 Hilbert 空间 H 上的有界双线性泛函, 并且对任何 $x \neq 0$,

$$\varphi(x, x) > 0.$$

在 H 上规定 $((x, y)) = \varphi(x, y)$, 证明下列命题成立(参见 § 5 习题 12).

(1) $((\cdot, \cdot))$ 是 H 上的内积.

(2) 如果存在常数 $C>0$, 使得 $\varphi(x, x) \geqslant C\|x\|^2 (x \in H)$, 那末 H 按 $((\cdot, \cdot))$ 成为 Hilbert 空间, 而且由 $((\cdot, \cdot))$ 导出的范数与 H 上原来的范数等价.

(3) 令 J 是满足

$$((x, y)) = \varphi(x, y) = (Jx, y)$$

的 H 上的有界线性算子, 那末 J 必是正则算子.

(4) 设 A 是 H 上线性算子, 那末 A 按 $((\cdot, \cdot))$ 为有界自共轭算子的充要条件是 A 是 H 上有界算子, 并且 $JA = A^*J$ (或等价地, $A = J^{-1}A^*J$, 其中 A^* 是 A 按 $(\cdot, \cdot)$ 的共轭算子).

§ 7 (非线性)泛函极值

1. 引言

这一节主要是研究泛函极值问题. 它的主要部分属于非线性泛函分析. 讨论泛函的极值问题, 从方法上讲, 一类是不使用泛函导数的所谓直接方法, 这类方法大都在有限维空间上讨论, 另一类

就是使用泛函导数的方法(当然还有利用一阶导数和二阶导数之分),这种讨论往往又较多地使用了线性分析方面的某些技巧. 从性质上讲,泛函极值问题,又分为有约束和无约束条件两类. 泛函极值这一课题内容是丰富的,具有很强的应用性. 人们给出了各种各样求出达到极值的迭代过程,这里不可能作出具体介绍. 我们只限于介绍这一方面最基本的一些概念和结果. 为了便于读者阅读起见,我们将把 Banach 空间作为基础,介绍有关的概念和结果[注].

2. G–微分

因为研究的是极值问题,所以下面都是讨论实空间,泛函也是指实泛函.

定义 设 X、Y 是两个 Banach 空间,f 是 $X\to Y$ 的算子(映射,不必是线性的),如果对 $x, u\in X$, $h\in\mathbb{R}$,极限

$$(\text{强})\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hu)-f(x)}{h} \tag{7.1}$$

存在,记它为 $f'(x, u)$,那末称 $f'(x, u)$ 是 f 在点 x 处沿 u 方向的 Gateaux 微分(简称为 G–微分). 如果对一切 $u\in X$, $f'(x, u)$ 存在,那末称 f 在点 x 处 G–可微. 如果对任何 $u\in X$, $f'(x, u)$ 存在,并且关于 u 是连续、线性的,那末称 $f'(x, u)$ 是 f 在 x 处的 G–导数.

显然,当 $f'(x, u)$ 存在时,$f'(x, u)$ 是 $X\times X$ 到 Y 的算子.

定义 设 f 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的算子,并且 f 在 X 的每一点 x 都是 G–可微的. 如果对任何 $x, u, v\in X$, $h\in\mathbb{R}$,极限

$$(\text{强})\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+hv, u)-f'(x, u)}{h} \tag{7.2}$$

存在,记它为 $f''(x, u, v)$,那末称 $f''(x, u, v)$ 是在点 x 处沿 u、v 方向的二阶 G–微分. 如果 $f''(x, u, v)$ 对任何 u, v 都存在,那末称 f 在点 x 处是二次 G–可微的.

[注] 无疑地,这里许多结果在 Fréchet 空间也成立. 为简单起见,这里的叙述形式都将以 Banach 空间为基础.

定理1　G–微分具有下列性质（下面假定所有出现的沿某方向的 G–微分总是存在的）：

(1) $f'(x, u)$ 是 $X\times X$ 到 Y 的算子，$f''(x, u, v)$ 是 $X\times X\times X$ 到 Y 的算子.

(2)
$$f'(x, \lambda u)=\lambda f'(x, u),\quad \lambda\in\mathbb{K},\tag{7.3}$$
$$f''(x, \lambda u, \mu v)=\lambda\mu f''(x, u, v),\quad \lambda, \mu\in\mathbb{K}.\tag{7.4}$$

(3) 如果 J 是 X 上的泛函（即 $Y=\mathbb{R}$ 的情况），并且在点 $x+\lambda u(\lambda\in[0, 1])$ 处沿 u, u 方向二次 G–可微，那末下列 Taylor 公式成立，即存在 θ, $\theta_1\in(0, 1)$，使得
$$J(x+u)=J(x)+J'(x+\theta u, u),\tag{7.5}$$
$$J(x+u)=J(x)+J'(x, u)+\frac{1}{2}J''(x+\theta_1 u, u, u).\tag{7.6}$$

(4) 如果算子 f 在点 $x+\lambda u(\lambda\in[0, 1])$ 处沿 u 方向 G–可微，那末必存在 $\theta\in(0, 1)$，使得
$$\|f(x+u)-f(x)\|\leqslant\|f'(x+\theta u, u)\|.\tag{7.7}$$
同样，当 f 在点 $x+\lambda u(\lambda\in[0, 1])$ 处沿 u、u 二次 G–可微时，必存在 $\theta_1\in(0, 1)$，使得
$$\|f(x+u)-f(x)-f'(x, u)\|\leqslant\frac{1}{2}\|f''(x+\theta_1 u, u, u)\|.\tag{7.8}$$

证明　(1) 是显然的. 本定理(2)～(4)的结论都是和微积分中普通函数微分性质相似的. 它们的证明方法也几乎和微积分中的证明相仿. 今略证如下：

(2) 当 $\lambda=0$ 时，从定义容易直接证明 $f'(x, 0)=0$，从而(7.3)成立. 当 $\lambda\neq0$ 时，由于
$$\frac{f(x+h\lambda u)-f(x)}{h}=\lambda\,\frac{f(x+h'u)-f(x)}{h'},\tag{7.9}$$
其中 $h'=\lambda h$，两边取极限（一边极限存在就能保证另一边极限也存在），即得(7.3).

固定 λ 和 u，用 $f'(x, \lambda u)$ 作为 f，再次对 v 利用 (7.3)，就得到(7.4).

(3) 视 $g(\lambda)=J(x+\lambda u)$ 为 $\lambda\in[0, 1]$ 上普通函数,因为

$$\frac{g(\lambda+h)-g(\lambda)}{h}=\frac{J(x+(\lambda+h)u)-J(x+\lambda u)}{h}$$
$$=\frac{J(x+\lambda u+hu)-J(x+\lambda u)}{h},$$

由于假设 J 在点 $x+\lambda u$ 处沿 u 方向是 G-可微的, 所以 $g'(\lambda)$ 存在,并且

$$g'(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{g(\lambda+h)-g(\lambda)}{h}=J'(x+\lambda u,\ u). \quad (7.10)$$

对 $g(\lambda)$ 利用平均值公式,并注意到 $g(0)=J(x)$, $g(1)=J(x+u)$, 立即得到(7.5).

同样, 当 J 是二次可微时, $g''(\lambda)$ 存在, 再利用 $g(\lambda)$ 的 Taylor 公式就得到(7.6).

(4) 任取 $y^*\in Y^*$, 作

$$J(x)=\langle f(x),\ y^*\rangle, \quad (7.11)$$

这里 $\langle f(x),\ y^*\rangle=y^*(f(x))$. 由于 f 在点 $x+\lambda u(\lambda\in[0, 1])$ 处沿 u 方向可微, 易知 $J(x)$ 也在点 $x+\lambda u(\lambda\in[0, 1])$ 处沿 u 方向可微,并且 $J'(x+\lambda u)=\langle f'(x+\lambda u),\ y^*\rangle$. 特别, 当 x、u 给定后, 必存在 $y^*\in Y^*$, $\|y^*\|=1$, 使得

$$\|f(x+u)-f(x)\|=\langle f(x+u)-f(x),\ y^*\rangle$$
$$=J(x+u)-J(x).$$

由(7.5),存在 $\theta\in[0, 1]$, 使

$$\|f(x+u)-f(x)\|=J'(x+\theta u,\ u)=\langle f'(x+u),\ y^*\rangle$$
$$\leqslant\|f'(x+\theta u)\|,$$

即(7.7)成立.

同样可证(7.8)成立. 证毕.

类似于普通函数在一定条件下求偏导数的顺序可以交换, 我们也有如下定理.

定理 2 设 Banach 空间 X 上泛函 J 在开集 O 的任何一点 x 处是沿任何 u, $v\in X$ 的方向二阶 G-可微的. 如果 $J''(x,\ u,\ v)$ 关于 $x\in O$, u, $v\in X$ 是三元连续的,那末必有

$$J''(x,\ u,\ v)=J''(x,\ v,\ u). \tag{7.12}$$

证明 用类似普通函数的证明方法来证明. 令

$$D_{\alpha\beta}=J(x+\alpha u+\beta v)-J(x+\alpha u)-J(x+\beta v)+J(x),$$

$$f(y)=J(y+\alpha u)-J(y)$$

(不妨设 $x,\ x+\alpha u,\ x+\alpha u+\beta v\in O$), 因此 $D_{\alpha\beta}=f(x+\beta v)-f(x)$, 由平均值公式

$$D_{\alpha\beta}=f'(x+\theta_1\beta v,\ \beta v),\quad \theta_1\in(0,\ 1),$$

即 $$D_{\alpha\beta}=J'(x+\alpha u+\theta_1\beta v,\ \beta v)-J'(x+\theta_1\beta v,\ \beta v).$$

再次应用平均值公式,

$$\begin{aligned}D_{\alpha\beta}&=J''(x+\theta_1\beta v+\theta_2\alpha u,\ \beta v,\ \alpha u)\\&=\alpha\beta J''(x+\theta_1\beta v+\theta_2\alpha u,\ v,\ u),\quad \theta_1,\theta_2\in(0,\ 1).\end{aligned} \tag{7.13}$$

用类似的方法又可得到

$$D_{\alpha\beta}=\alpha\beta J''(x+\theta_3\beta v+\theta_4\alpha u,\ u,\ v),\quad \theta_3,\ \theta_4\in(0,\ 1), \tag{7.14}$$

令 $\alpha,\ \beta\to0$, 由(7.13)、(7.14), 就得到(7.12). 证毕.

定义 设 J 是 Banach 空间 X 上 G–可微的泛函, 如果 J 在点 x 处 G–导数存在(即 $J'(x,\ u)$ 是 u 的连续线性泛函), 换言之, 存在 X^* 上唯一的向量, 记为 $\operatorname{grad} J(x)$, 使得

$$J'(x,\ u)=\langle u,\ \operatorname{grad}J(x)\rangle,\quad u\in X, \tag{7.15}$$

称 $\operatorname{grad} J(x)$ 为 J 在 x 点的*梯度*. 今后常简记 $\operatorname{grad} J(x)$ 为 $J'(x)$ 或 $G(x)$, 称"grad"是*梯度算子*.

$$\operatorname{grad}:\ X\to X^*.$$

如果 J 是二次 G–可微的, 并且 $J''(x,\ u,\ v)$ 关于 u、v 是连续双线性泛函, 即存在唯一的有界线性算子 $H(x)$: $X\to X^*$, 使得

$$J''(x,\ u,\ v)=\langle u,\ H(x)v\rangle, \tag{7.16}$$

称 $H(x)$ 是 J 在点 x 处的 *Hesse 算子*, 常记 $H(x)$ 为 $J''(x)$.

系 设 J 是 Banach 空间 X 上的泛函.

(1) 如果 J 在凸子集 U 中每点梯度存在, 并且均匀有界, 那末存在常数 M, 使得

$$|J(x)-J(x')|\leqslant M\|x-x'\|,\ x,\ x'\in U. \qquad (7.17)$$

(2) 如果 J 在开集 O 中每点 x 处沿任何 u、v 方向是二次 G-可微的，并且 $J''(x, u, v)$ 关于 x、u、v 是连续的，关于 u、v 是线性的，那末 J 的 Hesse 算子 $H(x)$ 是对称的，即

$$\langle u,\ H(x)v\rangle=\langle v,\ H(x)u\rangle,\quad u,\ v\in X. \qquad (7.18)$$

证明 (1) 利用 U 的凸性和平均值公式，对任何 x, $x'\in U$，存在 $\theta\in(0, 1)$，使得

$$\begin{aligned}|J(x)-J(x')| &= |J'(x+\theta(x'-x), x'-x)|\\ &= |\langle x'-x,\ J'(x+\theta(x'-x))\rangle|\\ &\leqslant M\|x'-x\|,\end{aligned}$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in U}\|J'(x)\|$，这就是说，(7.17)成立.

(2) 仿 Hilbert 空间上有界双线性泛函必是有界线性算子导出的双线性泛函的证明，同样可以证明在 (2) 的假设下，Hesse 算子 $H(x)$ 对 O 中每点 x 都存在. 再利用定理 2，立即知道 (7.18) 成立. 证毕.

3. 凸函数

定义 设 J 是 Banach 空间 X 上的泛函，如果对任何 x, $x'\in X$,

$$J(x+\theta(x'-x))\leqslant J(x)+\theta(J(x')-J(x)),\quad \theta\in(0, 1) \qquad (7.19)$$

那末称 J 是 X 上凸函数[注]，如果对 $x'\neq x$，(7.19) 是严格的不等式，那末称 J 是严格凸函数.

定理 3 设 J 是 Banach 空间 X 上的泛函，并且是 X 上 G-可微的.

(1) J 在 X 上是凸的(或严格凸的)充要条件是

$$J(x')\geqslant J(x)+J'(x, x'-x),\quad x,\ x'\in X \qquad (7.20)$$

$$(\text{或 } J(x')>J(x)+J'(x, x'-x),\ x\neq x').$$

[注] 也有人称为凸泛函. 本书中为了与第四章 §7 的凸泛函概念区别起见，用了"凸函数".

(2) 如果 J 在 X 上是凸的，并且在 X 中的每点都有梯度，那末 J 必是下半连续的.

(3) 如果 $J''(x, u, u)$ 对任何 $x, u\in X$ 存在，并且 $J''(x, u, u)\geqslant 0$（或 >0），那末 J 是凸的（或严格凸的）.

(4) 如果 J 在 X 上梯度存在，并且对任何 $x, u\in X$，有 $J''(x, u, u)\geqslant 0$，那末 J 必下半连续.

证明 (1) 必要性 因为 J 是凸的，即(7.19)成立，由(7.19)立即得到

$$J'(x, x'-x)=\lim_{\theta\to 0+}\frac{J(x+\theta(x'-x))-J(x)}{\theta}$$
$$\leqslant J(x')-J(x),$$

即(7.20)成立.

充分性 两次应用条件(7.20)，得到

$$\left.\begin{array}{l}J(x)\geqslant J(x+\theta(x'-x))+J'(x+\theta(x'-x), -\theta(x'-x)),\\ J(x')\geqslant J(x+\theta(x'-x))+J'(x+\theta(x'-x), (1-\theta)(x'-x)).\end{array}\right\}\tag{7.21}$$

分别乘上、下两式以 $(1-\theta)$ 和 θ 后相加，注意到定理 1 的 (2)，立即得到

$$(1-\theta)J(x)+\theta J(x')\geqslant J(x+\theta(x'-x)),\ \theta\in(0, 1).$$

对于严格凸的情况，充分性的证明完全类似可得. 再证必要性：由于

$$J(x')-J(x)>\frac{J(x+\theta(x'-x))-J(x)}{\theta},$$

根据凸性，(7.20)成立，再注意到定理 1 的(2)，立即有

$$J(x')-J(x)>\frac{J(x+\theta(x'-x))-J(x)}{\theta}$$
$$\geqslant J'(x, x'-x).$$

(2) 由于 J 的凸性和梯度的存在性，可得

$$J(x')\geqslant J(x)+J'(x, x'-x)$$
$$=J(x)+\langle x'-x, J'(x)\rangle,\tag{7.22}$$

由此可知 J 是下半连续的.

(3) 利用 Taylor 展开

$$J(x')=J(x)+J'(x, x'-x)+\frac{1}{2}J''(x+\theta(x'-x), x'-x, x'-x), \theta\in(0, 1). \tag{7.23}$$

由假设，$J''\geqslant 0$，从(7.23)可知 J 满足(7.20)，所以 J 是凸的.

对于严格凸的情况可类似地证得.

(4) 由(2)、(3)可知(4)是显然的. 证毕.

4. 泛函极小的存在定理

定义 设 J 是 Banach 空间 X 上的泛函，U 是 X 的子集，如果 $x_0\in U$，并且存在 x_0 的邻域 $O(x_0)$，使得

$$J(x_0)\leqslant J(x), \ x\in U\cap O(x_0), \tag{7.24}$$

那末称 x_0 是 J 在 U 中的局部极小点，$J(x_0)$ 是 J 在 U 的局部极小值. 如果

$$J(x_0)\leqslant J(x), \ x\in U, \tag{7.25}$$

那末称 x_0 是 J 在 U 中的绝对极小点，$J(x_0)$ 是 J 在 U 的绝对极小值.

下面是极小值存在的基本定理.

定理 4 设 X 是自反 Banach 空间，J 是 X 上的弱下半连续泛函.

(1) 如果 U 是 X 的有界弱闭子集[注]，那末 J 在 U 中至少有一个绝对极小值.

(2) 如果 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} J(x)=+\infty$，那末 J 在 X 中至少有一个绝对极小值.

证明 (1) 令 l 是 J 在 U 中的下确界，取 $\{x_n\}\subset U$ 是 J 的极小化序列，即

$$\lim_{n\to\infty} J(x_n)=l.$$

[注] 这里"弱闭"可理解为按弱拓扑(见第五章§3的第七小节)的闭集，也可理解为下列意义下的闭集，即 U 中任何弱收敛的点列 $\{x_n\}$ 的弱极限 x 仍在 U 中. 参见第五章§3习题7、8.

因为 X 是自反的，$\{x_n\}$ 是有界序列，因而 $\{x_n\}$ 必有弱收敛的子序列(不妨设为 $\{x_n\}$ 本身)，记它的弱极限为 x_0.

因为 U 是弱闭的，所以 $x_0\in U$，又因为 J 是弱下半连续的，所以

$$l\leqslant J(x_0)\leqslant \underline{\lim}\, J(x_n)\leqslant l,$$

由此可知 x_0 是 J 在 U 中的绝对极小点.

(2) 仍用 l 表示 J 在 X 中的下确界，根据 (2) 的假设，存在 r_0，当 $\|x\|\geqslant r_0$ 时，

$$J(x)>l+M. \tag{7.26}$$

取 $U=\{x\mid \|x\|\leqslant r_0\}$. 因为空间 X 是自反的，所以 U 是 X 的有界弱闭子集，由 (1) 可知必有 $x_0\in U$，使得 $J(x_0)=l$，即 x_0 是绝对极小点. 证毕.

定理 5　设 O 是 Banach 空间 X 上的开集，J 是 X 上的泛函.

(1) 设 x_0 是 J 在 O 中的局部极小点，如果 J 是 G–可微的，那末

$$J'(x_0,\ u)=0,\ u\in X. \tag{7.27}$$

(2) 如果 J 是凸的，且是一次 G–可微的，那末

(i) 局部极小点就是 J 在 X 上的绝对极小点.

(ii) x_0 是 J 在 X 上绝对极小点的充要条件是对任何 $u\in X$，$J'(x_0,\ u)=0$.

(iii) 当 J 是严格凸时，绝对极小点是唯一的.

证明　(i) 因为 x_0 是 J 在 O 中的局部极小点，所以存在 x_0 的邻域 $O(x_0)$，使得

$$J(x_0)\leqslant J(x),\ x\in O\cap O(x_0), \tag{7.28}$$

从而对任何 u，存在 h_0，当 $|h|<h_0$ 时，$x_0+hu\in O\cap O(x_0)$，即

$$J(x_0)\leqslant J(x_0+hu). \tag{7.29}$$

令 $h>0$，$h\to 0$，由(7.29)，

$$J'(x_0,\ u)=\lim_{h\to 0}\frac{J(x_0+hu)-J(x_0)}{h}\geqslant 0. \tag{7.30}$$

在(7.30)中将 u 换成 $-u$, 也应有 $-J'(x_0, u)=J'(x_0, -u)\geqslant 0$, 即 $J'(x_0, u)\leqslant 0$, 从而(7.27)成立。

(2) (i) 由于 J 是凸的, 所以

$$J(x)\geqslant J(x_0)+J'(x_0, x-x_0), \quad x\in X. \tag{7.31}$$

如果 x_0 是 J 的一个局部极小点, 由 (1), $J'(x_0, x-x_0)=0$, 从而 x_0 是 J 的绝对极小点.

(ii) 必要性由(1)可得. 充分性的证明和(i)的证明相同.

(iii) 如果有 $x_0, x_1, x_0\neq x_1$, 并且

$$J(x_0)=J(x_1)\leqslant J(x), \quad x\in X.$$

由严格凸性, $\quad J(x_1)>J(x_0)+J'(x_0, x_1-x_0)$.

因为 x_0、x_1 都是绝对极小点, 所以 $J'(x_0, x_1-x_0)=J'(x_1, x_0-x_1)=0$, 从而 $J(x_1)>J(x_0)$, 这与假设 $J(x_1)=J(x_0)$ 相矛盾, 所以 $x_0=x_1$. 证毕.

定理6 设 X 是自反的 Banach 空间, 泛函 J 在 X 上 G–导数存在, 并且 J 的二次 G–微分 $J''(x, u, v)$ 满足

$$J''(x, u, u)\geqslant\|u\|F(\|u\|), \quad x, u\in X, \tag{7.32}$$

其中, $F(t)$ 是$(0, \infty)$上非负的实值函数, 并且

$$\lim_{t\to\infty}F(t)=\infty, \tag{7.33}$$

那末 J 在 X 中至少有一个绝对极小点. 进一步, 如果 $F(t)$ 在 $(0, \infty)$上是正值函数, 那末 J 的极小点是唯一的.

证明 根据定理 3 的 (3), 由条件 (7.23), 可知 J 是 X 上的凸函数. 如果 $F(t)$ 在 $(0, \infty)$ 上是正值函数, 那末 J 还是 X 上严格凸函数.

因为 J 是凸的, J 在 X 上 G–导数存在, 从定理 3 的(2)可知 J 是弱下半连续的.

根据 Taylor 公式,

$$J(x)=J(0)+J'(0, x)+\frac{1}{2}J''(\theta x, x, x), \tag{7.34}$$

由于 G–导数存在, 所以存在 $M>0$, 使得

$$|J'(0, x)|\leqslant M\|x\|, \tag{7.35}$$

又因为(7.32)成立，由此可知

$$J(x) \geqslant J(0) - M\|x\| + \frac{1}{2}\|x\| F(\|x\|), \quad x \in X, \qquad (7.36)$$

从而

$$\lim_{\|x\| \to \infty} J(x) = \infty,$$

由定理 4 的(2)可知，J 在 X 上存在绝对极小点.

当 $F(t)$ 在$(0, \infty)$上是正值函数时，J 是严格凸的，由定理 5 (2) 中的(iii)，极小点是唯一的. 证毕.

在实际应用中，$F(t)$ 经常是取为 $F(t) = \alpha t (\alpha > 0)$ 的形式.

5. 应用

例 1 设 Ω 是 E^n 中开集，X 是 Соболев 空间 $W_2^1(\Omega)$，引入 $W_2^1(\Omega)$ 上内积

$$((u, v)) = (u, v) + \sum_{i=1}^{n} (D_i u, D_i v), \qquad (7.37)$$

其中 $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 是 u 关于 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的广义导数，

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) dx. \qquad (7.38)$$

由 $(\cdot, \cdot)$、$((\cdot, \cdot))$ 导出 $W_2^1(\Omega)$ 上的范数分别用 $\|\cdot\|$, $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 表示. 令

$$J(x) = \frac{1}{2}|\!|\!|x|\!|\!|^2 - (f, x), \ f \in L^2(\Omega, m), \qquad (7.39)$$

容易直接验证下面两式成立：

$$J'(x, u) = ((x, u)) - (f, u),$$

$$J''(x, u, v) = ((v, u)),$$

显然 J 满足定理 6 中所假设的条件（定理 6 中的 $F(t)$ 现在取为 $F(t) = t$）.

根据定理 5、6，泛函 J 有唯一的绝对极小点 x_0，也就是有满足

$$J'(x_0, u) = 0, \quad u \in X, \qquad (7.40)$$

的唯一解. 显然，(7.40)等价于

$$((x_0, u)) = (f, u), \quad u \in X, \qquad (7.41)$$

而方程(7.41)又等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} D_i x_0 D_i u\,dx+\int_{\Omega} x_0 u\,dx=\int_{\Omega} f u\,dx,\quad u\in X,\tag{7.42}$$

如果 x_0 具有足够的光滑性，(7.42)经分部积分，化成

$$\int_{\Omega}(-\Delta x_0+x_0)u\,dx+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial x_0}{\partial n}u\,d\sigma=\int_{\Omega} f u\,dx,\tag{7.43}$$

其中 $\partial\Omega$ 是 Ω 的境界，$\frac{\partial x_0}{\partial n}$ 是 x_0 对 $\partial\Omega$ 的外法向导数，$d\sigma$ 是曲面 $\partial\Omega$ 上面积元，$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$，与(7.43)等价的微分形式就是

$$\begin{cases}-\Delta x_0+x_0=f, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ \dfrac{\partial x_0}{\partial n}=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases}\tag{7.44}$$

即 x_0 是 Neumann 问题的解。

例2 设 Ω、D_i、$\|\cdot\|$、$\|\cdot\|$ 等如例1，取 $X=W_2^1(\Omega)\cap L^4(\Omega, m)$ 和泛函

$$J(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{4}(x^2, x^2)-(f, x),\ x\in X.\tag{7.45}$$

取 $|x|=\|x\|+(x^2, x^2)$ 作为 X 上的范数。

显然

$$\begin{aligned}&J'(x, u)=((x, u))-(f, u)+(x^3, u),\\ &J''(x, u, u)=((u, u))+(x^2, u^2),\end{aligned}\tag{7.46}$$

由此可知 J 是严格凸、弱下半连续的，并且

$$\lim_{\|x\|\to\infty} J(x)=+\infty,\tag{7.47}$$

所以 J 有唯一的极小点 x_0，即

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} D_i x_0 D_i u\,dx+\int_{\Omega} x_0 u\,dx+\int_{\Omega} x_0^3 u\,dx=\int_{\Omega} f u\,dx.\tag{7.48}$$

当 x_0 充分光滑时，用分部积分，便知道上式的微分形式是

$$\begin{cases}-\Delta x_0+x_0+x_0^3=f, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ \dfrac{\partial x_0}{\partial n}=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}.\end{cases}\tag{7.49}$$

例 1、例 2 既说明求某些泛函的极小点可化为微分方程的求解，当然可以反过来，即某些微分方程的求解问题可以化成相应的泛函的极值问题. 近来由于计算机的有效应用，许多具体的微分方程近似解的问题，都经常化成求泛函的极值问题. 所谓用有限元方法求微分方程近似解就是基于这个思想.

6. 求极值点的方法

对于给定的一个泛函，如何具体求出它的极小点，显然这与所给泛函的特性有关，并不存在一个求解过程，它对一切泛函都是普遍有效的，特别是从求解过程的收敛速度来看更是如此. 这里不可能讨论各种各样的具体求解过程，仅就最一般的原则作一简介.

设 J 是 Banach 空间 X 上的泛函，要求出 J 的极小点 x_0:

$$J(x_0)\leqslant J(x),\quad x\in X. \tag{7.50}$$

通常总是构造出 X 中适当的点列 $\{x_n\}$，使得 x_n 按强、弱拓扑收敛于一点 x_0，然后利用 J 的连续性证明 x_0 适合(7.50).

构造序列 $\{x_n\}$ 的原则，通常是适当选取初始近似 x_0，然后按要求：

$$J(x_{n+1})\leqslant J(x_n),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{7.51}$$

依次取出 x_1、x_2、$\cdots$. 当然，这里假设 J 是有下界的. 此时，由(7.51)可以保证 $\lim\limits_{n\to\infty} J(x_n)$ 存在.

如何由第 n 次近似 x_n 作第 $n+1$ 次近似 x_{n+1}? 一般说来，以 $J(x_n)-J(x_{n+1})$ 越大越好. 如记 $x_{n+1}=x_n+\rho_n\omega_n$ ($\omega_n\in X$, $\|\omega_n\|=1$, $\rho_n>0$)，显然，问题等价于在 X 中选择一个方向 ω_n，使 J 从 x_n 出发沿这个方向下降最快. 如果 $J'(x, u)$ 存在，由 Taylor 公式，

$$J(x_{n+1})=J(x_n)+\rho_n J'(x_n,\ \omega_n)+\cdots, \tag{7.52}$$

可见，应选择 ω_n，使得 $J'(x_n,\ \omega_n)<0$，并且 $J'(x_n,\ \omega_n)$ 越接近 $\inf\limits_{\|\omega\|=1} J'(x_n,\ \omega)$ 越好. 如果找不到适合 $J'(x_n,\ \omega_n)<0$ 的 ω_n，因为 $J'(x_n,\ -\omega_n)=-J'(x_n,\ \omega_n)$，可知对任何 $\omega\in X$，$J'(x_n,\ \omega)=0$. 当 J 是凸函数时，x_n 本身就可能是 J 的极小点.

在一般情况下,由于 $\lim_{n\to\infty} J(x_n)$ 存在,从(7.52)可知,有可能得到

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n J'(x_n, \omega_n) = 0. \tag{7.53}$$

再适当选择 $\{\rho_n\}$,由上式可以推得

$$\lim_{n\to\infty} J'(x_n, \omega_n) = 0. \tag{7.54}$$

一般说来,选择 $\{\omega_n\}$ 要使得 $\{x_n\}$ 能强或弱收敛于 x_0,并能保证

$$J'(x_0, u) = 0, \quad u \in X. \tag{7.55}$$

最后再利用(7.55)和 J 的某些假设,验证(7.50)是否成立.

因方向 ω_n 选择方法不同,而有梯度法、共轭梯度法、辅助算子法等等,此外还有主要用于 Hilbert 空间上的压缩算子方法(其中包括 Jacobi 方法, Gauss-Seidel 方法和松弛法等)以及 Newton 方法等,可参看有关书籍.

习　题

1. 设 X、Y 是两个 Banach 空间,f 是 X 到 Y 的算子,如果对每个 $x \in X$,存在 X 到 Y 的有界线性算子 $f'(x)$,使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f(x+u) - f(x) - f'(x)u\|}{\|u\|} = 0,$$

称 $f'(x)$ 是 f 在点 x 处的 Fréchet 导数,简称为 F–导数,又称 $f'(x)u$ 是 f 在点 x 沿 u 方向的 F–微分.

证明:(1) 如果 f 的 F–微分存在,那末必也存在 G–微分,并且两者相等.

(2) 如果 f 在 x_0 的某个环境 $O(x_0)$ 中每点 x 沿任何方向 $u \in X$ 是 G–可微的,并且 G–微分 $f'(x, u)$ 对每个 $x \in O(x_0)$ 是 u 的连续线性算子,对任何 $u \in X$,$f'(x, u)$ 在 $O(x_0)$ 中关于 x 连续,那末 f 必在 x_0 点 F–可微.

2. 设 f 是 E^n 上的足够光滑的函数,试求出 f 的一阶、二阶、三阶 G–微分和 G–导数.

3. 设 H 是 Hilbert 空间,A 是 H 上有界线性算子,$h, f, g \in H$,求出下述 H 到 H 的算子

$$f(x) = Ax + (x, h)f + (x, x)^2 g$$

的一阶、二阶、三阶、四阶的 G–微分和 G–导数.

第七章　线性算子谱论

§1　线性算子的正则集与谱

各类线性方程(如代数方程、微分方程、积分方程、变分方程以及微分-积分方程等等)求解问题的研究以及经典和量子物理研究的需要产生了一般的线性算子谱论. 它已经取得丰富而深入的成果,并被广泛而成功地应用到数学、物理各有关的领域. 自从泛函分析的出现,它一直就是,并且至今仍然是一个中心课题. 本章只能对它最基础的部分作一扼要介绍.

在谱论中,一般总假定空间是复的.

1. 正则点与谱点

定义　设 X 是复的赋范线性空间, A 是 X 中的线性算子, $\mathscr{D}(A)$是它的定义域, $\lambda\in\mathbb{C}$, 如果算子 $A-\lambda I$ 是正则的, 那末称 λ 是 A 的正则点. A 的正则点全体记为 $\rho(A)$, 称 $\rho(A)$是A的正则集, 当 $\lambda\in\rho(A)$时. 称$(A-\lambda I)^{-1}$是 A 的豫解算子, 常记为 $R(A;\lambda)$. 不是A正则点的数 λ 称为 A 的谱点, A 的谱点全体记为 $\sigma(A)$, 称 $\sigma(A)$ 是 A 的谱集, 或简称为谱.

正则集也可称做豫解集.

显然, 从定义可知 $\sigma(A)\cup\rho(A)=\mathbb{C}$, $\sigma(A)\cap\rho(A)=\emptyset$.

从方程

$$(A-\lambda I)x=y \tag{1.1}$$

求解问题的角度来看, A 的正则点、谱点的意义如下:

(1) 如果 $\lambda\in\rho(A)$, 那末$(A-\lambda I)^{-1}$就是定义在全空间 X 上的有界线性算子. 这等价于(1.1)对任何 $y\in X$, 有唯一解

$$x=(A-\lambda I)^{-1}y,$$

而且当 $y_n\to y$ 时, 解 $x_n=(A-\lambda I)^{-1}y_n\to$ 解 $x=(A-\lambda I)^{-1}y$ (即解 x 连续地依赖于自由项 y).

(2) 当 $\lambda\in\sigma(A)$ 时，方程(1.1)的可解性以及解的情况非常复杂，可分下列三种情况.

(i) 相应于(1.1)的齐次方程

$$(A-\lambda I)x=0 \tag{1.2}$$

有非零解，即存在 $x_0\neq 0$，使得

$$(A-\lambda I)x_0=0, \tag{1.3}$$

这时，称 λ 是 A 的特征值，x_0 是相应于 λ 的 A 的特征向量. 相应于 λ 的 A 的特征向量全体所张成的线性子空间记为 $\Phi_\lambda(A)$，显然，$\Phi_\lambda(A)$ 是线性子空间，称 $\Phi_\lambda(A)$ 是相应于 λ 的 A 的特征子空间.

A 的特征值全体记为 $\sigma_p(A)$，称 $\sigma_p(A)$ 是点谱.

当 A 是 X 上有界线性算子时，$\Phi_\lambda(A)$ 是闭线性子空间. 称 $\dim\Phi_\lambda(A)$ 是特征值 λ 的重复度.

显然，当 $\lambda\in\sigma_p(A)$ 时，如果对某个 $y\in X$，方程(1.1)有解 x，那末相应于 y 的通解是 $x+x_0$，其中 x_0 是 $\Phi_\lambda(A)$ 中任一向量.

(ii) $\lambda\in\sigma(A)-\sigma_p(A)$，然而 $\mathscr{R}(A-\lambda I)\neq X$. 这时，$(A-\lambda I)$ 虽是单射，但 $\mathscr{D}((A-\lambda I)^{-1})\neq X$. 它等价于齐次方程(1.2)虽没有非零解，但方程(1.1)不是对任何 $y\in X$ 都可解.

(iii) $\lambda\in\sigma(A)-\sigma_p(A)$，并且 $\mathscr{R}(A-\lambda I)=X$，然而 $(A-\lambda I)^{-1}$ 并不是有界的，它等价于(1.1)虽对任何 $y\in X$，有唯一解 x，但 x 并不连续地依赖于 y.

记 $\sigma_c(A)=\sigma(A)-\sigma_p(A)$，称 $\sigma_c(A)$ 是 A 的连续谱.

显然，当 X 是 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$ 时，由逆算子定理可知(iii)不出现.

此外，为求解性的需要还引入一些其它谱的概念. 例如：当 $\lambda\in\sigma(A)$ 时，如果存在 $\{x_n\}(\|x_n\|=1,\ n=1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}(A-\lambda I)x_n=0, \tag{1.4}$$

称 λ 是 A 的近似谱点，其全体记为 $\sigma_a(A)$，称 $\sigma_a(A)$ 是 A 的近似谱；当 $\lambda\in\sigma(A)$ 时，如果存在正数 δ，使得

$$\|(A-\lambda I)x\|\geqslant\delta\|x\|,\ x\in\mathscr{D}(A),$$

称 λ 是 A 的剩余谱点，其全体记为 $\sigma_r(A)$，称 $\sigma_r(A)$ 是 A 的剩余谱。

显然，$\sigma_r(A)\cap\sigma_a(A)=\phi$；当 $\lambda\in\sigma_p(A)$ 时，$x_0\in\Phi_\lambda(A)$，$\|x_0\|=1$，恒取 $x_n=x_0(n=1,\ 2,\ \cdots)$，易知 $\{x_n\}$ 满足(1.4)，从而

$$\sigma_p(A)\subset\sigma_a(A).$$

从正则点和特征值的定义，易知有下列性质。

引理 1 设 X 是复赋范线性空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$（或 A 是 X 上稠定线性算子），下列命题成立。

(i) $\lambda\in\rho(A)$ 的充要条件是存在常数 m，方程(1.1)不仅对一切 $y\in X$，有解 x，而且 $\|x\|\leqslant m\|y\|$。

(ii) $\lambda\overline{\in}\sigma_p(A)$ 的充要条件是 $A-\lambda I$ 是单射；当 $\lambda\overline{\in}\sigma_p(A)$ 并且 $\dim X<\infty$ 时，$\lambda\in\rho(A)$。

(iii) 如果 $\mathscr{R}(A-\lambda I)$ 是闭的。那末，对于 $y\in X$，(1.1) 可解的充要条件是 y 与共轭齐次方程

$$(A^*-\lambda I)f=0 \tag{1.5}$$

的一切非零解 f 直交（即 $f(y)=0$）。

(iv) $\lambda\in\sigma_p(A)$，对于某个 $y\in X$，(1.1)有解 x，那末相应于 y 的通解是 $x+x_0$，$x_0\in\Phi_\lambda(A)$。

证明 (i) 必要性是显然的，并且可取 $m=\|(A-\lambda I)^{-1}\|$。

充分性 显然，由假设条件可知 $A-\lambda I$ 是满射。现再证 $A-\lambda I$ 是单射：事实上，如果对某个 $y\in X$，存在 x_1、x_2，使得 $(A-\lambda I)x_i=y(i=1,\ 2)$，从而 $(A-\lambda I)(x_1-x_2)=0$。因此

$$\|x_1-x_2\|\leqslant m\|0\|=0.$$

即 $(A-\lambda I)$ 是单射，从而 $(A-\lambda I)^{-1}$ 存在。再由假设又得到

$$\|(A-\lambda I)^{-1}y\|\leqslant m\|y\|$$

对任何 $y\in X$ 成立。从而 $\lambda\in\rho(A)$。

(ii) 显然，$\lambda\overline{\in}\sigma_p(A)$ 等价于 $A-\lambda I$ 是单射，

当 $\lambda\overline{\in}\sigma_p(A)$ 时，$A-\lambda I$ 是单射，从而 $A-\lambda I$ 将一组线性无关向量映射成线性无关的。如果 $\dim X=n<\infty$，那末 $A-\lambda I$ 将 X 的线性基 e_1、$\cdots$、e_n 映成线性基，从而 $A-\lambda I$ 是满射。这样，

$(A-\lambda I)^{-1}$ 是定义在整个 X 的，但有限维空间上任何线性算子都连续，所以 $\lambda\in\rho(A)$.

(iii) 显然，对任何 λ，方程 (1.1) 可解的充要条件是 $y\in\mathscr{R}(A-\lambda I)$. 根据第五章 §3 定理 8 的(5)（当 A 是稠定算子时，根据第五章 §3 定理 10 的(7)），

$$\mathscr{R}(A-\lambda I)=\overline{\mathscr{R}(A-\lambda I)}=\mathscr{N}(A^*-\lambda I)^{\perp}\cap X,$$

所以 (iii) 成立.

(iv) 显然的. 证毕.

当 X 是复内积空间时，引理 1 中除 (1.5) 要换成

$$(A^*-\bar{\lambda}I)f=0 \tag{1.5$'$}$$

外，其余一切结论仍然成立.

线性算子谱论的基本课题是给出正则点时的豫解算子；给出算子 A 的谱的分布、分类、结构以及它们和空间 X 中的向量之间的联系.

2. 例

例 1 设 X 是复 n 维线性空间，A 是 X 上的线性算子，在 X 的基 e_1、…、e_n 下，A 相应于阵 $(\alpha_{\mu\nu})$，如果记

$$Ax=y,\quad x=\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu,\quad y=\sum_{\mu=1}^{n}y_\mu e_\mu,$$

那末 $y_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\mu\nu}x_\nu$. 方程 (1.3) 就是线性方程组

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{\mu\nu}x_\nu^{(0)}=\lambda x_\mu^{(0)},\quad \mu=1,\ 2,\ \cdots,\ n, \tag{1.6}$$

其中 $x_0=\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^{(0)}e_\nu$. 因此，$\lambda\in\sigma_p(A)$ 的充要条件是 λ 是阵 $(\alpha_{\mu\nu})$ 的特征值. 而 λ 的重复度就是线性方程组 (1.6) 的线性独立的最大解组中解的个数. 如果系数阵 $(\alpha_{\mu\nu}-\lambda\delta_{\mu\nu})$ 的秩为 $n-r$，那末重复度就是 r.

例 2 设 X 是(复) $C[0,1]$，$\mathscr{D}(A)=\{f\,|\,f''\in C[0,1],\ f(0)=f(1),\ f'(0)=f'(1)\}$，定义 $\mathscr{D}(A)\to X$ 的微分算子 A 如下：

$$Ax=-x'',\quad x\in\mathscr{D}(A).$$

由于微分方程 $-x''=\lambda x$ 的通解是

$$x(t)=a\cos\sqrt{\lambda}\,t+b\sin\sqrt{\lambda}\,t, \tag{1.7}$$

当 $\lambda\neq(2n\pi)^2$, $n=0$, ±1, ±2, $\cdots$ 时, 上述通解中除恒为 0 的函数外, 不可能有 $\mathscr{D}(A)$ 中函数. 当 $\lambda=(2n\pi)^2$, $n=0$, ±1, ±2, $\cdots$ 时, 上述通解都在 $\mathscr{D}(A)$ 中. 因此, A 具有特征值 $(2n\pi)^2$, $n=0$, ±1, ±2, $\cdots$, 而与 $(2n\pi)^2$ 相应的特征子空间具有基 $\cos 2n\pi t$、$\sin 2n\pi t$.

例 3 设 X 是(复) $C[-1,1]$,

$$\mathscr{D}(A)=\{f\,|\,f''\in C[-1,1]\}.$$

定义 $\mathscr{D}(A)\to X$ 的算子 A 如下:

$$Ax=[(t^2-1)x']',\quad x\in\mathscr{D}(A),$$

其中 t 是函数 $x(t)$ 的自变数. 由二阶微分方程理论易知方程

$$[(t^2-1)x']'-\lambda x=0,$$

当 $\lambda\neq n(n+1)$ 时, 没有二阶连续可微的非零解 x. 而当

$$\lambda=n(n+1)$$

时, 上述方程解必为(Legende 多项式)

$$x(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(t^2-1)^n$$

的常数倍. 因此 $\sigma_p(A)=\{n(n+1)\,|\,n=1,2,\cdots\}$, 相应于 $n(n+1)$ 的特征向量, 除常数因子外是 Legende 多项式.

例 4 设 X 是(复) $L^2(0,\infty)$, $\mathscr{D}(A)=\{f\,|\,f\in X,\ f''\in X\}$, 作 $\mathscr{D}(A)\to X$ 的算子 A 如下:

$$Ax=x'',\ x\in\mathscr{D}(A).$$

由于 $x''=k^2x$ 的通解为 $x(t)=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}$, 这种函数属于 $\mathscr{D}(A)$ 的充要条件是 (i) $\mathrm{Re}\,k>0$, $C_1=0$, 或 $\mathrm{Re}\,k<0$, $C_2=0$. 因此 $\lambda\in\sigma_p(A)$ 的充要条件是 $\lambda=k^2$, $\mathrm{Re}\,k\neq0$, 即 λ 不是零或负数, 而相应的特征向量形如

$$x(t)=ae^{\sqrt{\lambda}t},\quad \mathrm{Re}\sqrt{\lambda}<0,$$

因而重复度是 1.

此例说明算子的点谱可以是区域.

例 5 设 X 是复 $C[a,b]$, 作算子 A 如下:

$$(Ax)(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau,\quad x(t)\in C[a,\ b].$$

从方程

$$\int_a^t x(\tau)d\tau=\lambda x(t),\quad x(t)\in C[a,\ b],\tag{1.8}$$

容易看出：对任何 λ，(1.8)只有零解，所以 $\sigma_p(A)=\emptyset$.

例 6 设 X 是复 $C[a,\ b]$，$K(s,\ t)$是 $a\leqslant s\leqslant b,\ a\leqslant t\leqslant b$ 上二元连续函数. 作算子 A 如下：

$$(Ax)(s)=\int_a^b K(s,\ t)x(t)dt,\quad x(t)\in C[a,\ b],$$

那末 λ 是 A 的特征值的充要条件是积分方程

$$\lambda x(s)-\int_a^b K(s,\ t)x(t)dt=0\tag{1.9}$$

具有非零解. 如果 $K(s,\ t)$形如 $\sum_{\nu=1}^n f_\nu(s)g_\nu(t)$（此时，称 $K(s,\ t)$ 是退化核），而且 f_1、…、f_n 是 $C[a,\ b]$ 中线性无关组. 那末，(1.9)化成

$$\lambda x(s)-\sum_{\nu=1}^n\int_a^b g_\nu(t)x(t)dt\quad f_\nu(s)=0.\tag{1.10}$$

当 $\lambda=0$ 时，$x(t)$是特征向量的充要条件是适合

$$\int_a^b g_\nu(t)x(t)dt=0,\quad \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

的非零函数. 容易看出，相应于特征值 0 的特征子空间是无限维的. 当 $\lambda\neq0$ 时，(1.10)的解必可表示为

$$x(s)=\sum_{\nu=1}^n\alpha_\nu f_\nu(s),\tag{1.11}$$

此时再代入(1.10)，利用 f_1、…、f_n 是线性无关的，可知(1.11)的解中的 α_ν（见(1.11)）必适合线性方程组

$$\sum_{\mu=1}^n\alpha_\mu\int_a^b g_\nu(t)f_\mu(t)dt=\lambda\alpha_\nu,\quad \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\tag{1.12}$$

因而当 $\lambda\neq0$ 时，$\lambda\in\sigma_p(A)$的充要条件是 λ 是方程组(1.12)（α_1、…、α_n 为未知数）的特征值，而且重复度与(1.12)的线性独立最大解组中解的个数一致. 这时，如要求出特征向量，只要求出(1.12)

中不全为零的 α_1、…、α_n 的解组，并代入(1.11)即可。

由例 1～6 可见，即使仅考察算子的点谱 σ_p，也由于算子的不同，会出现种种不同分布，更不必说一般的谱的分布了。

例 7　设 X 是复 $C[a, b]$，作算子 A 如下：

$$(Ax)(t)=tx(t),\quad x(t)\in C[a, b]. \tag{1.13}$$

显然，当 $\lambda\overline{\in}[a, b]$ 时，算子

$$(B_\lambda x)(t)=\frac{1}{t-\lambda}x(t),\quad x(t)\in C[a, b], \tag{1.14}$$

是 $C[a, b]$ 上有界线性算子，并且 $(A-\lambda I)B_\lambda=B_\lambda(A-\lambda I)=I$。所以 $\lambda\in\rho(A)$，并且 $(A-\lambda I)^{-1}=B_\lambda$。

当 $\lambda\in[a, b]$ 时，容易在 $C[a, b]$ 中取一列单位向量 $\{x_n\}$，使得当 $n\to\infty$ 时，

$$\|(A-\lambda I)x_n\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|(t-\lambda)x_n(t)|\to 0, \tag{1.15}$$

这样，$\lambda\in\sigma_a(A)\subset\sigma(A)$。

例 8　设 X 是复 $L([a, b]\times[a, b])$，$\varphi(x, y)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$ 上勒贝格可测函数，作算子

$$A:\ f(x, y)\mapsto\varphi(x, y)f(x, y),\quad f(x, y)\in X. \tag{1.16}$$

$C\in\mathbb{C}$，如果对任何 $\varepsilon>0$，集 $\{(x, y)\,|\,|\varphi(x, y)-C|<\varepsilon\}$ 的平面勒贝格测度不等于零，称 C 是 φ 的本质值，φ 的本质值全体记为 $\sigma(\varphi)$（例如 φ 是二元连续函数时，$\sigma(\varphi)=\mathscr{R}(\varphi)$）。今证

$$\sigma(A)=\sigma(\varphi).$$

当 $\lambda\in\sigma(\varphi)$ 时，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}(n=1, 2, \cdots)$，集

$$E_n=\left\{(x, y)\,\middle|\,|\varphi(x, y)-\lambda|<\frac{1}{n}\right\}$$

具有正勒贝格测度，在 X 中取单位向量 $x_n(x, y)$，但要满足（显然是存在的）

$$x_n(x, y)=0,\quad (x, y)\overline{\in}E_n,$$

从而

$$\|(A-\lambda I)x_n\|=\int_{[a,b]\times[a,b]}|\varphi(x,y)-\lambda||x_n(x,y)|dx\,dy$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\int_{E_n}|x_n(x,y)|dx\,dy=\frac{1}{n},$$

即 $\lambda\in\sigma_a(A)$，从而 $\sigma(\varphi)\subset\sigma_a(A)\subset\sigma(A)$。

当 $\lambda\overline{\in}\sigma(\varphi)$ 时，总存在某 $\varepsilon_0>0$，使得集

$$E=\{(x,y)\mid|\varphi(x,y)-\lambda|\leqslant\varepsilon_0\}$$

是勒贝格零集。对于这种 λ，作算子

$$B_\lambda:\ f(x,y)\mapsto\frac{1}{\varphi(x,y)-\lambda}f(x,y),\quad f(x,y)\in X.$$

对于 $(x,y)\in E$，修改规定 $\dfrac{1}{\varphi(x,y)-\lambda}$ 的值等于零，易知 B_λ 是 X 上有界线性算子，并且 $(A-\lambda I)B_\lambda=B_\lambda(A-\lambda I)=I$，由此可知 $\lambda\overline{\in}\sigma(A)$。

综合上述结果，得到 $\sigma(\varphi)=\sigma(A)=\sigma_a(A)$。

3. 豫解式

为讨论豫解算子，首先注意两个最基本的事实：

(I) 对任何数 a，当 $|a|<1$ 时，

$$\frac{1}{1-a}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k.\tag{1.17}$$

(II) 设 $\{a_n\}$ 是一列数，如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<1,\tag{1.18}$$

那末 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

将上述事实应用于算子，就有下列引理。

引理 2 设 X 是复 Banach 代数（见第五章§1第三小节）$A\in X$，下列命题成立。

(1) 当 $\|A\|<1$ 时，

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k.\tag{1.19}$$

(2) 如果 $|\lambda|<\frac{1}{r_0}$ ($r_0=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|A^n\|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$[注], 当 $r_0=0$ 时, $\frac{1}{r_0}$ 表示 ∞), 那末

$$(I-\lambda A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A^k. \tag{1.20}$$

(3) 当 $|\lambda|>r_0$ 时,

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}. \tag{1.21}$$

特别, 当 $|\lambda|>\|A\|$ 时, 不仅展开式(1.21)成立, 而且

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}. \tag{1.22}$$

证明 (1) 由于

$$\left\|\sum_{n}^{m}A^k\right\|\leqslant\sum_{n}^{m}\|A^k\|\leqslant\sum_{n}^{m}\|A\|^k\leqslant\|A\|^n(1-\|A\|)^{-1},$$

所以 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛于一个向量 C, 要证明(1.19), 只要证明

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty}A^k=I=\sum_{k=0}^{\infty}A^k(I-A). \tag{1.23}$$

为此, 记 $\sum_{k=0}^{n}A^k=C_n$. 直接计算, 易知下式成立:

$$(I-A)C_n=I-A^{n+1}=C_n(I-A). \tag{1.24}$$

在(1.24)中, 令 $n\to\infty$, 注意到 $I-A^{n+1}\to I$, $C_n\to C$, 立即得到(1.23).

(2) 当 $|\lambda|r_0<1$ 时, 也就是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|(\lambda A)^n\|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|\lambda^n A^n\|}<1,$$

利用本小节开始所述的基本事实(II), 易知 $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A^k$ 是收敛数. 下面只要将(1)中的 A 换成现在的 λA, 类似可对 λA 证得(1.24), 从而(1.23)成立, 最后便得到(1.20)成立.

(3) 当 $|\lambda|>r_0$ 时, $\lambda\neq 0$, 由于

[注] 根据第五章§1定理7, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$ 总存在.

$$(\lambda I-A)=\lambda\left(I-\frac{A}{\lambda}\right),$$

用这里的 $\frac{A}{\lambda}$ 代替(1.20)中的 λA，立即得到

$$(\lambda I-A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

特别，当 $|\lambda|>\|A\|$ 时，由于

$$r_0=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A\|^n}=\|A\|,$$

所以，当 $|\lambda|>r_0$ 时，(1.21)成立．并且

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A^k\|}{|\lambda^{k+1}|}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{|\lambda|^{k+1}}=\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}.$$

证毕．

当 X 是复 Banach 空间时，$\mathscr{B}(X\to X)$ 按算子范数成为 Banach 代数(见第五章§1 定理 6)．所以，当 $A\in\mathscr{B}(X\to X)$ 时，引理 2 成立．

由引理 2，立即得到下面重要的事实．

定理 1 设 X 是复 Banach 空间，A 是 X 上线性算子，$\mathscr{D}(A)$是它的定义域．如果 $\lambda_0\in\rho(A)$，那末对一切 λ：$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{r_0}$ ($r_0=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|(\lambda_0 I-A)^{-n}\|}$[注])，有展开式

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda_0 I-A)^{-(k+1)}(\lambda-\lambda_0)^k. \quad (1.25)$$

证明 因为

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)&=(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-A)\\&=[(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}+I](\lambda_0 I-A),\end{aligned} \quad (1.26)$$

由引理 2 的(2)可知，当 $r_0|\lambda-\lambda_0|<1$ 时，

$$[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}]^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_0 I-A)^{-k}(\lambda-\lambda_0)^k. \quad (1.27)$$

注意到(1.26)以及 $\lambda_0\in\rho(A)$，由上式立即得到(1.25)．证毕．

下面的系也是基本的．

[注] A^{-n} 表示$(A^{-1})^n$．

系 设 X 是复 Banach 空间，A 是 X 上线性算子，$\mathscr{D}(A)$是它的定义域．那末，$\rho(A)$是开集，从而 $\sigma(A)$是闭集．

证明 如果 $\lambda_0\in\rho(A)$，那末由定理 1，必存在 λ_0 的环境：

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{r_0}\left(r_0=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|(\lambda_0 I-A)^{-n}\|}\right).$$

在这个环境中所有 $\lambda\in\rho(A)$，从而 λ_0 是 $\rho(A)$的内点，因此 $\rho(A)$是开集．自然，$\sigma(A)=\mathbb{C}-\rho(A)$是闭集．证毕．

经上述讨论可知，当 $\lambda_0\in\rho(A)$时，要计算 λ_0 近旁的豫解式

$$R(A;\lambda)=(\lambda I-A)^{-1},$$

按(1.27)，关键是要计算形为$(\lambda_0 I-A)^{-k}$项．特别，当 A 是有界线性算子，要给出$|\lambda|>\|A\|$的豫解式，按引理 2 的(3)，关键是计算形为 A^k 的项．

例如 $X=C[a, b]$，算子

$$A:\ f(t)\mapsto\int_a^b K(t, s)f(s)ds,\quad f\in C[a, b],$$

其中 $K(t, s)$是 $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant b$ 的二元连续函数．直接演算易知

$$A^k:\ f(t)\mapsto\int_a^b\cdots\int_a^b K(t, s_1)K(s_1, s_2)\cdots$$
$$K(s_{k-1}, s)f(s)ds\,ds_{k-1}\cdots ds_1,\quad f\in C[a, b].$$

通常称 $\int_a^b\cdots\int_a^b K(t, s_1)K(s_1, s_2)\cdots K(s_{k-1}, s)ds_{k-1}\cdots ds_1$ 为核 $K(s, t)$的 $k-1$ 次迭合．

4．向量值解析函数

为进一步讨论谱和正则点，将仿普通数值函数的连续性、可微性、解析性引入下面定义．

定义 设 X 是复赋范线性空间，G 是复平面上的子集 f: $G\to X$ 的映射，称 f 是定义在 G 上取值于 X 的(向量值)函数．设 $\lambda_0\in G$，如果

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\|f(\lambda)-f(\lambda_0)\|=0,\tag{1.28}$$

称 λ_0 是 f 的连续点．如果G 中每点都是 f 的连续点，那末称 f 是

G 上的(向量值)连续函数. 设 λ_0 是 G 的内点, 如果存在 $a\in X$, 使得

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-a\right\|=0, \tag{1.29}$$

称 λ_0 是 f 的可微点, a 是 f 在 λ_0 点导数, 记为 $f'(\lambda_0)$; 如果存在一列 X 中向量 $\{a_n\}$ 以及 $\delta>0$, $O(\lambda_0, \delta)\subset G$, 使得

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k,\quad \lambda\in O(\lambda_0, \delta), \tag{1.30}$$

称 λ_0 是 f 的解析点, 当 G 中每点都是解析点时, 称 f 是 G 上的(向量值)解析函数.

显然, 可微点必是连续点. 如果 f 是有界闭集 F 上取值于 X 的连续函数, 易知 f 在 F 上均匀连续, 为了讨论谱, 需下列引理.

引理 3 设 $\{a_n\}$ 是复 Banach 空间 X 中一列向量, $r_0>0$.

(1) 如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|a_n\|}\,r_0<1$, 那末 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_n\|\,|\lambda-\lambda_0|^n$ 在 $|\lambda-\lambda_0|<r_0$ 中处处收敛.

(2) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda-\lambda_0)^n$ 在 $|\lambda-\lambda_0|<r_0$ 中弱收敛(即存在 $|\lambda-\lambda_0|<r_0$ 上函数 $f(\lambda)$, 使对任何 $x^*\in X^*$, $x^*(f(\lambda))=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^*(a_n(\lambda-\lambda_0)^n)$), 那末

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|a_n\|}\,r_0\leqslant 1; \tag{1.31}$$

反之, 如果(1.31)成立, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda-\lambda_0)^n$ 必在 $|\lambda-\lambda_0|<r_0$ 中处处按范数收敛.

证明 上述性质的证明除用到共鸣定理外, 其余完全仿复变函数论中方法.

(1) 这是复变函数中已有的结果[注].

[注] 对任何 $\lambda\in\{\mu\,|\,|\mu-\lambda_0|<r_0\}$, 记 $\varepsilon=r_0-|\lambda-\lambda_0|>0$. 由假设, 存在 n_0, 当 $n\geqslant n_0$ 时, $\sqrt[n]{\|a_n\|}<\dfrac{1}{r_0-\frac{\varepsilon}{2}}$, 从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_n\|\,|\lambda-\lambda_0|^n<\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\dfrac{r_0-\varepsilon}{r_0-\frac{\varepsilon}{2}}\right|^n<\infty$.

(2) 充分性 由假设(1.31)，据本引理(1)，$\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\||\lambda-\lambda_0|^n$ 在 $|\lambda-\lambda_0|<r_0$ 中收敛，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda-\lambda_0)^n$ 在 $|\lambda-\lambda_0|<r_0$ 中处处按范数收敛.

必要性 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda-\lambda_0)^n$ 是弱收敛的，所以对任何 $x^*\in X^*$，$\sum_{n=0}^{\infty}x^*(a_n)(\lambda-\lambda_0)^n$ 是 $|\lambda-\lambda_0|<r_0$ 上数值解析函数. 由 Cauchy-Adams 定理，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x^*(a_n)|}\leqslant\frac{1}{r_0},$$

所以，对任何 $\varepsilon>0(\varepsilon<r_0)$，必存在常数 $M(\varepsilon, x^*)$，使得

$$|x^*(a_n(r_0-\varepsilon)^n)|\leqslant M(\varepsilon, x^*),\quad n=0, 1, 2, \cdots. \tag{1.32}$$

由共鸣定理，$\{a_n(r_0-\varepsilon)^n\}$ 应是 X 上有界点列. 从而存在常数 M，使得

$$\|a_n(r_0-\varepsilon)^n\|\leqslant M,\quad n=0, 1, 2, \cdots, \tag{1.33}$$

因而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|a_n\|}\leqslant\frac{1}{r_0-\varepsilon}. \tag{1.34}$$

在(1.34)中，令 $n\to\infty$，立即得到(1.31).

5. 谱半径

利用(向量值)解析函数概念就可以获得泛函分析中有关谱的一些重要结论.

定义 设 X 是复 Banach 空间，A 是 X 到 X 的线性算子，$\mathscr{D}(A)$是它的定义域. 称

$$r(A)=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$$

为 A 的谱半径.

当 $A\in\mathfrak{B}(X\to X)$ 时，因为 $\mathfrak{B}(X\to X)$ 按算子范数成为 Banach 代数，由引理 2 的(3)可知，

$$\sigma(A)\subset\{\lambda\,|\,|\lambda-\lambda_0|\leqslant r_0\}\ (r_0=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}),$$

从而 $r(A)\leqslant r_0$. 下面我们证明 $r(A)\geqslant r_0$.

定理 2(И. М. Гельфанд) 设 X 是复 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$. 那末

$$r(A)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}. \tag{1.35}$$

证明 记

$$r_0=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

正如上面所说，只要证明 $r(A)\geqslant r_0$.

当 $|\lambda|\geqslant\|A\|$ 时，由引理 2 的(3)，

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}. \tag{1.36}$$

视 $\mathfrak{B}(X\to X)$ 是按算子范数所成的 Banach 空间. 由于(1.36) 按算子范数收敛，所以对任何 $f\in\mathfrak{B}(X\to X)^*$,

$$f((\lambda I-A)^{-1})=\sum_{k=0}^{\infty}f(A^k)\frac{1}{\lambda^{k+1}},\quad |\lambda|>\|A\|. \tag{1.37}$$

但是，根据定理 1，豫解式$(\lambda I-A)^{-1}$在 $\rho(A)$ 中任何一点都是解析的，从而 $f((\lambda I-A)^{-1})$在$|\lambda|>r(A)$中是数值解析函数. 既然，$f((\lambda I-A)^{-1})$在$|\lambda|>\|A\|$ 中已有 Laurent 展开(1.38)，因而(1.38)右边级数必可解析延拓到 $|\lambda|>r(A)$上，再由解析函数唯一性，展开式(1.38)应在$|\lambda|>r(A)$上成立，即

$$f((\lambda I-A)^{-1})=\sum_{k=0}^{\infty}f(A^k)\frac{1}{\lambda^{k+1}},\qquad |\lambda|>r(A),$$

对任何 $f\in\mathfrak{B}(X\to X)^*$ 成立. 由引理 3 的 (2) (取引理 3 中的 a_n 为 A^n，$(\lambda-\lambda_0)^n$ 为 $\frac{1}{\lambda^{n+1}}$，x^* 为 f)的(1.31)立即得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|A^n\|}\,\frac{1}{r(A)}\leqslant 1,$$

即 $r(A)\geqslant r_0$，从而(1.35)成立. 证毕.

再利用解析性的讨论来证明谱的非空性质.

定理 3(И. М. Гельфанд) 设 X 是复 Banach 空间，A 是 X 到 X 的线性算子，并且 $\mathscr{D}(A)$是闭线性子空间，那末 $\sigma(A)\neq\emptyset$. 特别，当 $A\in\mathfrak{B}(X\to X)$时，$\sigma(A)\neq\emptyset$.

证明(反证法) 如果 $\sigma(A)=\emptyset$，那末 $(A-\lambda I)^{-1}$ 在 $\mathbb{C}$ 上解

析，从而对任何 $f\in\mathscr{B}(X\to X)^*$, $f((A-\lambda I)^{-1})$ 是 $\mathbb{C}$ 上数值解析函数. 今证：当 $\lambda\to\infty$ 时，$f((A-\lambda I)^{-1})\to 0$.

事实上，因为 $0\in\rho(A)$，A^{-1} 是 X 到(Banach 空间)$\mathscr{D}(A)$ 的有界线性算子，由逆算子定理，A 是 $\mathscr{D}(A)$ 到 X 的有界线性算子，记 A 的范数为 $\|A\|$. 对任何 $y\in X$, $\|y\|=1$, 以及任何 $\lambda\neq 0$, 必存在 $x\in\mathscr{D}(A)$，使得

$$(A-\lambda I)x=y,$$

即 $\left(\frac{A}{\lambda}-I\right)x=\frac{y}{\lambda}$，从而当 $|\lambda|>2\|A\|$ 时，

$$\frac{1}{2}\|x\|\leqslant\|x\|-\left\|\frac{A}{\lambda}x\right\|\leqslant\left\|x-\frac{A}{\lambda}x\right\|=\left\|\frac{y}{\lambda}\right\|=\frac{1}{|\lambda|},\qquad(1.38)$$

即 $\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{2}{|\lambda|}$. 因此，当 $\lambda\to\infty$ 时，$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\to 0$, 自然，更有 $f((A-\lambda I)^{-1})\to 0$.

由 Liouville 定理，全平面解析函数 $f((A-\lambda I)^{-1})$ 恒等于 0. 特别，当 $\lambda=0$ 时，

$$f(A^{-1})=0,\quad f\in\mathscr{B}(X\to X)^*,\qquad(1.39)$$

但 A^{-1} 是 Banach 空间 $\mathscr{B}(X\to X)$ 的非零元，由 Hahn-Banach 泛函延拓定理知道(1.39)不可能成立. 从而 $\sigma(A)\neq\emptyset$. 证毕.

现在举一个例子说明定理 3 中 $\mathscr{D}(A)$ 是闭的假设是不可少的. 为此引入如下定义.

定义　设 X 是复赋范线性空间，A 是 X 上有界线性算子. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}=0,$$

称 A 是广义幂零算子.

广义幂零算子是有限维空间中幂零算子概念在一般维数情况下的推广，它是谱论中一个重要的算子. 显然，有界线性算子 A 是广义幂零的充要条件是 $\sigma(A)=\{0\}$.

例 9　本节例 5 中算子

$$A:\quad x(t)\mapsto\int_a^t x(\tau)d\tau,\ x(t)\in C[a,\ b],$$

是复 Banach 空间 $C[a, b]$ 上的有界线性算子. 由于

$$(A^n x)(t)=\int_a^t\int_a^{t_1}\cdots\int_a^{t_{n-1}} x(\tau)d\tau dt_{n-1}\cdots dt_1,\quad x(t)\in C[a, b],$$

所以
$$|(A^n x)(t)|\leqslant\|x\|\frac{(b-a)^n}{n!},$$

从而 $\|A^n\|\leqslant\frac{(b-a)^n}{n!}$. 由此可知 A 是广义幂零算子.

利用广义幂零算子就可以给出谱可以是空集的算子.

例 10 设 A 是复无限维 Banach 空间 X 上的广义幂零算子, 并且假设 A 是单射(显然, 例 9 中的 A 就是一例), 那末线性算子 $A^{-1}(\mathscr{D}(A^{-1})=\mathscr{R}(A))$ 的谱 $\sigma(A^{-1})=\emptyset$.

事实上, 因为 A 是全空间定义的有界线性算子, 所以 $0\in\rho(A^{-1})$. 又因为 A 是广义幂零的, 所以对任何 $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}A^{n+1}\lambda^n$$

按算子范数收敛. 显然

$$(A^{-1}-\lambda I)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^{n+1}\lambda^n,\quad \lambda\in\mathbb{C},\tag{1.40}$$

所以 $\rho(A^{-1})=\mathbb{C}$, 即 $\sigma(A^{-1})=\emptyset$.

附　　录

6. 可微与解析

为了进一步讨论谱, 这一小节将讨论(向量值)函数的可微性和解析性的关系. 首先引入(向量值)函数的积分.

定义 设 X 是复 Banach 空间, Γ 是平面上一条有限长度的光滑曲线, $\Gamma=\{z(t)\,|\,a\leqslant t\leqslant b,\ z(t)\in\mathbb{C}\}$[注], f 是定义在 Γ 上取值于 X 的(向量值)函数. 对 $[a, b]$ 上任何分点组

$$D:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

作和式

$$S(D, f)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(z_i-z_{i-1}),\tag{1.41}$$

[注] $z(t)$ 是 $[a, b]$ 上连续、复值有界变差函数即可. 我们不打算讨论无限长度曲线上积分.

其中 $z_i=z(t_i)$，ξ_i 是弧 $\widehat{z_{i-1}z_i}$ 上任一点．令 $\lambda=\max\limits_i|z_i-z_{i-1}|$．如果存在 $x_0\in X$，使得

$$\lim_{\lambda\to 0}\|S(D, f)-x_0\|=0, \tag{1.42}$$

那末，称 f 在 Γ 上是可积的，而称 x_0 是 f 在 Γ 上的**积分**．通常记 x_0 为 $\int_\Gamma f(z)dz$．

当 Γ 是有限互不相交条光滑曲线 γ_1、…、γ_n 的和时，用 $\int_\Gamma fdz$ 表示 $\sum\limits_i\int_{\gamma_i}f(z)dz$．特别，当 Γ 是平面 $\mathbb{C}$ 上某个区域（单连或多连）的光滑境界时，每个积分 $\int_{\gamma_i}fdz$ 都是按所围区域的正向方式定义的．

引理 4 设 Γ 是有限长度的光滑曲线．f 是定义在 Γ 上取值于复 Banach 空间上的函数，如果 f 是连续的，那末 f 在 Γ 上必可积，并且

$$\left\|\int_\Gamma fdz\right\|\leqslant\int_\Gamma\|f\|\,|dz|,$$

$$x^*\left(\int_\Gamma fdz\right)=\int_\Gamma x^*(f)dz,\quad x^*\in X^*. \tag{1.43}$$

引理 4 中的积分存在性可利用 f 在 Γ 上的均匀连续性完全仿数值函数情况的证明方法加以证明，而(1.43)是显然的．希读者把引理 4 严格地加以证明．

定理 4 **设 f 是定义在平面的区域 G 上，取值于复 Banach 空间 X 上的函数，它在 G 上处处可微的充要条件是 f 在 G 上解析．如果 $\lambda_0\in G$ 是 f 的解析点，即存在 $\delta>0$，$\{a_n\}\subset X$，**

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda-\lambda_0)^k,\quad |\lambda-\lambda_0|<\delta, \tag{1.30$'$}$$

那末 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 中所有 λ 都是 f 的解析点，并且

$$f^{(n)}(\lambda)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(\lambda-\lambda_0)^{k-n},\quad n=1, 2, \cdots. \tag{1.44}$$

证明 分三步来证：

(1) 假设 f 在 $O(\lambda_0, r_0)(\subset G)$ 上处处可微，证明 λ_0 是 f 的解析点．事实上，从可微性假设，易知对任何 $x^*\in X^*$，数值函数 $x^*(f(\lambda))$ 也在 $O(\lambda_0, r_0)$ 上处处可微，因而 $x^*(f(\lambda))$ 是在 $O(\lambda_0, r_0)$ 上解析的数值函数．任取 $\lambda'\in O(\lambda_0, r_0)$，取围道 Γ：$|\lambda-\lambda_0|=a(|\lambda'-\lambda_0|<a<r_0)$．由 Cauchy 积分公式，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{x^*(f(\lambda))}{\lambda-\lambda'}d\lambda=x^*(f(\lambda')). \tag{1.45}$$

当 λ' 固定时，f 在 Γ 上连续，从而 $\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda')^n}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 在 Γ 上都可积. 由引理 4 的(1.43),

$$x^*(f(\lambda'))=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x^*(f(\lambda))}{\lambda-\lambda'}\,d\lambda$$
$$=x^*\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda-\lambda'}\,d\lambda\right),\quad x^*\in X^*.$$

从而

$$f(\lambda')=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda-\lambda'}\,d\lambda,\quad |\lambda'-\lambda_0|<a<r_0 \tag{1.46}$$

(即 Cauchy 积分公式对向量值处处可微函数也成立).

证 λ_0 是 f 的解析点: 记

$$M=\sup_\Gamma\|f(\lambda)\|,$$

因而

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\,d\lambda\right\|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\|f(\lambda)\|}{|\lambda-\lambda_0|^{n+1}}\,|d\lambda|\leqslant\frac{M}{a^n}, \tag{1.47}$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\,d\lambda(\lambda'-\lambda_0)^n$ 在 $|\lambda'-\lambda_0|<a$ 内收敛. 再利用(1.46)、(1.47), 立即有

$$f(\lambda')=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)-(\lambda'-\lambda_0)}\,d\lambda$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\,d\lambda(\lambda'-\lambda_0)^n,\quad |\lambda'-\lambda_0|<a, \tag{1.48}$$

这就是说, f 在 $O(\lambda_0, a)$ 中可以展开成级数, 从而 λ_0 是 f 的解析点.

由于 λ_0 是 G 中可以任意选取, 因而 f 在 G 中每点都解析, 从而 f 是 G 上解析函数.

(2) 假设 λ_0 是 f 的解析点, 证明必是可微点. 事实上, 因 λ_0 是解析点, 所以存在 δ, 使得(1.30)′ 成立. 根据引理 3 的(2), 得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[k]{\|a_k\|}\,\delta\leqslant 1,$$

从而正项级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|a_k\|r^k$ 在 $[0, \delta)$ 中收敛, 因此 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|a_k\|kr^{k-1}$ 在 $[0, \delta)$ 中也收敛. 记 $|\lambda-\lambda_0|=r$, $|\lambda'-\lambda|=\Delta$, 并令 $r+\Delta<\delta$. 利用

$$\left|\frac{(\lambda'-\lambda_0)^k-(\lambda-\lambda_0)^k}{\lambda'-\lambda}\right|\leqslant k(r+\Delta)^{k-1},$$

立即可知当 $\lambda'\to\lambda$ 时, 下式中级数与极限可交换顺序:

$$\frac{f(\lambda')-f(\lambda)}{\lambda'-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{(\lambda'-\lambda_0)^k-(\lambda-\lambda_0)^k}{\lambda'-\lambda},$$

从而

$$f'(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_k(\lambda-\lambda_0)^{k-1},\quad |\lambda-\lambda_0|<\delta,\tag{1.49}$$

即不仅 $f(\lambda)$ 在 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 中每点都可微，而且也证明(1.44)式中 $n=1$ 的情况成立。

利用本定理的第(1)步所得到的事实，不仅 λ_0 是 f 的解析点，而且 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 中一切点都是 f 的解析点。

(3) 在第(2)步中，事实上我们证明了：如果 λ_0 是 f 的解析点，那末必存在 λ_0 的环境，其中每点都是 f 的解析点。第(2)步还证明：只要 λ_0 是解析点，那末 f' 有展开式(1.49)，即 λ_0 也是 f' 的解析点，从而对 f' 可用第(2)步结论，按此用归纳法，立即得到(1.44)。证毕。

为了进一步讨论解析点近旁展开式 (1.30)′ 的展开范围以及 Cauchy 积分公式，类似数值函数情况先给出如下引理。

引理 5 设 f 是区域 G 上取值于复 Banach 空间 X 的解析函数，Γ 是 G 中闭光滑围道，并且在 Γ 内部 f 解析。那末

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=0.\tag{1.50}$$

证明 事实上，对任何 $x^*\in X^*$，利用上式对数值函数已成立的事实，立即有

$$x^*\left(\int_\Gamma f(z)\,dz\right)=\int_\Gamma x^*(f(z))\,dz=0,$$

从而(1.50)成立。证毕。

系 设 f 是区域 G 上取值于复 Banach 空间 X 的解析函数，$\lambda_0\in G$，Γ 是 G 中闭光滑围道，λ_0 在 Γ 的内部，并且 f 在 Γ 内部解析，那末

$$f^{(k)}(\lambda_0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}}\,d\lambda,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.\tag{1.51}$$

如果令 r_0 是 λ_0 到 G 的境界 ∂G 的最短距离，那末

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\lambda_0)}{k!}(\lambda-\lambda_0)^k,\quad |\lambda-\lambda_0|<r_0.\tag{1.52}$$

证明 取围道 Γ': $|\lambda-\lambda_0|=a$ ($|\lambda'-\lambda|<a<r_0$)，由定理 4 的第(1)步的证明所得(1.48)式，立即有

$$f(\lambda')=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}d\lambda(\lambda'-\lambda_0)^n,\quad |\lambda'-\lambda_0|<a.$$

令 $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\,d\lambda$，上式说明 f 在 $|\lambda'-\lambda_0|<a$ 上展开成

$$f(\lambda')=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda'-\lambda_0)^n,\quad |\lambda'-\lambda_0|<a.$$

如果又取围道 Γ'': $|\lambda-\lambda_0|=b(a<b<r_0)$，并注意到引理 5，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}d\lambda,$$

所以又有展开式

$$f(\lambda')=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda'-\lambda_0)^n,\quad |\lambda'-\lambda_0|<b,$$

但 a、b 是任取的(只要 $a<b<r_0$)，所以成立展开式

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda-\lambda_0)^n,\quad |\lambda-\lambda_0|<r_0. \tag{1.53}$$

根据展开式(1.53)，和定理 4 的(1.44)，立即有

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\lambda_0)\quad\left(a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}d\lambda\right), \tag{1.54}$$

即(1.52)成立。

对于任何以 λ_0 为内部点的闭光滑围道 Γ (并且 f 在 Γ 内部解析)，取充分小的 Γ'，使 Γ' 整个落在 Γ 内部．由引理 5，又有

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}d\lambda,$$

利用(1.54)就得到(1.51)．证毕。

7．解析演算和谱映射

设 A 是复 Banach 空间 $\mathbf{X}$ 上有界线性算子，$\sigma(A)$是它的谱．算子 A^2、A^3 的谱是什么？容易直接证明

$$\sigma(A^2)=\{\lambda^2|\lambda\in\sigma(A)\},$$
$$\sigma(A^3)=\{\lambda^3|\lambda\in\sigma(A)\}.$$

更一般地，对任何多项式

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n}a_it^i,$$

规定

$$p(A)=\sum_{i=0}^{n}a_iA^i$$

时，也有(可直接证明)

$$\sigma(p(A))=\{p(\lambda)|\lambda\in\sigma(A)\}.$$

下面将讨论更为一般的情况。

首先注意，$(\lambda I-A)^{-1}$ 在 $\rho(A)$ 中是算子值解析函数(见定理 1 的(1.25))．当然，也可视$(\lambda I-A)^{-1}$ 定义在 $\rho(A)$ 上取值于复 Banach 空间 $\mathscr{B}(X\to X)$的向量值解析函数．因而前几小节中的解析理论是可以应用的．用 $\mathscr{A}(A)$表示在 $\sigma(A)$的某环境中数值解析函数全体(不同的函数可在

不同的$\sigma(A)$的环境中解析）。显然，对每个$\varphi\in\mathscr{A}(A)$，总存在闭光滑围道Γ，使其内部区域$G_\varphi\supset\sigma(A)$，并且$\varphi$在$G\cup\Gamma$上部解析，从而$\varphi(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}$在$\Gamma$上是可积的，规定

$$\varphi(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\varphi(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda. \tag{1.55}$$

由引理5，$\varphi(A)$的定义不依赖于上述要求的Γ的选取。从而$\tau:\varphi\mapsto\varphi(A)$就成为$\mathscr{A}(A)$到$\mathfrak{B}(X\to X)$的映射。

定理5　映射τ具有如下性质：

(1) τ是$\mathscr{A}(A)\to\mathfrak{B}(X\to X)$的线性、可乘映射，即

$$(\alpha\varphi+\beta\psi)(A)=\alpha\varphi(A)+\beta\psi(A),\quad \alpha、\beta\in\mathbb{C},\ \psi、\varphi\in\mathscr{A}(A),$$

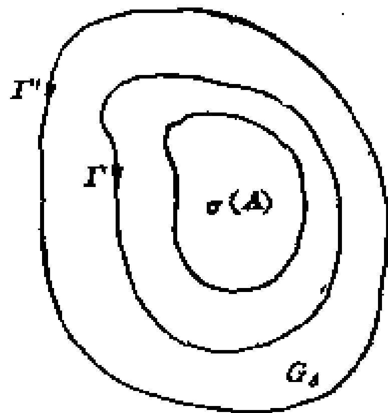
$$(\varphi\psi)(A)=\varphi(A)\psi(A)=\psi(A)\varphi(A),\quad \varphi、\psi\in\mathscr{A}(A).$$

(2) $\varphi\equiv1$时，$\varphi(A)=I$.

(3) $\varphi\equiv\lambda$时，$\varphi(A)=A$.

(4) $\sigma(\varphi(A))=\varphi(\sigma(A))(=\{\varphi(\lambda)\mid\lambda\in\sigma(A)\})$.

证明　(1) 先证τ的线性。G_φ、G_ψ分别是φ、ψ的包含$\sigma(A)$的解析域。在$G=G_\varphi\cap G_\psi$中取闭光滑围道Γ'，使其内部仍包含$\sigma(A)$。因此



$$\begin{aligned}&(\alpha\varphi+\beta\psi)(A)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\alpha\varphi+\beta\psi)(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\alpha\varphi(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\\&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\beta\psi(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\\&=\alpha\varphi(A)+\beta\psi(A).\end{aligned}$$

再证可乘性。先选取围道Γ'如前。再取闭光滑围道

$$\Gamma:\ \Gamma\cap\Gamma'=\emptyset,$$

Γ包含在Γ'的内部，而Γ的内部仍包含$\sigma(A)$，并且Γ、Γ'夹的区域$G_\Delta\subset\rho(A)$（这种Γ总是存在的）。显然，

$$\begin{aligned}\varphi(A)\psi(A)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\varphi(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\psi(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\varphi(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\psi(\mu)(\mu I-A)^{-1}d\mu\\&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\mu-\lambda}[(\lambda I-A)^{-1}-(\mu I-A)^{-1}]d\mu d\lambda.\end{aligned}$$

因为λ在Γ的外部，$\dfrac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\mu-\lambda}(\lambda I-A)^{-1}$作为$\mu$的函数，它在$\Gamma$内部解

析，因而在 Γ 上关于 μ 积分值是零．从而

$$\varphi(A)\psi(A)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\lambda-\mu}(\mu I-A)^{-1}d\mu\,d\lambda$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'}\psi(\mu)(\mu I-A)^{-1}\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda\,d\mu$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\psi(\mu)\varphi(\mu)(\mu I-A)^{-1}d\mu=(\varphi\psi)(A)\text{[注]}.$$

(2) 取 Γ' 为 Γ 外的充分大半径的圆周（不妨设圆半径 $r>\|A\|$），对于 $\varphi\equiv1$，有

$$\varphi(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda$$
$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda=I.$$

(3) 对于 $\varphi\equiv\lambda$，有

$$\varphi(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda(\lambda I-A)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda I-A+A)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda$$
$$=A\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda=A.$$

(4) 先证 $\sigma(\varphi(A))\subset\varphi(\sigma(A))$．因为 $\sigma(A)$ 是紧集，φ 在 $\sigma(A)$ 上连续，所以 $\varphi(\sigma(A))$ 仍是紧集．当 $\lambda_0\overline{\in}\varphi(\sigma(A))$ 时，必存在区域 $G\supset\sigma(A)$，G 的境是闭光滑围道 Γ，使得 φ 在 $G\cup\Gamma$ 上解析，并且 $\varphi(G\cup\Gamma)$ 不含有 λ_0（这种 G 显然可以找到），从而

$$\psi(\lambda)=\frac{1}{\varphi(\lambda)-\lambda_0}$$

在 $G\cup\Gamma$ 上解析，从而 φ、$\psi\in\mathscr{A}(A)$．利用(1)中可乘性，有

$$\psi(A)(\varphi(A)-\lambda_0I)=(\varphi(A)-\lambda_0I)\psi(A)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\varphi(\lambda)-\lambda_0)\psi(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda=I,$$

即 $\sigma(\varphi(A))\subset\varphi(\sigma(A))$．

再证 $\varphi(\sigma(A))\subset\sigma(\varphi(A))$．当 $\lambda_0\in\varphi(\sigma(A))$ 时，存在 $\mu\in\sigma(A)$，使得 $\varphi(\mu)=\lambda_0$，因而

$$\varphi(\lambda)-\varphi(\mu)=(\lambda-\mu)\psi(\lambda),\tag{1.56}$$

[注] 在完成可乘性的证明中，实际上用了（算子值）二元连续函数的二次积分交换顺序．这是允许的，否则读者也可对任何 $x^*\in\mathfrak{B}(X\to X)^*$，直接将算子值变成数值，然后利用数值函数的积分交换顺序而证明 $x^*(\varphi(A)\psi(A))=x^*((\varphi\psi)(A))$ 成立，从而得到 $\varphi(A)\psi(A)=(\varphi\psi)(A)$．

其中 $\psi(\lambda)$ 必也在 $\sigma(A)$ 的某环境中解析，即 $\psi\in\mathscr{A}(A)$．由(1.56)和可乘性，有

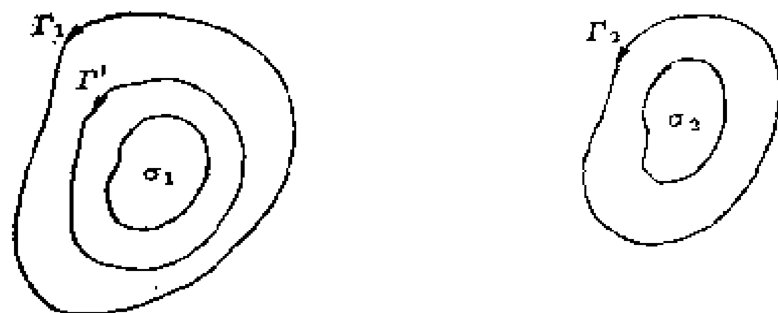
$$\varphi(A)-\varphi(\mu)I=(A-\mu I)\psi(A). \tag{1.57}$$

如果 $\lambda_0\overline{\in}\sigma(\varphi(A))$，那末 $(\varphi(A)-\varphi(\mu)I)^{-1}$ 便是全空间 X 上定义的有界线性算子．由(1.57)便得到

$$\begin{aligned}&(A-\mu I)\psi(A)(\varphi(A)-\varphi(\mu)I)^{-1}\\&=(\varphi(A)-\varphi(\mu)I)^{-1}(A-\mu I)\psi(A)=I.\end{aligned}$$

但是 $\psi(A)$ 与 $(A-\mu I)$、$(\varphi(A)-\varphi(\mu)I)$ 均可交换，上式表示有界线性算子 $\psi(A)(\varphi(A)-\varphi(\mu)I)^{-1}$ 是 $(A-\mu I)$ 的逆算子，这与假设 $\mu\in\sigma(A)$ 相矛盾．因此 $\varphi(\sigma(A))\subset\sigma(\varphi(A))$．证毕．

定理 5 还可作如下推广



定理 6　设 X 是复 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$，$\sigma(A)$ 可分成两个互不相交的非空闭集 σ_1、σ_2 的和．又设 Γ_1 是闭光滑的围道，$\Gamma_1\subset P(A)$，σ_1 包含在 Γ_1 的内部，而 σ_2 在 Γ_1 的外部．那末

(1) 算子 $E=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_1}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda$ 是 X 上有界线性算子，并且是幂等的(即 $E^2=E$)．

(2) $AE=EA$.

(3) 令 $L=\mathscr{R}(E)$，L 是 A 的不变的闭线性子空间，并且

$$\sigma(A|_L)=\sigma_1. \tag{1.58}$$

(4) $E\neq 0,\ I$.

证　(1) 显然，E 是 X 上有界线性算子，在 Γ_1 内部取闭光滑围道，使 Γ_1 与 Γ' 所夹的区域不包含 σ_1 中点．类似证明映射 τ: $\varphi\to\varphi(A)$ 的可乘性，有

$$\begin{aligned}E^2&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma'}(\lambda I-A)^{-1}(\mu I-A)^{-1}d\mu\,d\lambda\\&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma'}\frac{1}{\lambda-\mu}[(\lambda I-A)^{-1}-(\mu I-A)^{-1}]\,d\mu\,d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\mu I-A)^{-1}d\mu=E.\end{aligned}$$

(2) 因为对每个 $\lambda\in\Gamma_1$, $(\lambda I-A)^{-1}$ 与 A 可交换, 所以 A 与 $\sum_i(\xi_i I-A)^{-1}(z_i-z_{i-1})$ $(z_i\in\Gamma$, $\xi_i\in\widehat{z_{i-1}z_i})$ 交换, 取极限, 从而得到

$$AE=EA.$$

(3) 由于 $E^2=E$ 等价于 $(I-E)E=0$, 所以 $(I-E)EX=\{0\}$, 即

$$L=\mathscr{R}(E)\subset\mathscr{N}(I-E).$$

反之, 对任何 $x\in\mathfrak{B}(I-E)$, 有 $x=Ex$, 从而 $x\in\mathscr{R}(E)=L$, 即

$$\mathscr{N}(I-E)\subset L.$$

从而

$$L=\mathscr{N}(I-E). \tag{1.59}$$

但 $(I-E)\in\mathfrak{B}(X\to X)$, 所以 L 是闭线性子空间.

根据(2), 显然有 $AEX\subset EX$, 即 L 是 A 的不变子空间.

今仿定理 5 的(4)的证明, 先证 $\sigma(A|_L)\subset\sigma_1$. 事实上, 当 $\lambda_0\overline{\in}\sigma_1$ 时, 不妨取 Γ_1, 使 λ_0 在 Γ_1 的外部, 令

$$B=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda,$$

显然, B 与 A、E 都可交换, 从而 L 也是 B 的不变子空间. 将 B、A 都视为 L 上算子(E 是 L 上单位算子), 并利用等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}A(\mu I-A)^{-1}d\mu\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}[(A-\mu I)+\mu I](\mu I-A)^{-1}d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\mu(\mu I-A)^{-1}d\mu,\end{aligned}$$

就得到在 L 上

$$\begin{aligned}&(A-\lambda_0 I)B=B(A-\lambda_0 I)=B(A-\lambda_0 I)E\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(A-\lambda_0 I)(\mu I-A)^{-1}d\mu\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\mu-\lambda_0)(\mu I-A)^{-1}d\lambda\\&=[注]\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda=E,\end{aligned}$$

从而 B 是 $(A-\lambda_0 I)$ 的逆算子, 即 $\lambda_0\in\rho(A|_L)$, 从而 $\sigma(A|_L)\subset\sigma_1$.

再证 $\sigma_1\subset\sigma(A|_L)$. 先在 Γ_1 外部取闭光滑围道 Γ_2, Γ_2 内部含有 σ_2. 因为 $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 的内部包含 $\sigma(A)=\sigma_1\cup\sigma_2$, 根据定理 5 的(2),

---

[注] 相仿于证明映射 $\tau:\varphi\to\varphi(A)$ 的可乘性的证明得到的.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda=I, \tag{1.60}$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda=I-E. \tag{1.61}$$

记 $M=\mathscr{R}(I-E)$，用 σ_2 代替 σ_1，易知 $\sigma(A|_M)\subset\sigma_2$.

如果有 $\lambda_0\in\sigma_1$，而 $\lambda_0\overline{\in}\sigma(A|_L)$. 那末 $A-\lambda_0I$ 分别作为 L、M 上的算子时都将成为正则的. 分别用 B_1、B_2 表示 $A-\lambda_0I$ 在 L、M 的逆算子. 作 X 上算子 B: 对任何 $x\in X$,

$$Bx=B_1Ex+B_2(I-E)x, \tag{1.62}$$

易知 B 是 X 上有界线性算子，并且

$$\begin{aligned}B(A-\lambda_0I)&=B(A-\lambda_0I)E+B(A-\lambda_0I)(I-E)\\&=B_1(A-\lambda_0I)E+B_2(A-\lambda_0I)(I-E)\\&=E+(I-E)=I,\\(A-\lambda_0I)B&=(A-\lambda_0I)B_1E+(A-\lambda_0I)B_2(I-E)\\&=E+(I-E)=I,\end{aligned}$$

即 $\lambda_0\in\rho(A)$. 这与假设 $\lambda_0\in\sigma_1\subset\sigma(A)$ 相矛盾. 所以 $\sigma_1\subset\sigma(A|_L)$. 从而 $\sigma(A|_L)=\sigma_1$.

(4) 显然，如果 $E=0$，那末 $M=\mathscr{R}(I-E)=X$. 由 (3),

$$\sigma_2=\sigma(A|_M)=\sigma(A).$$

这与假设 $\sigma(A)=\sigma_1\cup\sigma_2$, $\sigma_1\neq\phi$ 相矛盾. 因此 $E\neq0$.

同样 $I-E\neq0$，即 $E\neq I$. 证毕.

习　题

1. 设 A 是复 Banach 空间 X 上有界线性算子. 证明：如果

$$\lambda\in\sigma_p(A^n)\,(n\text{是某自然数}),$$

那末 λ 的 n 次根中至少有一个是 A 的特征值.

2. 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子，并且存在数 λ_0 和自然数 n, $(A-\lambda_0I)^n=0$. 证明：必存在 H 的 m $(m\leqslant n)$ 个互相直交的闭子空间 $H_1,\cdots,H_m$，使得 $H=\bigoplus_{i=1}^{m}H_i$，并且在这个分解下，

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & A_1 & & 0\\ & \lambda_0 & A_2 & \\ & & \ddots & A_{m-1}\\ 0 & & & \lambda_0\end{pmatrix}\begin{matrix}H_1\\H_2\\\vdots\\H_m\end{matrix}$$

其中 A_i 是 $H_{i+1}\to H_i$ 的有界线性算子.

3. 证明：当 X 是复 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$ 时，

$$\sigma(A)=\sigma_a(A)\cup\sigma_r(A),$$

$\sigma_r(A)$是开集，$\sigma_a(A)$是闭集.

4. 证明：当 X 是复 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$时，$\sigma(A)$的境界

$$\partial\sigma(A)\subset\delta_a(A)$$

5. 设 X 是复 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$. 证明

$$R^{(n)}(A,\ \lambda)=n!\,R^{n+1}(A,\ \lambda),\quad \lambda\in\rho(A),$$

其中 $R^{(n)}(A,\ \lambda)$是 $R(A,\ \lambda)$的 n 阶导数.

6. 设 X 是复 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$，Γ 是闭光滑围道，并且 Γ 及其内部 G 包含在 $\rho(A)$中，证明

$$\sup_{\lambda\in G}\|R(A;\lambda)\|=\sup_{\lambda\in\Gamma}\|R(A;\lambda)\|.$$

7. 设 X 是复 Banach 空间，$\{A_n\}\subset\mathfrak{B}(X\to X)$，并且 $\{A_n\}$ 按算子范数收敛于 A. 证明下列命题成立.

(i) 对任何 $\lambda_0\in\rho(A)$，必存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，$\lambda_0\in\rho(A_n)$. 并且

$$\lim_{n\to\infty}\|R(A_n;\ \lambda_0)-R(A;\ \lambda_0)\|=0.$$

(ii) 对任何 $\varepsilon>0$，必存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，$\sigma(A_n)\subset\sigma(A)+O(0,\ \varepsilon)$，其中 $\sigma(A)+O(0,\ \varepsilon)=\{\mu|$ 存在 $\lambda\in\sigma(A)$，使得 $|\mu-\lambda|<\varepsilon\}$，即

$$\sigma(A)+O(0,\ \varepsilon)=\bigcup_{\lambda\in\sigma(A)}O(\lambda,\ \varepsilon).$$

8. 设 X 是复 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$，M，N 是 X 的两个闭线性子空间，并且 $X=M\dotplus N$，再假设 M、N 都是 A 的不变子空间. 证明必有

$$\sigma(A|_M)\cup\sigma(A|_N)=\sigma(A)$$

9. 在定理 6 假设下(并用定理 6 的记号)，取互不相交的开集 G_i，$G_i\supset\sigma_i(i=1,\ 2)$，作 $G=G_1\cup G_2$ 上两个解析函数

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}1, & \text{当 } \lambda\in G_1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \lambda\in G_2 \text{ 时},\end{cases}$$

$$\psi(\lambda)=\begin{cases}\lambda, & \text{当 } \lambda\in G_1 \text{ 时},\\ a, & \text{当 } \lambda\in G_2 \text{ 时},\end{cases}$$

其中 a 是常数，并且 $|a|>\|A\|$. 证明：

(i) $\varphi(A)=E$，并利用定理 5 的(1)直接推出定理 6 的(1)、(2).

(ii) $\psi(A)|_L=A|_L$，$\psi(A)|_M=aI_M$，并利用定理 5 的(4)和习题 8 直接推出定理 6 的(3)，从而又可推出定理 6 的(4).

10. 设 f 是 $\mathbb{C}$ 的开集 G 上取值于复 Banach 空间 X 的向量值函数. 如果对任何 $x^*\in X^*$，$x^*(f(\lambda))$在 G 上处处可微. 那末 f 必在 G 上解析.

11. 设 X 是复 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$。设 $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{C}$，$|\lambda_n|>\|A\|(n=1, 2, \cdots)$，并且 $\lambda_n\to\lambda_0$，$|\lambda_0|>\|A\|$。对每个 $x\in X$，令

$$L_{\{\lambda_n\}}(x)=\overline{\text{span}}\{(\lambda_n I-A)^{-1}x\}.$$

证明下列命题成立。

(i) 如果又有 $\{\lambda_n'\}\subset\mathbb{C}$，$|\lambda_n'|>\|A\|(n=1, 2, \cdots)$，$\lambda_n'\to\lambda_0'$，$|\lambda_0'|>\|A\|$。那末 $L_{\{\lambda_n\}}(x)=L_{\{\lambda_n'\}}(x)$。

(ii) $L_{\{\lambda_n\}}(x)$是包含 x 的关于 A 不变的闭线性子空间。

(iii) $L_{\{\lambda_n\}}(x)$是包含 x 的关于 A 不变的最小闭线性子空间。

12. 设 X 是复 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$。如果 $0\in\rho(A)$。那末对任何自然数对 p、q，必存在 B，使得 $A^p=B^q$ (特别 $A=B^2$，B^3 等等)。

13. 设 X 是复 Banach 空间，A、$B\in\mathfrak{B}(X\to X)$。如果 $\sigma(A)\cap\sigma(B)=\phi$。那末对任何 $C\in\mathscr{B}(X\to X)$，必存在 $\mathfrak{B}(X\to X)$中的唯一 Y，使得

$$AY-YB=C.$$

14. 假设 R 是复 Banach 代数。对其中的元素 A，也可引进正则集 $\rho(A)$ (即 $\rho(A)=\{\lambda\,|\,(A-\lambda I)^{-1}\in R\}$)、谱集 $\sigma(A)=\mathbb{C}-\rho(A)$，以及 $\mathscr{A}(A)$和映射 τ: $\varphi\mapsto\varphi(A)$。将定理 5、6 推广到 Banach 代数上去。

§2 全连续算子的谱分析

1. Fredholm 理论

对于线性方程组

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=y_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=y_n\end{cases}\tag{2.1}$$

的求解问题是这样讨论的：在 n 维线性空间 X 上取一组线性基 e_1、$\cdots$、e_n，在这组基下，作相应于(2.1)的系数矩阵为

$$A=(a_{ij}).\tag{2.2}$$

分别视$(x_1, \cdots, x_n)$、$(y_1, \cdots, y_n)$为 X 上向量

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\ y=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i,$$

那末(2.1)求解问题等价于在 X 上研究方程

$$(A-\lambda I)x=y \tag{2.3}$$

的解.

在线代数学中，(2.3)的求解问题已完全解决. 主要结果可归纳如下(这里拟不用 A 的行列式语言，因为行列式不易推广到无限维)：

(I) 方程(2.3)对每个 $y\in X$ 可解的充要条件是齐次方程

$$(A-\lambda I)x=0 \tag{2.4}$$

只有零解，或者是共轭齐次方程

$$(A^T-\lambda I)x=0 \tag{2.5}$$

只有零解. 这里 A^T 是 (a_{ij}) 的转置矩阵.

用谱论的语言来说，就是 $\mathscr{R}(A-\lambda I)=X$ 的充要条件是 λ 不是 A 的特征值(或者充要条件是 λ 不是 A^T 的特征值). 或者也可说 λ 不是 A 的正则点便是 A 的特征值，而 A 的特征值与 A^T 的特征值一致.

(II) 当齐次方程(2.4)有非零解(等价于(2.5)有非零解)时，方程(2.3)可解的充要条件是向量 y 必与共轭齐次方程(2.5)的一切非零 x 解直交，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=0$. 这时，对于可解的 y，方程(2.3)的通解是 x_0+x_1，其中 x_1 是特解，x_0 是(2.4)的任一非零解.

上述基本结果后来被 Fredholm 推广到积分方程，通常称这些为 Fredholm 理论. 如果 X 是一般的无限维空间，A 是一般的线性算子，即使 X 是 Banach 空间，A 是有界的线性算子，上述(I)、(II)结果中有个别的已被获得，例如可见本章§1的引理1. 显然有很多结论是不成立的. 在本节中主要是将 Fredholm 理论推广到无限维 Banach 空间，自然，这是有条件的，即 A 是全连续算子.

2. 全连续算子基本性质

定义 设 A 是线性空间 X 到线性空间 Y 的线性算子，$\mathscr{D}(A)=X$. 如果 $\mathscr{R}(A)$ 是 Y 中的有限维子空间，那末称 A 是有限秩算子.

例 1　设 f_1、…、f_n 是 X 上的线性泛函，在 Y 中任取 n 个向量 y_1、…、y_n，作算子 A：

$$Ax=f_1(x)y_1+\cdots+f_n(x)y_n,\quad x\in X, \tag{2.6}$$

A 便是 X 到 Y 的有限秩算子.

反之，也很易证明 X 到 Y 的任何一个有限秩算子必为(2.6)的形式. 事实上，因为 $\dim\mathscr{R}(A)=n<\infty$，因而在 $\mathscr{R}(A)$ 中可取一组线性基 y_1、…、y_n. 又由于 $Ax=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)y_i\in\mathscr{R}(A)$，以及 y_1、…、y_n 是线性无关的，易知 $\alpha_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 X 上的线性泛函.

如果 X、Y 是两个赋范线性空间，$f_1, \cdots, f_n\in X^*$，那末按(2.6)所定义的算子是有界线性算子. 事实上，从(2.6)立即得到

$$\|Ax\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}f_i(x)y_i\right\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|\|y_i\|\right)\|x\|,\quad x\in X,$$

所以 A 是有界的.

反之，$\mathfrak{B}(X\to Y)$ 中任何有限秩算子 A 必是(2.6)的形式，其中 $f_i\in X^*(i=1, 2, \cdots, n)$. 事实上，从 A 的线性、有限秩已经证明

$$Ax=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)y_i,\quad x\in X,$$

其中 $\{y_i\}$ 是线性无关的，$\{\alpha_i\}$ 是 X 上线性泛函. 显然，只要指出 $\alpha_i\in X^*(i=1, 2, \cdots, n)$ 就可以了. 为此，令

$$L_n=\operatorname{span}\{y_1, \cdots, y_{n-1}\}.$$

显然，$y_n\overline{\in}L_n$，所以存在 $f_n\in Y^*$，使得 $f_n(L_n)=0$，$f_n(y_n)=1$. 因而

$$f_n(Ax)=f_n\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)y_i\right)=\alpha_n(x),\quad x\in X,$$

由此得到 $|\alpha_n(x)|\leqslant\|f_n\|\|A\|\|x\|$，即 α_n 是 X 上连续线性泛函. 同样可证明 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}\in X^*$.

定义　设 X、Y 是两个赋范线性空间，A 是 X 到 Y 的算子，如果 A 把 X 中任何有界集映成 Y 中的列紧集，称 A 是全连续

算子，也称为紧算子。

本书中所讲的全连续算子都假设是线性的. 今后不再说明.

由于赋范空间中列紧集必是有界的，所以全连续算子必是连续线性算子.

例 2 设 $K(s, t)$ 是 $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$ 上二元连续函数，作 $C[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的算子 K 如下：

$$(K\varphi)(s)=\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt,\ \varphi\in C[a, b].$$

今证 K 是 $C[a, b]$ 上的全连续算子. 事实上，设 M 是 $C[a, b]$ 中任一有界集，即存在正常数 L，使得 M 中一切的 φ，满足 $\max\limits_t|\varphi(t)|=\|\varphi\|\leqslant L$. 由此可知

$$\begin{aligned}|(K\varphi)(s_1)-(K\varphi)(s_2)|&\leqslant\int_a^b|K(s_1, t)-K(s_2, t)||\varphi(t)|dt\\&\leqslant L\int_a^b|K(s_1, t)-K(s_2, t)|dt.\end{aligned}$$

因为 $K(s, t)$ 是二元连续的，所以对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，使得当 $|S_1-S_2|<\delta$ 时，

$$|K(s_1, t)-K(s_2, t)|<\frac{\varepsilon}{L(b-a)},$$

于是对一切 $\varphi\in M$，

$$|(K\varphi)(s_1)-(K\varphi)(s_2)|<\varepsilon,$$

换句话说，有界集的象 KM 是 $C[a, b]$ 中有界的等度连续的函数族. 由第四章§6定理5，KM 是 $C[a, b]$ 上列紧集，即 K 是全连续的.

例 3 赋范线性空间 X 上有界的有限秩算子 A 必是全连续的. 事实上，对 X 中任何有界集 M 的象 AM（据有界性）是 X 中的有界集，而 $\mathscr{R}(A)$ 是有限维赋范线性空间，根据有限维赋范线性空间中有界集必是列紧集（见第四章§6定理1），所以 A 是全连续的.

我们用 $\mathscr{C}(X\to Y)$ 表示 X 到 Y 的全连续算子全体.

定理 1 设 X、Y 是两个赋范线性空间，那末 $\mathscr{C}(X\to Y)$ 是赋

范线性空间 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 的线性子空间. 如果 Y 还是 Banach 空间, 那末 $\mathscr{C}(X\to Y)$ 必是 Banach 空间 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 的闭线性子空间.

证明 设 A、$B\in\mathscr{C}(X\to Y)$, 今证 $A+B\in\mathscr{C}(X\to Y)$. 任取 X 中的有界集 M, 对 $(A+B)M$ 中任何一点列 $\{(A+B)f_n\}$ ($f_n\in M$, $n=1, 2, \cdots$), 由于 AM 是列紧的, 所以有子点列 $\{Af_{n\nu}\}$ 收敛, 又由于 BM 是列紧的, 所以点列 $\{Bf_{n\nu}\}$ 中又有收敛子列 $\{Bf_{n\nu_k}\}$. 从而点列 $\{(A+B)f_n\}$ 的子点列 $\{(A+B)f_{n\nu_k}\}$ 是收敛的, 这就是说, $(A+B)M$ 是列紧集. 既然 $A+B$ 把 X 中任何有界集映成列紧集, 所以 $A+B$ 是全连续的.

类似地, 可以证明对任何数 α, αA 也是全连续的. 这样便得到 $\mathscr{C}(X\to Y)$ 是 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 的线性子空间.

当 Y 是 Banach 空间时, $\mathscr{B}(X\to Y)$ 也是 Banach 空间. 现在证明 $\mathscr{C}(X\to Y)$ 是 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 的闭集. 事实上, 假设 $\{A_n\}\subset\mathscr{C}(X\to Y)$, 并且存在 $A\in\mathscr{B}(X\to Y)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0$. 这时, 对任何给定的 X 中的有界集 M, 记 $L=\sup\limits_{\varphi\in M}\|\varphi\|$, 而对任何 $\varepsilon>0$, 由 $\{A_n\}$ 的收敛性假设, 必存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时,

$$\|A_n-A\|<\frac{\varepsilon}{3(L+1)}.$$

由于 A_NM 是列紧集, 所以 A_NM 存在有限的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 y_1、$\cdots$、y_k, 并不妨设 $y_i\in A_NM$ ($i=1, 2, \cdots, k$), 从而有

$$x_i\in M\ (i=1, 2, \cdots, k),$$

使得 $y_i=A_Nx_i$ ($i=1, 2, \cdots, k$). 为了证明 AM 是列紧集, 今只要证明 Ax_1、$\cdots$、Ax_k 是 AM 的 ε-网就可以了.

事实上, 对任何 $y\in AM$, 必有 $x\in M$, 使得 $Ax=y$. 因为 $A_Nx\in A_NM$, 所以必有 ν, 使得 $\|A_Nx-y_\nu\|<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\begin{aligned}\|y-Ax_\nu\|&\leqslant\|(A-A_N)x\|+\|A_Nx-A_Nx_\nu\|+\|(A_N-A)x_\nu\|\\&\leqslant2\|A-A_N\|L+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.\end{aligned}$$

既然 A 将任何 X 中有界集 M 映成 Y 中列紧集，所以

$$A\in\mathscr{C}(X\to Y).$$

证毕.

利用定理 1，我们再给出一个重要的积分算子是全连续的例子.

例 4 设 $K(s, t)\in L^2([a, b]\times[a, b])$，作 $L^2[a, b]$ 上算子 K：

$$(K\varphi)(s)=\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt, \quad \varphi\in L^2[a, b],$$

根据第五章§1 例 4 知道 K 是 $L^2[a, b]$到 $L^2[a, b]$的线性算子，并且

$$\|K\|\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b|K(s, t)|^2dsdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

今证 K 是全连续的.

事实上，因为存在包含在$[a, b]\times[a, b]$中的矩形的特征函数的线性组合函数（即 $[a, b]\times[a, b]$ 上的 C_0 类函数）的序列 $\{K_n(s, t)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}|K(s, t)-K_n(s, t)|dsdt=0. \tag{2.8}$$

由 $K_n(s, t)$作为积分核所产生的算子记为 K_n，从(2.7)，立即得

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n-K\|=0,$$

到根据定理 1，如能证明 K_n $(n=1, 2, \cdots)$都是 $L^2[a, b]$ 上全连续算子，K 便是全连续的了.

因为 $$K_n(s, t)=\sum_{\nu=1}^{m_n}\alpha_\nu\chi_{J_\nu}(s, t),$$

其中 $$J_\nu=\langle a_\nu, b_\nu\rangle\times\langle c_\nu, d_\nu\rangle\subset[a, b]\times[c, d],$$

所以 $$\chi_{J_\nu}(s, t)=\chi_{\langle a_\nu,b_\nu\rangle}(s)\chi_{\langle c_\nu,d_\nu\rangle}(t).$$

因此，对任何 $\varphi\in L^2[a, b]$，

$$\begin{aligned}(K_n\varphi)(s)&=\int_a^b K_n(s, t)\varphi(t)dt\\&=\sum_{\nu=1}^{m_n}\alpha_\nu\chi_{\langle a_\nu,b_\nu\rangle}(s)\int_a^b\chi_{\langle c_\nu,d_\nu\rangle}(t)\varphi(t)dt,\end{aligned}$$

这就是说，K_n 是 $L^2[a, b]$ 上有界的有限秩算子，由例 3，$K_n(n=1, 2, \cdots)$ 都是全连续的，因而 K 也是全连续的。

全连续算子还有如下一些常用的初等性质。

定理 2 设 X、Y 是两个赋范线性空间，$A\in\mathscr{C}(X\to Y)$，那末

(1) AX 是 Y 中可析集；

(2) 如果 Z 是赋范线性空间，$B\in\mathfrak{B}(Y\to Z)$，$C\in\mathfrak{B}(Z\to X)$ 必有 $BA\in\mathscr{C}(X\to Z)$，$AC\in\mathscr{C}(Z\to Y)$；

(3) $A^*\in\mathscr{C}(Y^*\to X^*)$.

证明 (1) 因为 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}O(0, n)$，而对任何 n，$AO(0, n)$ 是 Y 中列紧集，由第四章§6 定理 4 的系，$AO(0, n)$ 是可析集。由此易知集 $AX=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}AO(0, n)$ 是 Y 中可析的。

(2) 设 M 是 X 中任一有界集，AM 便是 Y 中列紧集，由于 B 是连续映射。根据第四章§6 定理 10 的系 1，BAM 是 Z 中列紧集，即 $BA\in\mathscr{C}(X\to Z)$。

同样，如果 M 是 Z 中有界集，那末因 C 的连续性，CM 便是 X 中有界集，从而 ACM 是 Y 中列紧集，即 $AC\in C(Z\to Y)$。

(3) 设 $\{\varphi_n\}$ 是 Y^* 中任一有界点列，今证明必存在子点列 $\{\varphi_{n_\nu}\}$，使得 $\{A^*\varphi_{n_\nu}\}$ 在 X^* 中按范数收敛就可以了。

令 S 是 X 中的闭单位球，上述要求等价于证明存在子点列 $\{\varphi_{n_\nu}\}$，使得

$$\|A^*\varphi_{n_\nu}-A^*\varphi_{n_{\nu'}}\|=\sup_{x\in S}|(\varphi_{n_\nu}-\varphi_{n_{\nu'}})(Ax)|\to 0 \quad (\nu, \nu'\to\infty). \tag{2.9}$$

现在证明(2.9)成立。令 $L=\overline{AX}$，显然 L 是 Y 中闭线性子空间，并且是可析集，因而存在一列向量 $\{y_k\}$ 在 L 中稠密，根据 $\{\varphi_n\}$ 是有界点列(不妨设 $\|\varphi_n\|\leqslant M$, $n=1, 2, \cdots$)，利用"对角线方法"，不难从 $\{\varphi_n\}$ 中抽出子列 $\{\varphi_{n_\nu}\}$，使得 $\{\varphi_{n_\nu}\}$ 在一切 $y_k(k=1, 2, \cdots)$ 上收敛。下面证明 $\{\varphi_{n_\nu}\}$ 适合(2.9)：对任何 $\varepsilon>0$，因为

AS 是列紧集，$\{y_k\}$ 在 L 中稠密，因而存在有限个向量，不妨设为 y_1、…、y_n 构成 AS 的 $\frac{\varepsilon}{3(M+1)}$-网. 这样，对任何 $x\in S$，必存在某个 $y_i(1\leqslant i\leqslant n)$，使得

$$\|Ax-y_i\|<\frac{\varepsilon}{3(M+1)}.$$

又因为 $\{\varphi_{n_\nu}\}$ 在 y_1、…、y_n 上收敛，所以存在 ν_0，当 ν, $\nu'>\nu_0$ 时，$|\varphi_{n_\nu}(y_i)-\varphi_{n_{\nu'}}(y_i)|<\frac{\varepsilon}{3}(i=1, 2, \cdots, n)$. 从而当 ν, $\nu'>\nu_0$ 时，

$$\begin{aligned}|(\varphi_{n_\nu}-\varphi_{n_{\nu'}})(Ax)|&\leqslant|(\varphi_{n_\nu}-\varphi_{n_{\nu'}})(y_i)|\\&\quad+|(\varphi_{n_\nu}-\varphi_{n_{\nu'}})(Ax-y_i)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+2M\frac{\varepsilon}{3(M+1)}<\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

注 如果要问定理2的(3)中的点列 $\{A^*\varphi_{n_\nu}\}$ 收敛于什么向量. 这个问题可回答如下：因为 $\{\varphi_{n_\nu}\}$ 在 L 上收敛，记它的极限为 φ. 显然，仅定义在 L 上的 φ 是 L 上的连续线性泛函. 令 $\tilde{\varphi}$ 是 φ 在 Y 上任何连续线性延拓. 读者容易证明 $A^*\tilde{\varphi}$ 便是 $\{A^*\varphi_{n_\nu}\}$ 的极限.

下面是定理2的两个重要推论.

系1 设 X、Y 是两个赋范线性空间，$A\in\mathscr{C}(X\to Y)$. 那末 A 必将 X 中弱收敛于 x_0 的点列映成强收敛于 Ax_0 的点列.

证明 令 S^* 是 Y^* 中闭单位球. 因为

$$\|A(x_n-x_0)\|=\sup_{f\in S^*}|f(A(x_n-x_0))|,$$

所以要证明 $\{Ax_n\}$ 强收敛于 Ax_0 等价于要证明

$$\sup_{f\in S^*}|(A^*f)(x_n-x_0)|=\sup_{f\in S^*}|f(A(x_n-x_0))|\to 0\quad(n\to\infty). \tag{2.10}$$

根据定理2的(3)，A^*S^* 是 X^* 中列紧集，并注意到弱收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$ 必是有界的. 容易仿 (2.9) 式的证明来证明 (2.10) 成立(读者自己证明). 证毕.

系2 当 X 是 Banach 空间时，$\mathscr{C}(X\to X)$ 是 Banach 代

数. 进一步, 如果 $\dim X=\infty$, $\mathscr{C}(X\to X)$ 中不含单位元.

系 2 是显然的.

3. 全连续算子谱分析

研究全连续算子的谱是本小节的任务. 对于有限维空间, 情况简单得多, 而对于无限维空间的全连续算子, 情况虽复杂了, 但大体可以这样说: 全连续算子的非零谱点的结构与有限维空间上算子的谱差不多. 所以全连续算子最复杂的部分就是"0"这个谱. 现在我们将陆续来证明这一点. 下面的结果无论实或复 Banach 空间都成立.

首先证明全连续算子的两个重要性质, 它们将在谱论中起着基本的作用.

定理 3 设 X 是 Banach 空间, $A\in\mathscr{C}(X\to X)$, λ 是一个数, 如果 $\mathscr{R}(\lambda I-A)=X$, 那末 λ 必是 A 的正则点.

证明 当 $\dim X<\infty$ 时, 定理的结论是明显的, 所以不妨设 $\dim X=\infty$.

因为 $\mathscr{R}(\lambda I-A)=X$, 我们说必有 $\lambda\neq 0$. 事实上, 如果

$$\mathscr{R}(A)=X,$$

那末 A 便是开映射(见第五章 §4 定理 2). 从而 $AO(0,1)$ 必包含 X 中的某个开球 $O(0,\delta)$. 根据第四章 §6 的引理 1 和定理 11, $O(0,\delta)$ 不是列紧集, 这与假设 A 是全连续的相矛盾. 因而 $\mathscr{R}(A)\neq X$.

现在不妨设 $\lambda\neq 0$, $\mathscr{R}(\lambda I-A)=X$. 显然, 根据逆算子定理, 只要证明 $\lambda I-A$ 是单射就可以了, 即当 $(\lambda I-A)x_1=0$ 时, 证明必有 $x_1=0$.

令 $E_n=\{x\mid(\lambda I-A)^n x=0\}(n=1,2,\cdots)$. 由于 $(\lambda I-A)^n$ 是有界线性算子, 因而 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 都是闭线性子空间. 又显然

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots,$$

如果 $E_1\neq\{0\}$, 那末有 $x_1\neq 0$, $x_1\in E_1$. 根据 $(\lambda I-A)X=X$, 所以必有 x_2, 使得 $x_1=(\lambda I-A)x_2$, 依次类推, 有

$$x_{n-1}=(\lambda I-A)x_n,\quad n=2,\ 3,\ \cdots,$$

$x_n\neq 0(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 因为$(\lambda I-A)^{n-1}x_n=x_1$, 所以$x_n\in E_n$, 并且$x_n\overline{\in} E_{n-1}$. 根据第四章§6引理1, 在$E_n$中有$y_n$, 使得

$$\|y_n\|=1,\ \rho(y_n,\ E_{n-1})>\frac{1}{2},\quad n=2,\ 3,\ \cdots. \tag{2.11}$$

如果$p>q$, 从$E_{p-1}\supset E_q$, $(\lambda I-A)E_q\subset(\lambda I-A)E_p\subset E_{p-1}$, 得到

$$y_q-\frac{(\lambda I-A)}{\lambda}y_q+\frac{(\lambda I-A)}{\lambda}y_p\in E_{p-1},$$

因此, 从(2.11)又得到

$$\begin{aligned}&\|Ay_p-Ay_q\|\\&=|\lambda|\left\|y_p-\left(y_q-\frac{(\lambda I-A)}{\lambda}y_q+\frac{(\lambda I-A)}{\lambda}y_p\right)\right\|>\frac{1}{2}|\lambda|,\end{aligned}$$

这就和A是全连续的假设相矛盾. 证毕.

定理4 设X是Banach空间, $A\in\mathscr{C}(X\to X)$, 数$\lambda\neq 0$. 那末$\mathscr{R}(\lambda I-A)$是闭线性子空间.

证明 将分成四步来证明.

(1) 假设$\{f_n\}\subset\mathscr{R}(\lambda I-A)$, 并且是收敛的点列, g_n是f_n的一个原象, 即

$$(\lambda I-A)g_n=f_n,\quad n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{2.12}$$

如果$\{g_n\}$是有界点列, 那末$\{g_n\}$必是收敛点列.

事实上, 从(2.12)得到$g_n=\frac{1}{\lambda}(f_n+Ag_n)$. 由$\{g_n\}$的有界性, 有子列$\{g_{n_\nu}\}$, 使得$\{Ag_{n_\nu}\}$收敛, 从而$\{g_{n_\nu}\}$本身也收敛.

(2) 设$f\in\mathscr{R}(\lambda I-A)$, 我们证明在$\{g\mid(\lambda I-A)g=f\}$中一切向量$g$的范数的下确界$m=\inf\limits_{(\lambda I-A)g=f}\|g\|$是可达的.

事实上, 取$\{g_n\}$, 使得

$$(\lambda I-A)g_n=f,\quad\|g_n\|\to m(n\to\infty),$$

因此$\{g_n\}$是有界点列. 取第(1)步中$f_n=f(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 那末由(1), 必有子点列$\{g_{n_\nu}\}$收敛于f'. 再由$(\lambda I-A)$的连续性, 立即得到

$$(\lambda I-A)f'=\lim_{\nu\to\infty}(\lambda I-A)g_{n_\nu}=f,$$

显然 $\|f'\|=m$，即 f' 是达到下确界的，并且适合 $(\lambda I-A)f'=f$. 当然，对给定的 f，相应的 f' 不必是唯一的. 以后用 f' 表示达到上述下确界的某个向量.

(3) 证明存在与任何 f 无关的常数 M，使得 $\|f'\|\leqslant M\|f\|$.

假如不对，就有一列 $\{f_n\}\subset\mathscr{R}(\lambda I-A)$，使得

$$\|f'_n\|\geqslant n\|f_n\|,\quad n=1,\ 2,\ \cdots,\tag{2.13}$$

于是

$$(\lambda I-A)\frac{f'_n}{\|f\|_n}=\frac{f_n}{\|f'_n\|}\to 0,\quad (n\to\infty).\tag{2.14}$$

由第(1)步知道，必存在 $\left\{\frac{f'_n}{\|f'_n\|}\right\}$ 的收敛子列 $\left\{\frac{f'_{n_\nu}}{\|f'_{n_\nu}\|}\right\}$，记其极限为 f_0，从而

$$(\lambda I-A)f_0=0,\tag{2.15}$$

显然 $\|f_0\|=1$. 由(2.14)、(2.15)就得到

$$(\lambda I-A)(f'_n-\|f'_n\|f_0)=f_n,$$

又因为 f'_n 是 f_n 的原象中达到下确界的向量，所以

$$\|f'_n\|\leqslant\|f'_n-\|f'_n\|f_0\|,$$

即

$$\left\|\frac{f'_n}{\|f'_n\|}-f_0\right\|\geqslant 1,$$

这和假设 $\frac{f'_{n_\nu}}{\|f_{n_\nu}\|}\to f_0$ 相矛盾. 所以，必存在 M，使得

$$\|f'\|\leqslant M\|f\|.$$

(4) 证明 $\mathscr{R}(\lambda I-A)$ 是闭集.

如果 $\{f_n\}\subset\mathscr{R}(\lambda I-A)$，$f_n\to f$，那末必有正数 C，使得 $\|f_n\|\leqslant C$. 对每个 f_n，取相应 f'_n，由第(3)步，$\|f'_n\|\leqslant M\|f_n\|\leqslant MC$. 再根据第(1)步，可从 $\{f'_n\}$ 找到子点列 $\{f'_{n_\nu}\}$ 收敛于某个 g，因而

$$(\lambda I-A)g=\lim_{\nu\to\infty}(\lambda I-A)f'_{n_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}f_{n_\nu}=f,$$

即 $\mathscr{R}(\lambda I-A)$ 是闭集. 证毕.

对于一般的线性算子，即使是连续的，定理 3、4 是不成立的反例是易于举出的.

利用上述定理，又可得到下列重要性质.

定理 5 设 X 是 Banach 空间，$A\in\mathscr{C}(X\to X)$，数 $\lambda\neq 0$，而不是 A 的特征值，那末 λ 必是 A^* 的正则点.

证明 令 $L=\mathscr{R}(\lambda I-A)$，根据定理 4，$L$ 是闭线性子空间. 因为 λ 不是特征值，所以 $\lambda I-A$ 是单射. 视 $\lambda I-A$ 是 X 到 L 上的算子，由逆算子定理，存在 L 到 X 的有界线性算子 A_λ^{-1}，它是 $\lambda I-A$ 的逆算子.

今证 $\mathscr{R}(\lambda I-A^*)=X^*$. 设 $f\in X^*$，在 L 上造线性泛函 ψ 如下：

$$\psi(x)=f(A_\lambda^{-1}x),\quad x\in L \tag{2.16}$$

（ψ 的线性是显然的），由于

$$|\psi(x)|\leqslant\|f\|\|A_\lambda^{-1}\|\|x\|,$$

所以 ψ 还是连续的. 由泛函延拓定理，将 ψ 延拓到 X 上，仍记为 ψ，因而从

$$((\lambda I-A)^*\psi)(y)=\psi((\lambda I-A)y)=f(A_\lambda^{-1}(\lambda I-A)y)=f(y)$$

立即得到 $(\lambda I-A)^*\psi=f$，即 $\mathscr{R}(\lambda I-A^*)=X^*$.

然而，A^* 是全连续的，对 A^* 用定理 3，λ 必是 A^* 的正则点. 证毕.

下面是 Riesz–Szauder 关于全连续算子的特征值和特征子空间的定理.

定理 6 设 X 是 Banach 空间，$A\in\mathscr{C}(X\to X)$，那末

(1) 当 $\dim X=\infty$ 时，$0\in\sigma(A)$；

(2) $\lambda\in\sigma(A)$，如果 $\lambda\neq 0$，那末 $\lambda\in\sigma_p(A)$；

(3) $\lambda\in\sigma_p(A)$ 如果 $\lambda\neq 0$，那末相应于 λ 的特征子空间 $\Phi_\lambda(A)$ 是有限维的；

(4) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\sigma_p(A)$，并且 $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$x_i$ 是相应于 λ_i 特征向量. 那末 x_1、$\cdots$、x_n 必线性无关；

(5) $\sigma(A)$ 只能以 0 作为极限点，从而 $\sigma(A)$ 或是有限集或是可列集.

证明

(1) 当 $\dim X=\infty$ 时，在定理 3 中已经证明必有

$$\mathscr{R}(X)\neq X,$$

因而 $0\in\sigma(A)$.

(2) 因为 $\lambda\neq 0$, $\lambda\in\sigma(A)$, 根据定理 4 和定理 3, $\mathscr{R}(\lambda I-A)$ 是 X 的真闭线性子空间, 因而 $\mathscr{R}(\lambda I-A)$ 在 X 中不稠密. 又根据第五章 §3 定理 8 的等式 $\mathscr{R}(A-\lambda I)^{\perp}=\mathscr{N}(\lambda I-A^{*})$, 所以 $\lambda\in\sigma_p(A^{*})$, 自然 $\lambda\overline{\in}\rho(A^{*})$. 根据定理 5, 只有 $\lambda\in\sigma_p(A)$.

(3) 设 $\lambda\in\sigma_p(A)$, $\lambda\neq 0$. 对任何 $x\in\Phi_\lambda(A)$, 显然 $A\lambda=\lambda x$, 即视 A 为 $\Phi_\lambda(A)$ 空间上算子时, A 在 $\Phi_\lambda(A)$ 上是 λI. 如果 $\Phi_\lambda(A)$ 是无限维的, 根据 Riesz 引理 $\Phi_\lambda(A)$ 的单位球面 S 不列紧, 所以 $\lambda S=AS$ 也不列紧. 显然, 这和假设 $A\in\mathscr{C}(X\to X)$ 相矛盾, 因此只有 $\Phi_\lambda(A)$ 是有限维.

(4) 如果 x_1、$\cdots$、x_n 线性相关, 不妨设 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i$, 其

$$\alpha_i\in\mathbb{C}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),$$

利用 $(\lambda_i I-A)(\lambda_j I-A)=(\lambda_j I-A)(\lambda_i I-A)$ 便得到

$$\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_n&=(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-1}I-A)x_n\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-1}I-A)x_i=0,\end{aligned}$$

然而上式左边 $\neq 0$, 这是矛盾, 所以 x_1、$\cdots$、x_n 线性无关.

(5) 设 $\{\lambda_n\}$ 是 A 的一列不同的特征值, 而且 $\lambda_n\to\lambda_0\neq 0$. 不妨再设 $\lambda_n\neq 0(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 因此存在常数 M, 使得

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right|<M,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

令 x_n 是相应于 λ_n 的特征向量, $M_n=\operatorname{span}\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$, 由 (4), $M_n\subset M_{n+1}$, 而且 $M_n\neq M_{n+1}$, $\dim M_n=n$. 由 Riesz 引理就得 $\{y_n\}$, 满足

$$y_n\in M_n,\ \|y_n\|=1,\ \rho(y_n,\ M_{n-1})>\frac{1}{2},\ n=2,\ 3,\ \cdots.\quad(2.17)$$

记 $y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i^{(n)}x_i$, $\beta_i^{(n)}\in\mathbb{C}$, $n=2,\ 3,\ \cdots$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 显然

$$(\lambda_n I-A)y_n=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i^{(n)}(\lambda_n-\lambda_i)x_i\in M_{n-1},$$

所以 $y_n-\dfrac{A}{\lambda_n}y_n\in M_{n-1}$. 由此可知, 当 $n>m$ 时,

$$z=y_n-A\frac{y_n}{\lambda_n}+A\frac{y_m}{\lambda_m}\in M_{n-1},$$

然而 $A\dfrac{y_n}{\lambda_n}-A\dfrac{y_m}{\lambda_m}=y_n-z$, 所以

$$\left\|A\frac{y_n}{\lambda_n}-A\frac{y_m}{\lambda_m}\right\|=\|y_n-z\|\geqslant\rho(y_n,\ M_{n-1})>\frac{1}{2}. \tag{2.18}$$

但是 $\left\|\dfrac{y_n}{\lambda_n}\right\|\leqslant M$, 根据 $A\in\mathscr{C}(X\to X)$. 必有 $\left\{A\dfrac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ 的收敛子列 $\left\{A\dfrac{y_{n_\nu}}{\lambda_{n_\nu}}\right\}$, 这和(2.18)相冲突. 所以 $\sigma(A)$ 如有极限点, 只能是 0. 证毕.

下面是 Riesz-Szauder 理论中 A 与 A^* 关系的部分.

定理 7 设 X 是 Banach 空间, $A\in\mathscr{C}(X\to X)$. 那末

(1) $\sigma(A)=\sigma(A^*)$, 即 $\sigma(A^*)=\{\lambda\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}$;

(2) 如果 $\lambda\neq\mu$, 那末 $\Phi_\lambda(A)\perp\Phi_\mu(A^*)$;

(3) 如果 $\lambda\in\sigma_p(A)$, 并且 $\lambda\neq 0$, 那末方程

$$(\lambda I-A)x=y$$

可解的充要条件是 $y\perp\Phi_\lambda(A^*)$;

(4) 如果 $\lambda\in\sigma_p(A)$, 并且 $\lambda\neq 0$, 那末方程

$$(\lambda I-A^*)\varphi=f$$

可解的充要条件是 $f\perp\Phi_\lambda(A)$;

(5) 如果 $\lambda\in\sigma_p(A)$, $\lambda\neq 0$, 那末

$$\dim\mathscr{N}(\lambda I-A)=\dim\mathscr{N}(\lambda I-A^*).$$

证明 (1) 其实, 我们可以证明对任何 $A\in\mathfrak{B}(X\to X)$, 都有 $\sigma(A)=\sigma(A^*)$. 事实上, 当 $\lambda\in\rho(A)$ 时,

$$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathfrak{B}(X\to X),$$

对 $(\lambda I-A)$ 应用第五章 §4 引理 1 的系, 立即得到 $\lambda\in\rho(A^*)$, 从而 $\rho(A)\subset\rho(A^*)$.

再证 $\rho(A^*)\subset\rho(A)$. 任取 $\lambda\in\rho(A^*)$, 从而 $\lambda\in\rho(A^{**})$. 因此, 存在正数 a, 对任何 $x^{**}\in X^{**}$,

$$\|(\lambda I-A)x\|=\|(\lambda I-A^{**})x^{**}\|\geqslant a\|x^{**}\|=a\|x\|,$$

由此可知$(\lambda I-A)$是单射，$\mathscr{R}(\lambda I-A)$是X中闭线性子空间. 如果$\mathscr{R}(\lambda I-A)\neq X$，必存在非零$f\in X^*$，使得$f$在$\mathscr{R}(\lambda I-A)$上的值是0，由第五章§3定理8，$\lambda\in\sigma_p(A^*)$，这与$\lambda\in\rho(A^*)$假设相矛盾. 这样，$(\lambda I-A)$既是单射，又是满射，由逆算子定理，$\lambda\in\rho(A)$，从而$\rho(A^*)\subset\rho(A)$. 因此$\rho(A^*)=\rho(A)$.

(2) 因为当$x\in\Phi_\lambda(A)$，$f\in\Phi_\mu(A^*)$时，

$$\mu\langle x, f\rangle=\langle x, A^*f\rangle=\langle Ax, f\rangle=\lambda\langle x, f\rangle,$$

所以，当$\lambda\neq\mu$时，由上式只有$\langle x, f\rangle=0$，即$\Phi_\lambda(A)\perp\Phi_\mu(A^*)$.

(3) 根据定理4，$\mathscr{R}(\lambda I-A)$是闭的线性子空间. 又根据§1引理1的(iii)，易知(3)成立.

(4) 显然，$(\lambda I-A^*)\varphi=f$可解的充要条件是

$$f\in\mathscr{R}(\lambda I-A^*).$$

但$\mathscr{N}(\lambda I-A)\perp\mathscr{R}(\lambda I-A^*)$，所以(4)的必要性是明的.

今证充分性(等价于证明$\mathscr{N}(\lambda I-A)^\perp\subset\mathscr{R}(\lambda I-A^*)$). 设$f\in\mathscr{N}(\lambda I-A)^\perp$. 要求有$\varphi\in X^*$，适合$(\lambda I-A^*)\varphi=f$，这是等价于对一切$x\in X$，

$$\varphi((\lambda I-A)x)=f(x).\tag{2.19}$$

为此，先作子空间$L=\mathscr{R}(\lambda I-A)$上的泛函$\varphi$如下：对任何$y\in L$，任取方程$(\lambda I-A)x=y$的一个解$x'$，规定

$$\varphi(y)=f(x').\tag{2.20}$$

如果又有x''，使得$(\lambda I-A)x''=y$，那末$x'-x''\in\mathscr{N}(\lambda I-A)$，而$f\in\mathscr{N}(\lambda I-A)^\perp$，所以$f(x')=f(x'')$，即(2.20)所定义的$L$上泛函$\varphi$意义是确定的. 显然$\varphi$是$L$上线性泛函.

再证φ是连续的. 事实上，如果对每个$y\in L$，取x'是

$$(\lambda I-A)x=y$$

的解x中范数达到最小值的解. 由定理4证明中的第(3)步，存在常数M，使得$\|x'\|\leqslant M\|y\|$对一切$y\in L$成立，因而

$$|\varphi(y)|=|f(x')|\leqslant\|f\|\|x'\|\leqslant\|f\|M\|y\|,\tag{2.21}$$

即φ是L上连续线性泛函.

将 φ 延拓成 X 上连续线性泛函，仍记做 φ. 显然 X 上连续线性泛函 φ 适合(2.19)，即 $f\in\mathscr{R}(\lambda I-A^*)$.

(5) 对任何 $\lambda_0\in\sigma(A)$, $\lambda_0\neq 0$, 由定理 6 的(5), λ_0 是 $\sigma(A)$ 的孤立点，从而存在 $\varepsilon>0$, 圆 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon$ 中仅含有 $\sigma(A)$ 中一点 λ_0. 令

$$E_{\lambda_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda, \qquad (2.22)$$

由于 $B_\lambda=\dfrac{A}{\lambda}(\lambda I-A)^{-1}(\lambda\in\rho(A))$ 是全连续算子，又易知

$$E_{\lambda_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}B_\lambda\,d\lambda,$$

所以 E_{λ_0} 是全连续算子. 因此, $E_{\lambda_0}X=\{x\,|\,E_{\lambda_0}x=x\}$ 必是有限维线性子空间(因为 E_{λ_0} 在空间 $E_{\lambda_0}X$ 上是单位算子).

今证 $\Phi_{\lambda_0}(A)\subset E_{\lambda_0}X$. 事实上，任取 $x\in\Phi_{\lambda_0}(A)$,

$$A(I-E_{\lambda_0})x=(I-E_{\lambda_0})Ax=\lambda_0(I-E_{\lambda_0})x. \qquad (2.23)$$

但是 λ_0 是 $A|_{(I-E_{\lambda_0})X}$ 的正则点(见§1定理 6 的(3))，所以从(2.23)就得到 $(I-E_{\lambda_0})x=0$, 即 $x\in E_{\lambda_0}X$.

对(2.22)取 * 运算，有

$$E_{\lambda_0}^*=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}(\lambda I-A^*)^{-1}d\lambda, \qquad (2.24)$$

并类似于上面讨论得到 $E_{\lambda_0}^*X^*$ 是有限维空间，并且

$$\Phi_{\lambda_0}(A^*)\subset E_{\lambda_0}^*X^*.$$

再证 $E_{\lambda_0}^*X^*=(E_{\lambda_0}X)^*$[注]. 事实上，任取 $\varphi\in E_{\lambda_0}^*X^*\subset X^*$, 显然 $\varphi|_{E_{\lambda_0}X}$ 必是 $E_{\lambda_0}X$ 上连续线性泛函，因而 $E_{\lambda_0}^*X^*\subset(E_{\lambda_0}X)^*$. 反之，任取 $f\in(E_{\lambda_0}X)^*$, 作 X 上泛函

$$\varphi(x)=f(E_{\lambda_0}x),\quad x\in X,$$

显然 φ 是 X 上线性泛函, $\varphi|_{E_{\lambda_0}X}=f$, 并且

$$|\varphi(x)|\leqslant\|f\|\|E_{\lambda_0}\|\|x\|,\quad x\in X,$$

[注] 此式也可用第五章§3定理5中等式 $L^*=X^*/L^\perp$ 来证明. 事实上，取 $L=E_{\lambda_0}X$, 易证 $L^\perp=(I-E_{\lambda_0}^*)X^*$, $X^*/L^\perp\cong E_{\lambda_0}^*X^*$. 从而由等式 $L^*=X^*/L^\perp$ 立即得到 $E_{\lambda_0}^*X^*\cong(E_{\lambda_0}X)^*$. 这里"$\cong$"表示拓扑线性同构.

从而 $\varphi\in X^*$. 又由于

$$\varphi(E_{\lambda_0}x)=f(E_{\lambda_0}^2x)=\varphi(x),\quad x\in X,$$

所以 $E_{\lambda_0}^*\varphi=\varphi$, 即 $\varphi\in E_{\lambda_0}^*X^*$, 从而也有 $E_{\lambda_0}^*X^*\supset(E_{\lambda_0}X)^*$. 综合上述，得 $E_{\lambda_0}^*X^*=(E_{\lambda_0}X)^*$.

由于 $E_{\lambda_0}^*X^*=(E_{\lambda_0}X)^*$, 并且 $\dim(E_{\lambda_0}X)<\infty$, 所以

$$\dim(E_{\lambda_0}^*X^*)=\dim(E_{\lambda_0}X)^*=\dim(E_{\lambda_0}X)<\infty.$$

最后证 $\dim\Phi_{\lambda_0}(A)=\dim\Phi_{\lambda_0}(A^*)$. 设 e_1、…、e_n 是 $E_{\lambda_0}X$ 的任一线性基，在 $E_{\lambda_0}^*X^*$ 中取相应的对偶基 φ_1、…、φ_n:

$$\varphi_\mu(e_\nu)=\delta_{\mu\nu},\quad \mu,\ \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{2.25}$$

(由条件(2.25)易证 φ_1、…、φ_n 是线性无关的). 因为 A: $E_{\lambda_0}X\to E_{\lambda_0}X$; A^*: $E_{\lambda_0}^*X^*\to E_{\lambda_0}^*X^*$, 如果令

$$Ae_\nu=\sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu}e_\mu\quad (a_{\mu\nu}\in\mathbb{C},\ \mu,\ \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

那末由(2.25)易知

$$A^*\varphi_\nu=\sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu}\varphi_\mu.$$

而 $x=\sum_{\nu=1}^n x_\nu e_\nu\in\Phi_{\lambda_0}(A)$ 的充要条件是 x 是矩阵 $(a_{\mu\nu})$ 相应于特征值 λ_0 的特征向量. 同样, $\varphi\in\Phi_{\lambda_0}(A^*)$ 的充要条件是 φ 是转置矩阵 $(a_{\nu\mu})$ 相应于 λ_0 的特征向量. 线代数中已经证明了矩阵

$$(a_{\mu\nu}-\lambda_0\delta_{\mu\nu})、(a_{\nu\mu}-\lambda_0\delta_{\nu\mu})$$

具有相同的秩，从而 $\dim\Phi_{\lambda_0}=\dim\Phi_{\lambda_0}^*$. 证毕.

下面是 Riesz–Szauder 理论中有关全连续算子 A 的豫解式方面的结果.

定理 8 设 X 是 Banach 空间, $A\in\mathscr{C}(X\to X)$. 又设 $\lambda_0\in\sigma(A)$, $\lambda_0\neq 0$. 那末必在 λ_0 的某个环境 $O(\lambda_0)$ 中有 Laurent 展开

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{\nu=-n}^\infty C_\nu(\lambda-\lambda_0)^\nu,\quad \lambda\in O(\lambda_0), \tag{2.26}$$

其中 $C_\nu(\nu=-n,\ -n+1,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 是 X 上有界线性算子.

证明 根据定理 7 的(5), $E_{\lambda_0}X$ 的维数 n 是有限的. 而

$A|_{E_{\lambda_0}X}$ 只有一个特征值 λ_0，因而 $((\lambda_0 I-A)|_{E_{\lambda_0}X})^n=0$，并且，当 $\lambda\neq\lambda_0$ 时，

$$((\lambda I-A)|_{E_{\lambda_0}X})^{-1}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{((\lambda_0 I-A)|_{E_{\lambda_0}X})^\nu}{(\lambda-\lambda_0)^{\nu+1}}. \tag{2.27}$$

(这是线性代数中已经证明的)．在 $(I-E_{\lambda_0})X$ 上，λ_0 是 $A|_{(I-E_{\lambda_0})X}$ 的正则点，因而存在 λ_0 的环境 $O(\lambda_0)$，使得

$$\begin{aligned}&((\lambda I-A)|_{(I-E_{\lambda_0})X})^{-1}\\&=\sum_{\nu=0}^{\infty}((\lambda_0 I-A)|_{(I-E_{\lambda_0})X})^{-\nu-1}(-1)^\nu(\lambda-\lambda_0)^\nu,\quad \lambda\in O(\lambda_0),\end{aligned} \tag{2.28}$$

由此易知

$$\begin{aligned}&(\lambda I-A)^{-1}\\&=((\lambda I-A)|_{E_{\lambda_0}X})^{-1}E_{\lambda_0}+((\lambda I-A)|_{(I-E_{\lambda_0})X})^{-1}(I-E_{\lambda_0})\\&=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{((\lambda_0 I-A)|_{E_{\lambda_0}X})^\nu E_{\lambda_0}}{(\lambda-\lambda_0)^{\nu+1}}+\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu(\lambda-\lambda_0)^\nu,\end{aligned}$$

其中

$$C_\nu=((\lambda_0 I-A)|_{(I-E_{\lambda_0})X})^{-\nu-1}(-1)^\nu(I-E_{\lambda_0})\ (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

证毕．

习　　题

1．设 X、Y 是二个赋范线性空间，证明线性算子 $A\in\mathscr{C}(X\to Y)$ 的充要条件是下面三个中的任何一个：

(i) A 将 X 中单位球映成 Y 中列紧集．

(ii) A 将 X 中任何球 $O(x_0,\ r)$ $(r>0)$ 映成列紧集．

(iii) A 将 X 中单位球面 $S_1=\{x\mid\|x\|=1\}$ 映成列紧集．

2．证明定理 2 的系 1 中的(2.10)成立．

3．对于 Banach 空间上一般的有界线性算子，试举出反例说明定理 3、4、5 不成立．

4．设 $K(s,\ t)$ 是全平面上勒贝格可测函数，并且

$$\iint_{-\infty}^{\infty}K(s,\ t)\,ds\,dt<\infty.$$

作 $L^2(-\infty,\ \infty)$ 上线性算子 A：

$$(Af)(s)=\int_{-\infty}^{\infty}K(s,\ t)f(t)dt.$$

问 A 是否是 $L^2(-\infty,\ \infty)$上全连续算子.

5. 设 $\{e_n\}$ 是可析 Hilbert 空间 H 上完备就范直交系, 作 H 上线性算子 A:

$$Ae_k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}e_j,\quad a_{jk}\in\mathbb{C},\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

证明: 当 $\sum_{j,k}|a_{jk}|^2<\infty$ 时, A 是 H 上全连续算子.

6. 设 $K(s,\ t)$是 $a\leqslant s\leqslant b,\ a\leqslant t\leqslant b$ 上勒贝格可测函数. 又设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 并且

$$\int_a^b\left(\int_a^b|K(s,\ t)|^q dt\right)^{\frac{p}{q}}dx<\infty,$$

证明 $L^p[a,\ b]$上线性算子

$$(Kf)(s)=\int_a^b K(s,\ t)f(y)dy$$

是 L^p 上全连续算子.

7. 令 $\{e_n\}$ 是 l^2 中完备就范直交系. 作 l^2 上线性算子 V:

$$Ve_i=\frac{1}{i}e_{i+1},\quad i=1,\ 2,\ \cdots.$$

证明 V 是 l^2 上全连续算子, 并且 $\sigma(V)=\{0\}$, $\sigma_p(V)=\emptyset$.

§3 谱系、谱测度、谱积分

Hilbert 空间比 Banach 空间有着更好的几何结构, 自然期望 Hilbert 空间上算子谱论会有更好的结果. 本节和下一节主要讨论 Hilbert 空间上某些算子的谱论.

1. 有限维空间的回顾

设 H 是有限维的复 Hilbert 空间, 例如 $H=C^n$. 又设 A 是 H 上的自共轭算子. 在 H 上任取就范直交基 e'_1、$\cdots$、e'_n, 那末在基 $\{e'_i\}$ 下, 相应于 A 的矩阵(a_{ij})便是自共轭阵. 在线代数中已经证明: 必存在 H 上的就范直交基 e_1、$\cdots$、e_n, 如记 U 是基 $\{e'_i\}$ 到基 $\{e_i\}$ 的线性变换(即满足 $Ue'_i=e_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的酉算子), U 在基 $\{e'_i\}$ 下的矩阵表示是 (u_{ij}), 使得阵$(\bar{u}_{in})(a_{ij})(u_{jm})$是对角阵, 即

A 在基 $\{e_i\}$ 下的矩阵表示是

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

利用上述矩阵表示来研究方程

$$(A-\lambda I)x=y \tag{3.2}$$

的解的问题，即研究 A 的谱理论是最为方便．因为差不多有关(3.2)的解的问题都能通过(3.1)很简单地得到回答．例如由(3.1)可知：一切 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 都是实特征值，相应于 λ_i 的特征子空间 $\Phi_{\lambda_i}(A)=\text{span}e_i$；$\sigma(A)=\sigma_p(A)=\{\lambda_i\}$；当 $\lambda \overline{\in}\{\lambda_i\}$，即 $\lambda\in\rho(A)$ 时，$(A-\lambda I)^{-1}$ 的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1-\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n-\lambda} \end{pmatrix}; \tag{3.3}$$

$\|A\|=\max|\lambda_i|$，$\|(A-\lambda I)^{-1}\|=\max\limits_i\left|\frac{1}{\lambda_i-\lambda}\right|$；假设

$$f(t)=\sum_{i=0}^{k}a_it^i$$

是多项式，那末 $f(A)=\sum\limits_{i=0}^{k}a_iA^k$ 的矩阵表示是

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

从而又可讨论 $f(A)$ 的谱、豫解式、范数、…；当 $\{\lambda_i\}$ 中有某些是 0 时，从(3.1)可以清楚地得到那些 y 方程(3.2)可解，以及可解时的通解形式等等．

线性代数中已经证明，不仅自共轭算子有标准的"模型"(3.1)，对于 C^n 中的酉算子也有(3.1)那样的模型，只不过将(3.1)中实数组 $\{\lambda_i\}$ 换成单位圆周上的数组，即 $|\lambda_i|=1(i=1, 2, \cdots,$

n). 更一般地, C^n 中正常算子也有上述模型, 只不过 $\{\lambda_i\}$ 是 n 个复数.

这样, 很自然地问: 在一般复 Hilbert 空间 H 上的自共轭、酉、正常算子是否也能有上述标准模型? 这正是本节和下节的任务.

2. 无限维空间中的例

对于无限维复 Hilbert 空间上算子, 例如自共轭算子, 显然是不能期望它们都具有(3.1)形式的那种极简单的模型.

例 1 设 H 是无限维的复 Hilbert 空间, $\{L_i\}$ 是 H 上一列相互直交的闭线性子空间, 并且 $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} L_i=H$. 记 H 在 L_i 上的投影算子为 P_i, 根据第六章 § 5 定理 7 的(2)、定理 8 及其系,

$$I=\sum_{i=1}^{\infty} P_i.$$

又设 $\{\lambda_i\}$ 是一列互不相同的有界实数, 即存在常数 M,

$$|\lambda_i|\leqslant M,\ i=1,\ 2,\ \cdots,$$

易知算子

$$A=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i \tag{3.5}$$

是 H 上有界自共轭算子 (只要取第六章 § 5 定理 14 中的 $\{H_n\}$、$\{A_n\}$ 分别为这里的 $\{L_n\}$、$\{\lambda_n P_n\}$. 从 $\{\lambda_n\}$ 的有界假设, 可以推出定理 14 中的(5.58)所定义的 $\mathscr{D}$ 此时就是 H). 并且 L_i 中任何向量 x, 由于总有 $P_j x=0\,(j\neq i)$, $P_i x=x$, 所以

$$Ax=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i x=\lambda_i x, \tag{3.6}$$

即 L_i 中一切非零 x 都是 A 相应于 λ_i 的特征向量. 其实,

$$\Phi_{\lambda_i}(A)=L_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots).$$

在空间分解 $H=\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} L_i$ 下, H 上任何有线性算子 T 总可以表示成无限行无限列的矩阵(T_{ij}), 不过这里的矩阵元 T_{ij} 是 $L_j\to L_i$ 的有界线性算子: $T_{ij}=P_iTP_j$. 那末由(3.5)所定义的算子 A 就是对角化的, 即 $A_{ij}=0\,(i\neq j)$, $A_{ii}=\lambda_i P_i\,(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots)$.

对于无限维复 Hilbert 空间上自共轭算子，是否能期望它们都具有(3.5)的那种形式？下面给出一个例子，说明这是不行的.

例 2 设 H 是复 $L^2[0, 1]$，H 上算子

$$A: f(t)\mapsto tf(t), \quad f\in L^2[0, 1]. \tag{3.7}$$

易知 A 是 H 上有界自共轭算子. 我们证明 A 没有特征值：事实上，如果 $\lambda_0\in\sigma_p(A)$，那末必有 $0\neq f\in H$，使得

$$(A-\lambda_0 I)f=0, \tag{3.8}$$

即 $(t-\lambda_0)f(t)\underset{m}{\doteq}0$. 但因为 λ_0 是固定常数，由此可知(3.8)式成立的充要条件是 $f(t)\underset{m}{\doteq}0$，即 f 是 H 中的零向量. 从而 A 没有特征值.

因为凡能写成(3.5)形式的算子必有特征值，而(3.7)中的有界自共轭算子没有特征值，所以(3.7)中的 A 决不能写成(3.5)的形式.

但对 $L^2[0, 1]$ 上的 A：$f(t)\mapsto tf(t)$，我们可作如下考察：作 $L^2[0, 1]$ 上一族算子 $\{E_\lambda|\lambda\in[0, 1]\}$，

$$E_\lambda: f(t)\mapsto\chi_{[0,\lambda]}(t)f(t), f\in L^2[0, 1], \lambda\in[0, 1], \tag{3.9}$$

其中 $\chi_{[0,\lambda]}(t)$ 表示 $[0, \lambda]$ 上特征函数. 因为 $\chi_{[0,\lambda]}$ 是实函数，易知 E_λ 是自共轭算子. 又因为对任何 $f\in L^2[0, 1]$，

$$E_\lambda^2 f=E_\lambda(E_\lambda f)=E_\lambda(\chi_{[0,\lambda]}f)=\chi_{[0,\lambda]}\chi_{[0,\lambda]}f=\chi_{[0,\lambda]}f=E_\lambda f,$$

所以 E_λ 是幂等的，所以 $\{E_\lambda|\lambda\in[0, 1]\}$ 是 $L^2[0, 1]$ 上一族投影算子. 同样，对任何 $[\lambda, \mu]\subset[0, 1]$，

$$E_\mu-E_\lambda: f(t)\mapsto\chi_{[\lambda,\mu]}(t)f(t)$$

是 $L^2[0, 1]$ 上投影算子.

将 $[0, 1]$ n 等分，令 $\lambda_i=\dfrac{i}{n}(i=0,1,2,\cdots,n)$，并作 $L^2[0, 1]$ 上有界自共轭算子

$$A_n: f(t)\mapsto\sum_i\lambda_i(\chi_{[0,\lambda_{i+1}]}(t)-\chi_{[0,\lambda_i]}(t))f(t), \quad f\in L^2[0, 1], \tag{3.10}$$

或者说

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Delta_i E,\ \Delta_i E=E_{\lambda_{i+1}}-E_{\lambda_i}. \tag{3.11}$$

注意到

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|t-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\chi_{(0,\lambda_{i+1})}(t)-\chi_{(0,\lambda_i]}(t))\right|<\frac{1}{n}, \tag{3.12}$$

由此易知按算子范数

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n. \tag{3.13}$$

而(3.11)是有限个互相直交的投影算子 $\{\Delta_i E\}$ 的线性和，是属于(3.5)类型的"离散和"，由(3.13)可以看出本例中的算子 A(即乘自变量算子)似乎应表示成下列算子值测度的积分

$$A=\int_0^1\lambda dE_\lambda, \tag{3.14}$$

即是一种"连续和".

由此，又可想到下面的例.

例 3　设 H 是复 $L^2(-\infty, \infty)$, H 上算子

$$A:\ f(t)\mapsto tf(t),\quad f\in\mathscr{D}(A),$$

其中 $\mathscr{D}(A)=\{f|f(t)、tf(t)\in L^2(-\infty, \infty)\}$. 根据第六章§5例 13, A 是自共轭算子，类似于例 2 引入一族投影算子 $\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty, \infty)\}$;

$$E_\lambda:\ f(t)\mapsto\chi_{(-\infty,\lambda]}(t)f(t),\ f\in L^2(-\infty, \infty), \tag{3.15}$$

并将 $(-n, n]$ 进行 n^2 等分，又令

$$\lambda_i=\frac{i}{n^2}(i=-n,\ -n+1,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ n),$$

同样可作　　$A_n=\sum_{i=-n}^{n}\lambda_i\Delta_i E,\ \ \Delta_i E=E_{\lambda_{i+1}}-E_{\lambda_i}.$

自然，因为 $t\in(-\infty, \infty)$，从而不存在类似的(3.12)式，和按算子范数收敛意义下的(3.13). 但也容易证明，对任何 f、$g\in\mathscr{D}(A)$，仍有

$$(Af,\ g)=\lim_{n\to\infty}(A_n f,\ g), \tag{3.16}$$

由此又可启发我们似乎下式应该成立

$$(Af,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E_\lambda f,\ g),\quad f、g\in\mathscr{D}(A).\qquad(3.17)$$

从形式的(因为我们并未严格地证明)(3.14)、(3.17)式启发我们：对一般复 Hilbert 空间自共轭算子的标准模型至少得需引入投影算子值测度的积分概念．然后才能问：是否复 Hilbert 空间上自共轭算子都具有象(3.14)(对有界自共轭算子)、(3.17)(对无界自共轭算子)的形式．

本节中主要是讨论投影算子值测度积分的定义以及它的基本性质．下节将回答任何自共轭算子、酉算子，更一般的是正规算子都能写成上述积分的形式，并给出这种积分在谱论中的应用．读者在那里将会看到它就和有限维空间中(3.1)起到的作用一样．

3．谱系

和建立直线上勒贝格–斯蒂阶测度一样，为建立直线上投影算子值测度，需要先引入直线上投影算子值"单调增加"、右连续的函数．

定义 设 H 是复 Hilbert 空间，E_λ 是$(-\infty,\ \infty)$上取值于 H 上的投影算子函数．如果满足

(i) (单调性)对任何实数 λ、μ，当 $\lambda>\mu$ 时，$E_\lambda\geqslant E_\mu$；

(ii) (右连续)对任何 $\lambda_0\in(-\infty,\ \infty)$，$E_{\lambda_0+0}=E_{\lambda_0}$；

(iii) (强) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=0$，(强) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}E_\lambda=I$；

那末称 $E_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$是谱系．

这里 $E_{\lambda_0+0}=(\text{强})\lim\limits_{\substack{\lambda>\lambda_0\\ \lambda\to\lambda_0}}E_\lambda$．利用第六章§5习题18和 E_λ 的单调性，容易证明 E_{λ_0+0} 必是投影算子，(ii) 就是要求 E_{λ_0+0} 正是 E_{λ_0} 而已．

例如，例3中按(3.15)所作的 $E_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$，容易证明它就是 $L^2(-\infty,\ \infty)$上的谱系．同样在例2中按(3.9)式所作的 $E_\lambda(\lambda\in[0,\ 1])$，如果再补充规定：当 $\lambda<0$ 时，$E_\lambda=0$；当 $\lambda>1$ 时，$E_\lambda=I$，那末补充后的 $E_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$就是 $L^2[0,\ 1]$ 上的谱系．

例 4 设 H 是复 Hilbert 空间，$\{P_i\}$ 是 H 上任何一列相互直交的投影算子，并且满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P_i = I$，又设$\{\lambda_i\}$是任一列实数。类似跳跃函数(见第一章§5)，作

$$E_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \theta_1(\lambda - \lambda_i), \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \tag{3.18}$$

下面证明 E_λ 是谱系。

(i) 当 $\lambda > \mu$ 时，

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i \theta_1(\lambda - \lambda_i) = \sum_{\lambda_i < \lambda} P_i \\ &= \sum_{\lambda_i < \mu} P_i + \sum_{\mu < \lambda_i < \lambda} P_i = E_\mu + \sum_{\mu < \lambda_i < \lambda} P_i, \end{aligned} \tag{3.19}$$

因为 $\sum\limits_{\mu < \lambda_i < \lambda} P_i \geqslant 0$，所以 $E_\lambda \geqslant E_\mu$。

(ii) 当 $\lambda > \lambda_0$ 时，由(3.19)易知

$$E_\lambda - E_{\lambda_0} = \sum_{\lambda_0 < \lambda_i < \lambda} P_i, \tag{3.20}$$

所以，要证明 E_λ 在 λ_0 点右连续(强极限意义下)等价于要证明：对任何 $x \in H$，$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{\lambda_0 < \lambda_i < \lambda} P_i x = 0$。

事实上，对任何 $x \in H$，由于 $\{P_i\}$ 是相互直交，所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|P_i x\|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

因此，对任何 $\varepsilon > 0$，必存在自然数 N，

$$\sum_{N+1}^{\infty} \|P_i x\|^2 < \varepsilon. \tag{3.21}$$

对于 N，显然必存在 δ，使得 $\lambda_i \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ 时，必有 $i > N$。从而由(3.21)得到，只要 $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ 时，

$$\|(E_\lambda - E_{\lambda_0})x\|^2 = \Big\|\sum_{\lambda_0 < \lambda_i < \lambda} P_i x\Big\|^2 \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} \|P_i x\|^2 < \varepsilon,$$

所以 E_λ 在 λ_0 点右连续。

(iii) 谱系的条件(iii)的证明和(ii)相仿，从略。

下面给出作为算子值函数的谱系 E_t 改用普通数值函数的等价条件。

定理1 设 $E_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$ 是复 Hilbert 空间 H 上投影算子值函数. E_λ 是谱系的充要条件是下面两组中的任何一组条件.

(第一组)

(i)′ 对任何 $x\in H$, $F_x(\lambda)=(E_\lambda x,\ x)$ 是单调增加函数;

(ii)′ 对任何 $\lambda_0\in(-\infty,\ \infty)$, x、$y\in H$, 函数

$$F_{x,y}(\lambda)=(E_\lambda x,\ y)$$

是右连续(或者说, $E_{\lambda_0}=(弱)\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda$);

(iii)′ 对任何 x、$y\in H$,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}F_{x,y}(\lambda)=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}F_{x,y}(\lambda)=(x,\ y)$$

(或者说, (弱) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=0$, (弱) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}E_\lambda=I$).

(第二组)

(i)″ 对任何 $x\in H$, $F_x(\lambda)=(E_\lambda x,\ x)$ 是单调增加函数;

(ii)″ 对任何 $\lambda_0\in(-\infty,\ \infty)$, $x\in H$, $F_x(\lambda)$ 是右连续的;

(iii)″ 对任何 $x\in H$, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}F_x(\lambda)=0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F_x(\lambda)=\|x\|^2$.

证明 显然, 从谱系必可推出第一组条件(i)′~(iii)′成立, 而从(i)′~(iii)′必可推出(i)″~(iii)″成立, 所以只要证明由(i)″~(iii)″可以推出 E_λ 是谱系就可以了.

事实上, 根据算子大小的定义(见第六章§5), 由(i)″可知 E_t 是单调增加的. 对于 $x\in H$, 由第六章§5定理6的(2), 以及 $F_x(\lambda)$ 的右连续性(ii)″, 立即有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}\|(E_\lambda-E_{\lambda_0})x\|^2=\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}((E_\lambda-E_{\lambda_0})x,\ x)$$
$$=\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}F_x(\lambda)-F_x(\lambda_0)=0,$$

即由(ii)″可推出 E_λ 是右连续(强极限意义下). 类似地, 可以由(iii)″推出谱系定义中的(iii). 证毕.

注 如果 $E_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$ 是复 Hilbert 空间 H 上的谱系, 并且存在常数 m、M, 使得当 $\lambda<m$ 时, $E_\lambda=0$; 当 $\lambda>M$ 时, $E_\lambda=I$, 就称 E_λ 是 $[m,\ M]$ 上的谱系. 另外, 类似于有限维空间上的

勒贝格-斯蒂阶测度的建立(见第二章§4的附录中的第6小节),也可引入高维空间上的谱系概念,这里从略.

4. 谱测度空间

由谱系就可引入谱测度,为此,我先介绍一般高维空间上的谱测度.

定义　设 X 是 E^n 中的闭子集[注1],$\boldsymbol{B}$ 是 X 中一切Borel集全体,$\mathscr{P}$ 是复 Hilbert 空间 H 上投影算子全体. E 是 $\boldsymbol{B}\to\mathscr{P}$ 的映射,如果满足

(i) $E(X)=I$;

(ii) (可列可加)对任何 $\boldsymbol{B}$ 中一列互不相交的集 $\{A_n\}$,

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E(A_n)\text{[注2]};$$

那末称 E 是 $(X, \boldsymbol{B})$ 上的谱测度,又称 $(X, \boldsymbol{B}, E)$ 是谱测度空间.

先给出类似数值测度的某些谱测度的性质.

引理1　设 E 是 $(X, \boldsymbol{B})$ 上的谱测度. 那末

(1) $E(\phi)=0$;

(2) (有限可加)对任何 $A_i\in\boldsymbol{B}(i=1, 2, \cdots, n)$,如果 $\{A_i\}$ 互不相交,那末 $E\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(A_i)$;

(3) 如果 A、$B\in\boldsymbol{B}$,而且 $A\cap B=\emptyset$,那末

$$E(A)E(B)=E(B)E(A)=0; \tag{3.22}$$

(4) 对任何 A、$B\in\boldsymbol{B}$,

$$E(A\cup B)=E(A)+E(B)-E(A\cap B);$$

(5) $\{E(A)\,|\,A\in\boldsymbol{B}\}$ 是彼此可交的算子族;

(6) 如果 $\{A_n\}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 中单调序列,那末当单调增加时,

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}E(A_n);$$

[注1]　"闭"条件并非必要,只要 X 是 Borel 集即可. 为了某些地方叙述方便一点,才加闭条件.

[注2]　对投影算子序列,一般都是用强极限或弱极限.

当单调下降时,

$$E\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty} E(A_n).$$

证明 (1) 取 $A_n=\emptyset(n=1, 2, \cdots)$, 由可列可加性,

$$E(\phi)=E(\phi)+E(\phi)+\cdots+E(\phi)+\cdots.$$

显然,能使上式成立的有界线性算子只能是算子 0, 所以 $E(\phi)=0$.

(2) 对给定有限个互不相交的集 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$, 再补充取 $A_i=\emptyset(i=n+1, n+2, \cdots)$, 利用 E 的可列可加性就得到有限可加性.

(3) 当 $A\cap B=\emptyset$ 时, 由有限可加性, $E(A\cup B)=E(A)+E(B)$. 但是 $E(A)$、$E(B)$、$E(A\cup B)$都是投影算子, 由第六章§5 定理 7 的(2), 立即得到(3.22).

(4) 因为 $A\cup B=A\cup(B-A\cap B)$,

$$B=(B\cap A)\cup(B-A\cap B),$$

并注意到 $B-(A\cap B)$既与 $B\cap A$ 又与 A 是不相交的, 所以

$$E(B)=E(B\cap A)+E(B-A\cap B),$$
$$\begin{aligned}E(A\cup B)&=E(A)+E(B-A\cap B)\\&=E(A)+E(B)-E(B\cap A).\end{aligned}$$

(5) 当 $A\cap B=\emptyset$ 时, 由(3.22)知道 $E(A)$、$E(B)$是可交换的. 对于 $\boldsymbol{B}$ 中一般的 A、B, 总可分成 $A-B$、$B-A$、$A\cap B$, 这三个集是互不相交的, 因而 $E(A-B)$、$E(B-A)$、$E(A\cap B)$彼此可交换. 从而

$$E(A)=E(A-B)+E(A\cap B),$$
$$E(B)=E(B-A)+E(A\cap B)$$

是可交换的.

(6) 当 $\{A_n\}$ 是单调增加时,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n-1})$$

(规定 $A_0=\emptyset$), 这时 $\{A_n-A_{n-1}\}$ 是互不相交序列, 根据可列可加性,

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E(A_n-A_{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}E(A_i-A_{i-1})=\lim_{n\to\infty}E(A_n).$$

对于单调下降序列, 利用关于 X 的余集是单调增加序列来加以证明, 从略. 证毕.

注意, 性质(3)在数值测度理论中是没有的, 这个性质在谱积分中起着重要的作用.

5. 谱系与谱测度

显然, 谱系与谱测度的关系极为密切. 容易看出, 如果$(X, \boldsymbol{B}, E)$$(X=(-\infty, \infty))$ 是复 Hilbert 空间 H 上的谱测度空间. 对任何 $\lambda\in(-\infty, \infty)$, 令

$$E_\lambda=E((-\infty, \lambda]), \tag{3.23}$$

由谱测度的性质, 立即得到 E_λ 是直线上的谱系. 称(3.23)所定义的谱系为*由谱测度导出的谱系*.

定义 设 $E_\lambda(\lambda\in(-\infty, \infty))$是复 Hilbert 空间 H 上的谱系, E 是定义在直线上 Borel 集类 $\boldsymbol{B}$ 上的谱测度, 如果 (3.23)成立, 称 $E(\cdot)$是*由 E_λ 导出的谱测度*.

引理 2 设 E_λ 是直线上的谱系. 那末必存在 $\boldsymbol{B}$ 上唯一由它导出的谱测度.

证明 对每个 $x\in H$, $F_\lambda(x)$是$(-\infty, \infty)$上单调增加右连续函数, 由$F_\lambda(x)$产生直线上的勒贝格–斯蒂阶测度记为 $\mu_x(\cdot)$, 根据定理 1, $\mu_x(\cdot)$是全有限的, $\mu_x((-\infty, \infty))=\|x\|^2$. 今后视 $\mu_x(\cdot)$ 为直线上 Borel 集类 $\boldsymbol{B}$ 上测度.

同样, 对任何 x、$y\in H$, 如记 $F_{x,y}(\lambda)=(E_\lambda x, y)$, 那末由$(E_\lambda x, y)$的极化恒等式, 易知

$$F_{x,y}(\lambda)=\frac{1}{4}\{F_{x+y}(\lambda)-F_{x-y}(\lambda)+iF_{x+iy}(\lambda)-iF_{x-iy}(\lambda)\}, \tag{3.24}$$

从而由 $F_{x,y}(\lambda)$ 也产生 $\boldsymbol{B}$ 上的复值测度 $\mu_{x,y}(\cdot)$，并且

$$\mu_{x,y}(\cdot)=\frac{1}{4}\{\mu_{x+y}(\cdot)-\mu_{x-y}(\cdot)+i\mu_{x+iy}(\cdot)-i\mu_{x-iy}(\cdot)\}. \tag{3.25}$$

利用当 λ 固定时，$F_{x,y}(\lambda)=(E_\lambda x,\ y)$ 是 x、y 的双线性 Hermite 泛函，并对它所产生的测度 $\mu_{x,y}(\cdot)$ 的实部、虚部应用第三章 §2 的第 3 小节中定理 4 的系，立即知道对任何 $A\in\boldsymbol{B}$，

$$\begin{cases}\mu_{x_1+x_2,y}(A)=\mu_{x_1,y}(A)+\mu_{x_2,y}(A), & x_1,x_2,y\in H,\\ \mu_{\alpha x,y}(A)=\alpha\mu_{x,y}(A), & \alpha\in\mathbb{C},\ x,y\in H,\\ \mu_{x,y}(A)=\overline{\mu_{y,x}(A)}, & x,y\in H,\end{cases} \tag{3.26}$$

即对每个 $A\in\boldsymbol{B}$，$\mu_{x,y}(A)$ 是 x、y 的双线性 Hermite 泛函．再从 $\mu_x(A)\leqslant\mu_x(-\infty,\ \infty)=\|x\|^2$，以及第六章 §6 定理 1 的(3)和定理 2，立即知道存在 H 上自共轭算子 $\widetilde{E}(A)$，$\|\widetilde{E}(A)\|\leqslant1$，使得

$$\mu_x(A)=(\widetilde{E}(A)x,\ x),\ A\in\boldsymbol{B},\ x\in H, \tag{3.27}$$

从而由(3.25)得到

$$\mu_{x,y}(A)=(\widetilde{E}(A)x,\ y),\ A\in\boldsymbol{B},\ x\in H. \tag{3.28}$$

利用复值测度的可列可加性，对任何 $\boldsymbol{B}$ 中一列互不相交的 $\{A_n\}$，便有

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{E}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)x,\ y\right)&=\mu_{x,y}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{x,y}(A_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\widetilde{E}(A_n)x,\ y)\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{E}(A_n)x,\ y\right),\end{aligned} \tag{3.29}$$

从而 $\widetilde{E}(\cdot)$ 是在 $\boldsymbol{B}$ 上可列可加的(这是在弱极限意义下得到的)．

要证明 $\widetilde{E}(\cdot)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 上谱测度，剩下只要证明：对任何 $A\in\boldsymbol{B}$，$\widetilde{E}(A)$ 是投影算子．为此[注]，令

$$\boldsymbol{M}=\{A\mid A\in\boldsymbol{B},\ \widetilde{E}(A)\in\mathscr{P}\}, \tag{3.30}$$

[注] 下面的证明用了测度论中的单调类技巧(可见第一章 §1 的附录)．

显然，当 $A=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$（$\{(a_i, b_i]\}$ 是互不相交的），

$$(\widetilde{E}(A)x, y)=\mu_{x,y}(A)=\sum_{i=1}^{n}(F_{x,y}(b_i)-F_{x,y}(a_i)),$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}(E(b_i)-E(a_i))x, y\right),$$

但 $\sum_{i=1}^{n}(E(b_i)-E(a_i))$ 是投影算子. 所以当令 $\boldsymbol{M}_0$ 是直线上形为 $\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$ 全体时，$\boldsymbol{M}_0\subset\boldsymbol{M}$，即集类 $\boldsymbol{M}$ 包含环 $\boldsymbol{M}_0$.

设 $\{A_n\}\subset\boldsymbol{M}$，并且 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，令

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n-1})$$

（规定 $A_0=\emptyset$）. 由于

$$\widetilde{E}(A_n)-\widetilde{E}(A_{n-1})\geqslant 0,$$
$$\widetilde{E}(A_n-A_{n-1})=\widetilde{E}(A_n)-\widetilde{E}(A_{n-1})\in\mathscr{P},$$

所以从 $\widetilde{E}(\cdot)$ 的可列可加性得到

$$\widetilde{E}(A)=(\text{弱})\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{E}(A_i)-\widetilde{E}(A_{i-1}))=(\text{弱})\lim_{n\to\infty}\widetilde{E}(A_n), \tag{3.31}$$

利用第六章 §5 定理 8 的方法可知 $\widetilde{E}(A)\in\mathscr{P}$.

因为 $\boldsymbol{M}_0$ 还是代数，即 $(-\infty, \infty)\in\boldsymbol{M}_0$，所以当 $\{A_n\}\subset\boldsymbol{M}$，并且 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$ 时，注意到 $\widetilde{E}(-\infty, \infty)=I$，易知

$$\widetilde{E}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\in\mathscr{P}.$$

这样 $\boldsymbol{M}$ 是包含环的单调类，从而 $\boldsymbol{M}$ 包含包含 $\boldsymbol{M}_0$ 的最小 σ-环，而包含 $\boldsymbol{M}_0$ 的最小 σ-环是 $\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{B}$. 但从定义(3.30)，又有 $\boldsymbol{B}\supset\boldsymbol{M}$，所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}$，即对一切 $A\in\boldsymbol{B}$，$\widetilde{E}(A)$ 是 H 上投影算子.

这样 $\widetilde{E}(\cdot)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 上谱测度. 由于，对任何 $\lambda\in(-\infty, \infty)$，

$$\widetilde{E}(-\infty, \lambda]=E_\lambda-E_{-\infty}=E_\lambda, \tag{3.32}$$

所以 $\widetilde{E}(\cdot)$ 导出的谱系就是 E_λ. 显然，导出 E_λ 的谱测度是唯一的. 证毕.

在高维空间中，也可给出谱测度和谱系之间类似的结果.

6. 谱积分

下面我们用 $B(X, \boldsymbol{B})$ 表示 X 上有界 Borel 可测函数全体.

定义 设 $(X, \boldsymbol{B}, E)$ 是谱测度空间，$f \in B(X, \boldsymbol{B})$，$f$ 是实值函数，并且 $\mathscr{R}(f) \subset (m, M)$，对于分点组 D：

$$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M,$$

作和式

$$S(f; D) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i E(X(y_{i-1} \leqslant f < y_i)), \quad y_{i-1} \leqslant \xi_i < y_i. \tag{3.33}$$

记 $d(D) = \max\limits_i (y_i - y_{i-1})$. 如果存在 H 上有界线性算子 A，使得对任何 $\varepsilon > 0$，必存在 $\delta > 0$，当 $d(D) < \delta$ 时，

$$\|A - S(f; D)\| < \varepsilon, \tag{3.34}$$

称 A 是 f 的(一致)谱积分.

对于 $B(X, \boldsymbol{B})$ 中复值函数 f：$f = f_1 + if_2$，其中 f_1、f_2 分别是 f 的实部和虚部. 如果 $f_i (i=1, 2)$ 的谱积分是 A_i，那末称 $A = A_1 + iA_2$ 是 f 的谱积分.

谱积分，通常记为[注]

$$\int_X f(t) dE(t) \quad 或 \quad \int_X f(t) E(dt) \quad 或 \quad \int_X f(t) dE_t.$$

一致谱积分所用的和式极限(见(3.34))是算子范数意义下的极限. 考虑到象(3.17)那样的积分，所以还要引入(主要是对无界 Borel 可测函数)强极限和弱极限意义下的谱积分.

函数 f 关于测度 $\mu_{x,y}(\cdot)$ 的积分记为

$$\int_X f(t) d(E(t)x, y) \quad 或 \quad \int_X f(t) (E(dt)x, y)$$

$$或 \int_X f(t) d(E_t x, y).$$

定义 设 $(X, \boldsymbol{B}, E)$ 是谱测度空间，f 是 X 上 Borel 可测函

[注] 谱积分记号的运用视各人的习惯.

数，如果存在复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子 A，满足

$$(Ax, y)=\int_X f(t)d(E(t)x, y),\ x、y\in H, \tag{3.35}$$

称 A 是 f 的弱谱积分．通常仍记 A 为 $\int_X f(t)dE(t)$．

定理 2 设$(X, \boldsymbol{B}, E)$是谱测度空间，$f\in B(X, \boldsymbol{B})$，那末弱谱积分和一致谱积分都唯一存在，并且相等．此外积分还具有下列性质：

(1) (线性)对 $f、g\in B(X, \boldsymbol{B})$，$\alpha、\beta\in\mathbb{C}$，

$$\int_X(\alpha f+\beta g)(t)dE(t)=\alpha\int_X f(t)dE(t)+\beta\int_X g(t)dE(t).$$

(2) (Hermite 性)当 $f\in B(X, \boldsymbol{B})$时，

$$\left[\int_X f(t)dE(t)\right]^*=\int_X \overline{f(t)}dE(t),$$

特别，f 是实值函数时，$\int_X f(t)dE(t)$是自共轭算子．

(3) (压缩性) 当 $f\in B(X,\boldsymbol{B})$时，

$$\left\|\int_X f(t)dE(t)\right\|\leqslant\|f\|\quad(\|f\|=\sup_{t\in X}|f(t)|).$$

(4) 当 χ_A 是 Borel 集 A 的特征函数时，

$$\int_X \chi_A(t)dE(t)=E(A). \tag{3.36}$$

(5) 当 $f,g\in B(X, \boldsymbol{B})$时，$\int_X f(t)dE(t)$、$\int_X g(t)dE(t)$ 可交换．

(6) 当 $f,g\in B(X, \boldsymbol{B})$时，

$$\int_X f(t)g(t)dE(t)=\int_X f(t)dE(t)\int_X g(t)dE(t), \tag{3.37}$$

$$\left(\int_X f(t)dE(t)x,\ \int_X g(t)dE(t)y\right)=\int_X f(t)\overline{g(t)}d(E(t)x, y). \tag{3.38}$$

证明 下面分步地加以证明．

(i) 为证弱谱积分的存在性，不妨设 f 是实函数．作 H 上二元函数 $\varphi(\cdot, \cdot)$：

$$\varphi(x, y)=\int_X f(t)d(E(t)x, y), \quad x, y\in H, \tag{3.39}$$

显然 φ 是 H 上双线性 Hermite 泛函，而且

$$\begin{aligned}|\varphi(x, x)| &= \left|\int_X f(t)d(E(t)x, x)\right| \\ &\leqslant \|f\|(E(X)x, x)=\|f\|\|x\|^2.\end{aligned} \tag{3.40}$$

由第六章§6定理1的(3)，φ 是 H 上有界双线性 Hermite 泛函，因而必有有界自共轭算子 $\int_X f(t)dE(t)$，使得(3.35)成立，即 f 的弱谱积分相等.

显然，适合(3.35)的算子 $A=\int_X f(t)dE(t)$ 是唯一的.

f 的一致谱积分存在性将放在性质(4)被证明之后再证.

(ii) 对于弱谱积分，性质(1)、(4)可直接从定义(3.35)式推出. 而性质(2)验证如下：对任何 $x, y\in H$，

$$\begin{aligned}&\left(\left[\int_X f(t)dE(t)\right]^*x,\ y\right)=\left(x,\ \int_X f(t)dE(t)y\right)\\ &=\overline{\left(\int_X f(t)dE(t)y,\ x\right)}=\overline{\int_X f(t)d(E(t)y, x)}\\ &=\int_X \overline{f(t)}d\overline{(E(t)y, x)}=\int_X \overline{f(t)}d(x,\ E(t)y)\\ &=\int_X \overline{f(t)}d(E(t)x, y)=\left(\int_X \bar{f}(t)dE(t)x,\ y\right).\end{aligned}$$

弱谱积分的性质(3)，在 f 是实函数的情况下，已被证得(见(3.40)式)，一般情况下的证明将放在第(V)步.

(iii) 现证明一致谱积分存在并且和弱谱积分一致. 显然，可不妨设 f 是实函数，并用 $\int_X f(t)dE(t)$ 表示弱谱积分. 设 D 是分点组：$m<y_0<y_1<\cdots<y_n=M$，作和式 $S(f; D)$(见(3.33)). 由上面弱谱积分的性质(1)、(4)可知，$S(f; D)$ 就是函数

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\chi_{A_i}(t)$$

的弱谱积分，其中 $y_{i-1}\leqslant\xi_i<y_i$，$A_i=X(y_{i-1}\leqslant f<y_i)$ $(i=1, 2, \cdots,$

n). 显然函数 g 与 f 满足

$$\|f-g\|=\sup_{t}|f(t)-g(t)|\leqslant d(D),$$

所以从弱谱积分的线性和压缩性立即得到

$$\left\|\int_X f(t)dE(t)-S(f;\ D)\right\|=\left\|\int_X (f(t)-g(t))dE(t)\right\|$$
$$\leqslant\|f-g\|\leqslant d(D),$$

这说明 f 的弱谱积分就是一致谱积分.

(iv) 证明(5)、(6): 因为 $\{E(A)|A\in\boldsymbol{B}\}$ 是交换族, 所以对任何 f, $g\in B(X,\ \boldsymbol{B})$, $S(f;\ D)$、$S(g,\ D)$ 是可交换的. 从而它们的极限 $\int_X f(t)dE(t)$、$\int_X g(t)dE(t)$ 可交换, 这就获得(5).

对于性质(6)可分几步来证明: 首先假设 $f(t)=\chi_A(t)$、$g(t)=\chi_B(t)$ $(A,\ B\in\boldsymbol{B})$, 这时, 由性质(4)立即知道(3.37)的右边是 $E(A)E(B)$. 而 $f(t)g(t)=\chi_A(t)\chi_B(t)=\chi_{A\cap B}(t)$. 由性质(4), (3.37)的左边是 $E(A\cap B)$. 根据谱测度的性质,

$$E(A)E(B)=(E(A\cap B)+E(A-B))E(B)$$
$$=E(A\cap B)E(B)=E(A\cap B),$$

因此(3.37)成立.

其次, 假设

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}(t),\quad g(t)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{B_j}(t),$$

其中 $\{A_i\}$、$\{B_j\}$ 分别是 $\boldsymbol{B}$ 中互不相交的两组 Borel 集, 而 $\{\alpha_i\}$、$\{\beta_j\}$ 是两组数, 这时

$$\int_X f(t)dE(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE(A_i),\quad \int_X g(t)dE(t)=\sum_{j=1}^{m}\beta_jE(B_j),\tag{3.41}$$

$$\int_X f(t)g(t)dE(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_jE(A_i\cap B_j),\tag{3.42}$$

由于 $E(A\cap B)=E(A)E(B)$, 从(3.42)立即可知(3.37)成立.

最后, 对一般实 Borel 可测函数 f、g, 总存在 Borel 集的特征函数的线性组合序列 $\{f_n\}$、$\{g_n\}$ 分别在 X 上一致收敛于 f、g. 注

意到弱谱积分的压缩性，就得到

$$\int_X f(t)g(t)dE(t)=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(t)g_n(t)dE(t)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(t)dE(t)\int_X g_n(t)dE(t)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(t)dE(t)\lim_{n\to\infty}\int_X g_n(t)dE(t).$$

对于一般的复函数，可以分成实部虚部加以讨论，不难证明(3.37)成立。

从(3.37)和Hermite性立即可知(3.38)成立。

(v) 现在再证明压缩性质(3)对于复值函数f也成立。事实上，由第六章§5定理1的系2中的(3)和(3.37)，

$$\left\|\int_X f(t)dE(t)\right\|^2=\left\|\int_X \overline{f(t)}\,dE(t)\int_X f(t)dE(t)\right\|$$

$$=\left\|\int_X |f(t)|^2dE(t)\right\|\leqslant\|f\|^2.$$

证毕。

在对有界Borel可测函数积分讨论的基础上，可以引入无界的Borel可测函数的积分。

定义 设$(X, \boldsymbol{B}, E)$是复Hilbert空间H上谱测度空间，f是X上Borel可测函数，令

$$\mathscr{D}=\left\{x\,|\,x\in H,\ \int_X |f(t)|^2d(E(t)x, x)<\infty\right\}, \quad (3.43)$$

$$A_n=\int_X f(t)\chi_{E(|f|\leqslant n)}(t)dE(t),\ n=1, 2, \cdots. \quad (3.44)$$

如果存在定义在$\mathscr{D}$上的线性算子A，使得

$$Ax=(强)\lim_{n\to\infty}A_nx,$$

称A是f关于(X, B, E)的(强)谱积分，仍记A为$\int_X f(t)dE(t)$或$\int_X f(t)E(dt)$或$\int_X f(t)\,dE_t$等。

定理3 设$(X, \boldsymbol{B}, E)$是复Hilbert空间H上谱测度空间，f是X上的Borel可测函数。那末

(1) (强)谱积分存在，并且对任何 $x, y\in\mathscr{D}$，

$$\left(\int_X f(t)dE(t)x,\ y\right)=\int_X f(t)d(E(t)x,\ y).\qquad(3.45)$$

特别，当 $f\in B(X,\ \boldsymbol{B})$ 时，$\mathscr{D}=H$，从而 f 的一致谱积分、强谱积分、弱谱积分相同.

(2) $\left(\int_X f(t)dE(t)\right)^*=\int_X \overline{f(t)}dE(t)$.

(3) 当 f 是实函数时，$\int_X f(t)dE(t)$ 是自共轭的.

证明　显然，(3)是(2)的推论. 所以只要证明(1)、(2).

为了证明(1)、(2)先将第六章§5定理14推广成一般算子的情况，即证明：如果 $\{H_n\}$ 是 H 上一列相互直交的闭线性子空间，且 $H=\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}H_n$，又如果 $\{A_n\}$ 是一列有界线性算子，并且

$$A_nH_n\subset H_n,\ A_n|_{H_n^\perp}=0,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

那末定义在

$$\mathscr{D}_0=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}x_n\,|\,x_n\in H_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),\right.$$
$$\left.\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\|A_nx_n\|^2<\infty\right\}$$

上的线性算子　$A:\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\mapsto\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nx_n$ 的共轭算子 A^* 必是定义在

$$\mathscr{D}_0^*=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}y_n\,|\,y_n\in H_n(n=1,\ 2,\ \cdots),\right.$$
$$\left.\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^2<\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}\|A_n^*y_n\|^2<\infty\right\}$$

上，并且 $A^*:\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n\mapsto\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n^*y_n$.

事实上，由于 $\overline{\mathscr{D}_0}=H$，所以 A^* 存在. 今证 $\mathscr{D}(A^*)=\mathscr{D}_0^*$：对任何 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\in\mathscr{D}_0,\ y\in\mathscr{D}(A^*)$，令

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}y_n,\ y_n\in H_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

注意到 $H_n\perp H_m(n\neq m)$，有

$$(x,\ A^*y)=(Ax,\ y)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}A_ix_i,\ y\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(A_ix_i,\ y_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i,\ A_i^*y_i),\qquad(3.46)$$

特别，取 $x=x_i\in H_i$，由上式得到

$$(x_i,\ A^*y)=(x_i,\ A_i^*y_i),\quad i=1,\ 2,\ \cdots.\qquad(3.47)$$

如记 $P_i(i=1,\ 2,\ \cdots)$是 H 在 H_i 上投影，由(3.47)(当 x_i 遍取 H_i 中向量)得到

$$P_iA^*y=A_i^*y_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots\qquad(3.48)$$

因而 $y\in\mathscr{D}(A^*)$的必要条件是

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i^*y_i\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|P_iA^*y\|^2=\|A^*y\|^2<\infty,\qquad(3.49)$$

即 $\mathscr{D}(A^*)\subset\mathscr{D}_0^*$，反之，如果

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}y_n\in\mathscr{D}_0^*,$$

那末对任何 $x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\in\mathscr{D}_0$，类似(3.46)有

$$(Ax,\ y)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}A_ix_i,\ y\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i,\ A_i^*y_i)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x,\ A_i^*y_i)=\left(x,\ \sum_{i=1}^{\infty}A_i^*y_i\right),$$

即 $\mathscr{D}_0^*\subset\mathscr{D}(A^*)$.

再由(3.48)，立即知道 A^*: $\sum_{n=1}^{\infty}y_n\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*y_n$.

将上述事实应用来证明定理3：令

$$E_n=\{t\,|\,n-1\leqslant f(t)<n\}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$\{E_n\}$ 是一列 Borel 可测集. 又令

$$P_n=E(E_n),\ H_n=P_nH,\quad n=1,\ 2,\ \cdots.\qquad(3.50)$$

由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=X$，并且 $\{E_n\}$ 是互不相交，所以 $\{P_n\}$ 也是互相直交，并且 $\sum_{n=1}^{\infty}P_n=I$，即 $H=\bigoplus_{n=1}^{\infty}H_n$.

令 $$f_n(t)=f(t)\chi_{E_n}(t)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

它们都是 X 上有界 Borel 可测函数. 记 f_n 的一致谱积分为

$$A_n=\int_X f_n(t)dE(t).$$

因而对任何 $x\in H_n^{\perp}$, $y\in H$,

$$(A_nx,\ y)=\int_X f(t)\chi_{E_n}(t)d(E(t)x,\ y). \tag{3.51}$$

因为 $x\in H_n^{\perp}$, 所以对任何包含在 $X-E_n$ 中的 Borel 集 δ, 总有

$$P_nE(\delta)=E(E_n)E(\delta)=E(E_n\cap\delta)=0,$$

即 $E(\delta)x=0$, 从而 $\mu_{x,y}(\delta)=0$, 而 $f_n=f\chi_{E_n}$ 在 $X-E_n$ 上是零, 所以(3.51)右边积分值是零. 由此得到

$$(A_nx,\ y)=0,\quad y\in H,\ x\in H_n^{\perp},$$

即

$$A_nx=0,\quad x\in H_n^{\perp}. \tag{3.52}$$

现在可以对这里所作的 $\{A_n\}$ 应用第六章§5定理14的推广的事实, $\left\{\sum_{i=1}^{n}A_i\right\}$ 应在 $\mathscr{D}_0$ 上强收敛于某个线性算子 A. 显然为了证明 A 就是 f 的强积分, 只要证明 $\mathscr{D}_0$ 就是(3.43)中的 $\mathscr{D}$ 就可以了.

对任何 $x\in H$, 显然

$$\|A_nx\|^2=(A_n^*A_nx,\ x)=\int_X |f(t)|^2\chi_{E_n}(t)d(E(t)x,\ x), \tag{3.53}$$

因此, $x\in\mathscr{D}$ 的充要条件下列级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A_nx\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f(t)|^2\chi_{E_n}(t)d(E(t)x,\ x)$$
$$=\int_X |f(t)|^2d(E(t)x,\ x).$$

由于(3.52), 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|A_nx\|^2$ 收敛的充要条件是 $\sum_{i=1}^{\infty}\|A_ix_i\|^2<\infty$. 所以 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_0$. 即 f 的强谱积分存在.

换 f 为 $\bar{f}$, 再根据上述推广的事实, 就得到

$$\left(\int_X f(t)dE(t)\right)^*=\int_X \overline{f(t)}dE(t),$$

即(2)被证得.

再证(3.45)：对任何 $x, y\in\mathscr{D}$,

$$\left(\int_X f(t)dE(t)x,\ y\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n A_i x,\ y\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_X f(t)\sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t)d(E(t)x,\ y),\tag{3.54}$$

由于 $|f|^2$ 关于$(E(\cdot)(x+y),\ x+y)$、$(E(\cdot)(x-y),\ x-y)$、$(E(\cdot)(x+iy),\ x+iy)$、$(E(\cdot)(x-iy),\ x-iy)$均可积，由 Hölder 不等式，$|f|$也关于这四个全有限测度可积，而

$$\left|f\sum_{i=1}^n \chi_{E_i}\right|\leqslant|f|\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

根据复测度的控制收敛定理，由(3.54)立即得到(3.45).

当 $f\in B(X,\ \boldsymbol{B})$时，显然，$\mathscr{D}=H$，$f$ 的一致、强、弱谱积分是相同的. 证明完毕.

7. 谱测度的支集

设$(X,\ \boldsymbol{B},\ E)$是 H 上谱测度，和数值测度一样，有可能谱测度的测度是集中在比 X 更小的 Borel 集上.

引理3 设$(X,\ \boldsymbol{B},\ E)$是复 Hilbert 空间 H 上谱测度空间. 必存在 X 的唯一的按集包含关系最小闭子集 $\sigma(E)$，使得

$$E(X-\sigma(E))=0.$$

证明 设 $\lambda\in E^n$，如果存在某个环境 $O(\lambda)$，使得

$$E(O(\lambda)\cap X)=0,\tag{3.55}$$

称 λ 是谱测度 E 的正则点. 显然，当 λ 是正则点时，满足(3.55)的 $O(\lambda)$ 中任何点都是正则点. 因此，如记 E 的正则点全体为 $\rho(E)$，那末 $\rho(E)$是 E^n 中开集，从而 $\sigma(E)=X-\rho(E)$是 X 的闭子集.

先证 $E(X-\sigma(E))=0$. 设 F 是 $X-\sigma(E)$ 中任一有界闭集，因为 $F\subset X\cap\rho(E)$，所以 F 中任何一点 λ，必有 $O(\lambda)$，使得(3.55)成立. 从而 $\{O(\lambda)\,|\,\lambda\in F\}$ 覆盖 F. 由 Borel 覆盖定理，可选出有限个 $O(\lambda_1)$、$\cdots$、$O(\lambda_n)$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{n} O(\lambda_i) \supset F.$$

利用谱测度的单调性、有限可加性和(3.55),

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{n} O(\lambda_i) \cap X\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(\left(O(\lambda_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} O(\lambda_j)\right) \cap X\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

因为 $F \subset X \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} O(\lambda_i)\right)$, 再利用谱测度单调性, $E(F)=0$. 即任何 $X-\sigma(E)$ 的有界闭子集 F 的 $E(F)=0$.

显然, 在 $X-\sigma(E)$ 中必存在一列单调增加的有界闭集 $\{F_n\}$, 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X-\sigma(E)$, 从而由谱测度的单调极限性质,

$$E(X-\sigma(E)) = \lim_{n\to\infty} E(F_n) = 0.$$

再证 $\sigma(E)$ 是最小的闭集. 事实上, 如果又有 X 的闭集 F, 使得 $E(X-F)=0$, 但 F 不包含 $\sigma(E)$. 那末必存在

$$\lambda_0 \in \sigma(E),$$

而 $\lambda_0 \overline{\in} F$ (即 $\lambda_0 \in X-F$). 根据 $\lambda_0 \in \sigma(E)$, 以及 $\sigma(E)$ 的定义, 必对 λ_0 的任何环境 $O(\lambda_0)$, 都有 $E(O(\lambda_0) \cap X) \neq 0$; 根据

$$\lambda_0 \in X-F,$$

而 $X-F$ 是相对于 X 的开集, 以及 $E(X-F)=0$, 又必存在 λ_0 的环境 $O'(\lambda_0)$, 使得 $(O'(\lambda_0) \cap X) \subset X-F$, 从而

$$E(O'(\lambda_0) \cap X) = 0.$$

显然, 这是矛盾. 所以 $\sigma(E)$ 是最小的.

由最小性知道必然是唯一的. 证毕.

定义 设 $(X, \boldsymbol{B}, E)$ 是复 Hilbert 空间 H 上谱测度, 称满足 $E(X-F)=0$, 而按集包含关系最小的 X 的闭子集 F 为 E 的支集. 记为 $\operatorname{supp} E$.

由引理 3, 显然 $\operatorname{supp} E = \sigma(E)$. 今后也用 $\sigma(E)$ 表示谱测度 E 的支集. 谱测度的支集的另一种等价说法是: $\sigma(E)$ 是满足

$E(F)=I$ 的 X 的最小闭集. 利用支集概念, 显然, 一切(一致、强、弱)谱积分$\int_X f(t)dE(t)$ 又可写成$\int_{\sigma(E)} f(t)dE(t)$(因为

$$\int_{X-\sigma(E)} f(t)dE(t)=0$$

对一切 f 成立).

8. 谱积分的谱

现在讨论由谱积分所定义的算子的谱. 为书写方便, 我们简记$\int_{\sigma(E)} f(t)dE(t)$为 f_E. 由于讨论一般 Borel 可测函数, 所以用的是强谱积分.

定理 4 设$(X, \boldsymbol{B}, E)$是复 Hilbert 空间 H 上谱测度空间, f 是 X 上 Borel 可测函数. 下列命题成立:

(1) X 的单点集 $\{\lambda_0\}$的 $E(\{\lambda_0\})\neq 0$ 的充要条件是对任何 f, $f(\lambda_0)$必是 f_E 的特征值, 当 $E(\{\lambda_0\})\neq 0$ 时, 而且

$$\Phi_{f(\lambda_0)}(f_E)\supset E(\{\lambda_0\})H.$$

(2) $\mu\in\rho(f_E)$的充要条件是存在某个 $\varepsilon>0$, 使得

$$\{\lambda \mid |f(\lambda)-\mu|>\varepsilon\}$$

的谱测度 $E(\{\lambda \mid |f(\lambda)-\mu|>\varepsilon\})=0$. 而当 $\mu\in\rho(f_E)$时,

$$(f_E-\mu I)^{-1}=\int_{\sigma(E)}\frac{1}{f(t)-\mu}dE(t). \tag{3.56}$$

(3) 对任何 $\lambda\in\sigma(f_E)$, 必存在

$$\{x_n\}\subset H,\ \|x_n\|=1,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

使得

$$\lim_{n\to\infty}\|(f_E-\lambda I)x_n\|=0, \tag{3.57}$$

即 $\sigma(f_E)$全是近似谱点.

证明 (1) 对函数 $f(t)-f(\lambda_0)$应用定理 3,

$$x\in\mathscr{D}(f_E-f(\lambda_0)I)=\mathscr{D}(f_E)$$

的充要条件是

[注] 换言之, 考察$(X, \boldsymbol{B}, E)$和考察$(\sigma(E), \boldsymbol{B}, E)$是等价的. 但本书中还是用$(X, \boldsymbol{B}, E)$.

$$\|(f_E-f(\lambda_0)I)x\|^2=\int_X|f(t)-f(\lambda_0)|^2d(E(t)x, x)<\infty. \tag{3.58}$$

显然，当 $x\in E(\{\lambda_0\})H(x\neq 0)$时，对任何 $\delta\in \boldsymbol{B}$, $\delta\subset X-\{\lambda_0\}$, 有

$$\|E(\delta)x\|\leqslant\|E(X-\{\lambda_0\})x\|=\|E(X-\{\lambda_0\})E(\{\lambda_0\})x\|=0,$$

即测度 $\mu_x(\cdot)=(E(\cdot)x, x)$仅集中在 $\{\lambda_0\}$ 上，然而(5.38)中被积函数 $|f(t)-f(\lambda_0)|$ 在 $\{\lambda_0\}$ 上是零，所以(3.58)右边积分等于0，从而 x 是相应于 $f(\lambda_0)$的特征向量，从而

$$E(\{\lambda_0\})H\subset\Phi_{f(\lambda_0)}(f_E)$$

对一切 Borel 可测函数 f 都成立.

反之，对任何 f, $f(\lambda_0)$都是 f_E 的特征值，从而必有相应的 $x\neq 0$, 使(3.58)左边等于零. 特别，取 $f(t)$在 $X-\{\lambda_0\}$ 上的值为 $f(\lambda_0)+1$, 因而

$$\begin{aligned}\mu_x(X-\{\lambda_0\})&=\int_{X-\{\lambda_0\}}d(E(t)x, x)\\&=\int_X|f(t)-f(\lambda_0)|^2d(E(t)x, x)\\&=\|(f_E-f(\lambda_0)I)x\|^2=0,\end{aligned}$$

因而 $\mu_x(\{\lambda_0\})=\mu_x(\{\lambda_0\})+\mu_x(X-\{\lambda_0\})=\mu_x(X)=\|x\|^2\neq 0$, 由此可知 $E(\{\lambda_0\})\neq 0$.

(2) 必要性 假设 μ 是正则点. 如果不存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$E(\{\lambda\mid |f(\lambda)-\mu|>\varepsilon\})=0,$$

那末，当取 $\varepsilon=\frac{1}{n}(n=1, 2, \cdots)$ 时，必有

$$x_n\in E\left(\left\{\lambda\,\Big|\, |f(\lambda)-\mu|\leqslant\frac{1}{n}\right\}\right)H, \quad \|x_n\|=1,\ n=1, 2, \cdots.$$

因而
$$x_n\perp E\left(\left\{\lambda\,\Big|\, |f(\lambda)-\mu|>\frac{1}{n}\right\}\right)H,$$

$$\|(f_E-\mu I)x_n\|^2=\int_X|f(t)-\mu|^2d(E(t)x_n, x_n)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^2\int_{X\left(|f(t)-\mu|\leqslant\frac{1}{n}\right)}d(E(t)x_n, x_n)\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^2\|x_n\|^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2,$$

即 μ 是 f_E 的近似谱点，这与假设 $\mu\in\rho(f_E)$ 矛盾。所以是必要的。

充分性 如果 μ 满足：存在某 $\varepsilon>0$，使得

$$E(\{\lambda\mid|f(\lambda)-\mu|>\varepsilon\})=0.$$

从而 $\frac{1}{f(t)-\mu}$ 在 $\sigma(E)$ 上是有界 Borel 可测函数，因而(3.56)所定义的算子是 H 上有界线性算子。剩下的仅只要证明 (3.56) 定义的 $(f_E-\mu I)^{-1}$ 确是[注] $f_E-\mu I$ 的逆算子了。

事实上，对任何自然数 n 和 $x\in H$，记

$$E_n=\{t\mid|f(t)-\mu|\leqslant n\},$$

$$\int_{\sigma(E)}(f(t)-\mu)\chi_{E_n}(t)dE(t)\int_{\sigma(E)}\frac{1}{f(t)-\mu}dE(t)x$$

$$=\int_{\sigma(E)}(f(t)-\mu)\chi_{E_n}(t)\frac{1}{f(t)-\mu}dE(t)x$$

$$=\int_{\sigma(E)}\chi_{E_n}(t)dE(t)x. \tag{3.59}$$

当 $n\to\infty$ 时，(3.59)右边的极限是 x，因而说明

$$y=\int_{\sigma(E)}\frac{1}{f(t)-\mu}dE(t)x\in\mathscr{D}(f_E-\mu I),$$

并且

$$(f_E-\mu I)(f_E-\mu I)^{-1}x=x,\quad x\in H. \tag{3.60}$$

同样，对任何 $x\in\mathscr{D}(f_E-\mu I)$，

$$\int_{\sigma(E)}\frac{1}{f(t)-\mu}dE(t)\int_{\sigma(E)}(f(t)-\mu)dE(t)x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\sigma(E)}\frac{1}{f(t)-\mu}dE(t)\int_{\sigma(E)}(f(t)-\mu)\chi_{E_n}(t)dE(t)x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\sigma(E)}\chi_{E_n}dE(t)=x,$$

即

$$(f_E-\mu I)^{-1}(f_E-\mu I)x=x,\quad x\in\mathscr{D}(f_E-\mu I). \tag{3.61}$$

(3.60)、(3.61)说明 $(f_E-\mu I)^{-1}$ 是 $f_E-\mu I$ 的逆算子。

[注] 这里我们暂时将 $(f_E-\mu I)^{-1}$ 作为积分 $\int_{\sigma(E)}\frac{1}{f(t)-\mu}dE(t)$ 的形式记号。

(3) 和(2)的必要性的证明相仿，易知 $\lambda\in\sigma(f_E)$ 时，(3.57)成立。证毕.

习　题

1. 证明例3中按(3.15)所作的 E_λ 是 $L^2(-\infty,\infty)$ 上的谱系.

2. 设 $(X, \boldsymbol{B}, E)$ 是复 Hilbert 空间 H 上谱测度空间，$f\in B(X, \boldsymbol{B})$，证明:

(i) $\int_X f(t)dE(t)$ 是 H 上正常算子.

(ii) 当 $|f(t)|=1$ $(t\in X)$ 时，$\int_X f(t)dE(t)$ 是酉算子.

(iii) 当 $f(t)\geqslant 0$ $(t\in X)$ 时，$\int_X f(t)dE(t)\geqslant 0$.

3. 设 $(X, \boldsymbol{B}, E)$ 是复 Hilbert 空间 H 上谱测度空间，f 是 X 上 Borel 可测函数，$\{M_n\}$ 是一列单调增加的而发散到无限大的正数列. 作 H 上算子

$$A_n'=\int_X f(t)\chi_{x(|f|<M_n)}(t)dE(t),\quad n=1, 2, \cdots,$$

令 $\mathscr{D}_f$ 是 f 的强谱积分 $\int_X f(t)dE(t)$ 的定义域. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_X f(t)dE(t)x-A_n'x\right\|=0,\quad x\in\mathscr{D}_f.$$

即使 $\{M_n\}$ 只是一列发散到无限大的正数列，证明上面极限关系仍成立.

4. 设 $(X, \boldsymbol{B}, E)$ 是复 Hilbert 空间 H 上谱测度空间，$f\in B(X, \boldsymbol{B})$. 令 $M=\{\lambda\,|\,\lambda\geqslant 0,\ E(\{t\,|\,|f(t)|>\lambda\})\neq 0\}$，$\|f\|'=\sup\limits_{\lambda\in M}\lambda$. 证明

$$\left\|\int_X f(t)dE(t)\right\|=\|f\|'.$$

5. 设 X 是 n 维欧几里德空间 E^n 中的闭子集，H 是复 $L^2(X, \boldsymbol{B}, \mu)$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是 X 上 Borel 集类，μ 是 $(X, \boldsymbol{B})$ 上一般的勒贝格-斯蒂阶测度. 对任何 $\delta\in\boldsymbol{B}$，作算子

$$E(\delta):\ f(t)\mapsto\chi_\delta(t)f(t),\ f\in H=L^2(X, \boldsymbol{B}, \mu).$$

证明 $E(\cdot)$ 是 $(X, \boldsymbol{B})$ 上谱测度. 并且对任何 X 上 Borel 可测函数 φ，所作 H 上相应的乘积算子

$$A_\varphi:\ f(t)\mapsto\varphi(t)f(t),$$

$$f\in\mathscr{D}=\{f\,|\,f(t)\in L^2(X, \boldsymbol{B}, \mu),\ \varphi(t)f(t)\in L^2(X, \boldsymbol{B}, \mu)\},$$

必有
$$A_\varphi=\int_X \varphi(t)\,dE(t).$$

6. (谱测度变换)设$(X, \boldsymbol{B}, E)$是复 Hilbert 空间 H 上谱测度空间，f 是 X 上$(X, \boldsymbol{B})$可测函数。对复平面 $\mathbb{C}$ 的 Borel 集全体 $\boldsymbol{B}'$，作 $\boldsymbol{B}'\to E$ 的映射
$$\tilde{E}:\ \delta\mapsto E(\{t|f(t)\in\delta\}),$$
证明 $\tilde{E}$ 是$(\mathbb{C}, \boldsymbol{B}')$上谱测度，而且

(i)
$$\int_X f(t)dE(t)=\int_{\mathbb{C}} z d\tilde{E}(z),$$

(ii)
$$\operatorname{supp}\tilde{E}=\sigma(A_f).$$

§4 酉、自共轭、正规(正常)算子谱分解

这一节中将把有限维复 Hilbert 空间中正常矩阵(它的特例是酉阵、自共轭阵)的对角化理论推广到一般维数的情况，即证明复 Hilbert 空间 H 上正常算子（它的特例是酉算子、自共轭算子)N，必可写成某个$(\sigma(N), \boldsymbol{B})$上的谱测度 $E(\cdot)$的积分
$$N=\int_{\sigma(N)} z dE(z) \tag{4.1}$$
其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $\sigma(N)$上 Borel 集类．但我们证明的过程是先对酉算子证明(4.1)成立，然后利用酉算子结论证明自共轭算子(包括无界情况)也有(4.1)形式，最后再证正常算子的(4.1)式．

1. 酉算子谱分解

设 H 是复 Hilbert 空间，$U\in B(H\to H)$．下面是要用到的基本性质：算子 U 是酉算子的充要条件是 $UU^*=U^*U=I$ 或是 $U^*=U^{-1}$(见第六章§5定理2的系中的(3))．对于 H 上酉算子 U，我们要证明必有直线上谱系 $E_\lambda(\lambda\in(-\infty, \infty))$，使得
$$U=\int e^{i\lambda}dE_\lambda\left(\text{或 } U=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda}dE(\lambda)\right). \tag{4.2}$$

现在仅知道 U 是酉算子，而要找出投影算子族 $\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty, \infty)\}$．如何找？先作一简单分析：如果(4.2)是成立，那末对任何多项式
$$p(t)=\sum a_n t^n,\ p(U)=\sum a_n U^n=\int\sum a_n e^{in\lambda}\,dE_\lambda,$$

即

$$(p(U)x,\ y)=\int p(e^{i\lambda})d(E_\lambda x,\ y),\quad x、y\in H. \qquad (4.3)$$

作为给定了的 U，即(4.3)左边作为已知的情况下，要决定右边的测度 $\mu_{x,y}(\cdot)=(E(\cdot)x,\ y)$，也可以说決定出一族连续双线性泛函 $\varphi(x,\ y;\lambda)(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$．自然要这族双线性泛函是由某投影算子族 $\{E_\lambda|\lambda(-\infty,\ \infty)\}$ 产生的．当 x、y 固定，双线性泛函 $\varphi(x,\ y;\lambda)$ 作为 λ 的函数是某个复值测度，因此，当 $p(t)$ 在某个连续函数空间上变化时，(4.3)右边积分表示是某个连续函数空间上连续线性泛函．这样就启示我们应把

$$\Phi(x,\ y;\ p)=(p(U)x,\ y)$$

视为：当 p 固定时是 x、y 的连续双线性；而当 x、y 固定时是 p 在某个连续函数空间上变化的连续线性泛函．我们证明(4.2)的过程正是将上述分析的过程反过进行．

引理1　设

$$p(e^{it})=\sum_{\nu=-N}^{N}C_\nu e^{i\nu t}$$

是三角多项式，而且对任何 t，$p(e^{it})>0$．那末必有三角多项式

$$q(e^{it})=\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu e^{i\nu t}$$

使得

$$p(e^{it})=|q(e^{it})|^2.$$

证明　根据 $p(e^{it})>0$ 假设，有理函数

$$p(z)=\sum_{\nu=-N}^{N}C_\nu z^\nu$$

在 $|z|=1$ 上取实数值．由复变函数中 Schwarz 反照原理可知

$$p(z)=\overline{p\left(\frac{1}{\bar z}\right)}.$$

又因为 $p(e^{it})>0$，$p(z)$ 在 $|z|=1$ 上没有零点．设 $p(z)$ 在单位圆内的零点 α_1、…、α_n，其重数分别为 m_1、…、m_n．由于

$$p\left(\frac{1}{\bar\alpha_\nu}\right)=\overline{p(\alpha_\nu)}=0,$$

因而 $\frac{1}{\bar{\alpha}_\nu}$ 也是 $p(z)$ 的零点, 并且由

$$p(z)=\overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},$$

容易证明 $\frac{1}{\bar{\alpha}_\nu}$ 也是 m_ν 重的零点. 因此

$$p(z)=C\prod_{\nu=1}^{n}(z-\alpha_\nu)^{m_\nu}\left(\frac{1}{z}-\bar{\alpha}_\nu\right)^{m_\nu}$$

所以
$$p(e^{it})=C\prod_{\nu=1}^{n}|e^{it}-\alpha_\nu|^{2m_\nu},\quad C>0.$$

令 $q(z)=\sqrt{C}\prod_{\nu=1}^{n}(z-\alpha_\nu)^{m_\nu}$, 那末便有

$$p(e^{it})=|q(e^{it})|^2.$$

定理 1 设 U 是复 Hilbert 空间 H 上酉算子. 那末必有唯一的谱系 $\{E_\theta|\theta\in[0,\ 2\pi]\}$[注] 满足 $E_0=0$, 并使得

$$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\,dE_\theta. \tag{4.4}$$

证明 令 $T_{2\pi}$ 表示三角多项式全体,

$$C_{2\pi}=\{f|f\in C[0,\ 2\pi],\ f(0)=f(2\pi)\},$$

$T_{2\pi}$、$C_{2\pi}$ 都是 $C[0,\ 2\pi]$ 的线性子空间, 而 $C_{2\pi}$ 是闭的, $T_{2\pi}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密.

证明分成三步进行.

(1) 找出双线性泛函族 $\varphi(x,\ y;\theta)$.

对三角多项式

$$p(e^{i\theta})=\sum_{\nu=-N}^{N}C_\nu e^{i\nu\theta},$$

称 $\sum_{\nu=-N}^{N}\bar{C}_\nu e^{-i\nu\theta}$ 为 p 的共轭三角多项式, 记为 $\bar{p}(e^{i\theta})$. 令

$$p(U)=\sum_{\nu=-N}^{N}C_\nu U^\nu,$$

[注] 补充 $E_\theta=0\ (\theta<0)$, $E_\theta=I\ (\theta>2\pi)$, 那末 $\{E_\theta|\theta\in(-\infty,\ \infty)\}$ 成为直线上谱系. 这样积分(4.4)可以写成 $U=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta}dE_\theta$.

易知 $\bar{p}(U)=p(U)^*$. 两个三角多项式 $p_1(e^{i\theta})$、$p_2(e^{i\theta})$的乘积 $p_3(e^{i\theta})$仍是三角多项式，并且$p_3(U)=p_1(U)p_2(U)=p_2(U)p_1(U)$. 这些都容易直接验证.

对任何 $p\in T'_{2\pi}$, x、$y\in H$, 令

$$\Phi(x, y; p)=(p(U)x, y), \tag{4.5}$$

显然，当 x、y 固定时，$\Phi(x, y; p)$是 $T_{2\pi}$ 上线性泛函. 下面证明 $\Phi(x, y; p)$在 $T_{2\pi}$ 上连续.

如果 p 是在$[0, 2\pi]$上只取正值的三角多项式，由引理 1，有三角多项式 q，使 $p(e^{i\theta})=|q(e^{i\theta})|^2$，所以

$$\begin{aligned}\Phi(x, x; p)&=(p(U)x, x)=(\bar{q}(U)q(U)x, x)\\&=\|q(U)x\|^2\geqslant 0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

当 p 是实值三角多项式时，那末对任何实数

$$C>\|p\|(\|p\|=\max_\theta|p(e^{i\theta})|),\quad p_1=C-p$$

是正值的. 由(4.6)，

$$\Phi(x, x; p_1)=(Cx, x)-\Phi(x, x; p)\geqslant 0,$$

即 $\Phi(x, x; p)<C(x, x)$. 再令 $C\to\|p\|$，立即得到

$$\Phi(x, x; p)\leqslant\|p\|\|x\|^2,$$

将 p 换成 $-p$，又有 $-\Phi(x, x; p)\leqslant\|p\|\|x\|^2$. 因此

$$|\Phi(x, x; p)|\leqslant\|p\|\|x\|^2. \tag{4.7}$$

对于复值三角多项式p，作分解 $p=p_1+ip_2$，p_1、p_2 分别是 p 的实部、虚部. 因为$\|p_1\|\leqslant\|p\|$，$\|p_2\|\leqslant\|p\|$，所以

$$|\Phi(x, x; p)|\leqslant|\Phi(x, x; p_1)|+|\Phi(x, x; p_2)|\leqslant 2\|p\|\|x\|^2,$$

所以对任何 $x\in H$，$\Phi(x, x; p)$是 $T_{2\pi}$ 上连续线性泛函. 从(4.5)易知

$$\begin{aligned}\Phi(x, y; p)=\frac{1}{4}(&\Phi(x+y, x+y; p)-\Phi(x-y, x-y; p)\\&+i\Phi(x+iy, x+iy; p)-i\Phi(x-iy, x-iy; p)).\end{aligned}$$

因此，当 x、y 固定时，$\Phi(x, y; p)$是 $T_{2\pi}$ 上连续线性泛函. 因为 $T_{2\pi}$ 在 $C_{2\pi}$ 上稠密，所以 $\Phi(x, y; p)$可视为 $C_{2\pi}$ 上连续线性泛函. 根据第五章§2定理13，必存在唯一的 $\varphi(x, y; \cdot)\in V_{2\pi}$(即

$\varphi(x, y; \theta)$ 作为 $\theta\in[0, 2\pi]$ 的函数，它满足

$$\varphi(x, y; 0)=0; \varphi(x, y; \theta+0)=\varphi(x, y; \theta), \theta\in[0, 2\pi), \tag{4.8}$$

并且是 $[0, 2\pi]$ 上有界变差函数)，使得

$$\Phi(x, y; p)=\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\varphi(x, y; \theta), \; p\in T_{2\pi}. \tag{4.9}$$

(2) 考察 $\varphi(x, y; \theta)$ 的性质：

(i) 固定 $\theta\in[0, 2\pi]$，$\varphi(x, y; \theta)$ 是 x、y 的双线性泛函.

事实上，对任何 $x_1, x_2\in H$，$\alpha_1, \alpha_2\in\mathbb{C}$，由(4.9)，

$$\begin{cases} \Phi(x_1, y; p)=\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\varphi(x_1, y; \theta), \\ \Phi(x_2, y; p)=\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\varphi(x_2, y; \theta), \\ \Phi(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y; p)=\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\varphi(\alpha_1 x_1+\beta x_2, y; \theta). \end{cases} \tag{4.10}$$

由于 $\Phi(x, y; p)$ 关于 x 是线性的，因此由(4.10)得到

$$\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\varphi(\alpha_1 x_1+\beta x_2, y; \theta)$$
$$=\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d(\alpha_1\varphi(x_1, y; \theta)+\alpha_2\varphi(x_2, y; \theta)). \tag{4.11}$$

(4.11) 对任何 $p\in T_{2\pi}$ 成立. 利用第六章§2的定理13，从(4.11)就得到

$$\varphi(\alpha_1 x_1+\beta x_2, y; \theta)=\alpha\varphi(x_1, y; \theta)+\alpha_2\varphi(x_2, y; \theta). \tag{4.12}$$

而 $\varphi(x, y; \theta)$ 关于 y 的共轭线性类似可证得. 因此对每个 $\theta\in[0, 2\pi]$，$\varphi(x, y; \theta)$ 是 x、y 的双线性泛函.

(ii) 固定 $x\in H$，$\varphi(x, x; \theta)$ 是 θ 的实函数，而且是单调增加的.

事实上，对正值的 $p\in T_{2\pi}$，$\Phi(x, x; p)\geqslant 0$（见(4.6)）. 这就是说，$p(e^{i\theta})>0$ 时，

$$\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\varphi(x, x; \theta)\geqslant 0.$$

再利用 $T_{2\pi}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密性，易知将 p 换成 $C_{2\pi}$ 中的 $f(e^{i\theta})>0$，仍成立

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\varphi(x, x; \theta)\geqslant 0.$$

将第三章§2的定理4的证明略加修改，并注意到

$$\varphi(x, x; \theta)\varphi(x, x; 0)=\varphi(x, x; 0+0),$$

由此易知 $\varphi(x, x; \theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调增加（参见第三章§2习题5和第五章§2习题13）。

(iii) 在(4.9)中取 p 为常数函数1，得到

$$\begin{aligned}(x, y)&=\Phi(x, y; 1)=\varphi(x, y; 2\pi)-\varphi(x, y; 0)\\&=\varphi(x, y; 2\pi),\end{aligned}$$

特别取 $x=y$，并利用(ii)，得到

$$0\leqslant\varphi(x, x; \theta)\leqslant(x, x),\ \theta\in[0, 2\pi]. \tag{4.13}$$

综上述(i)～(iii)，得到：固定 $\theta\in[0, 2\pi]$，$\varphi(x, y; \theta)$ 是 H 上双线泛函，又因为(4.13)，$\varphi(x, y; \theta)$ 是 Hermite 泛函，并且是有界的．根据第六章§6定理2，存在唯一的 H 上有界自共轭算子 E_θ，使得

$$\varphi(x, y; \theta)=(E_\theta x, y),\ x, y\in H,\ \theta\in[0, 2\pi]. \tag{4.14}$$

从(iii)知道 $E_{2\pi}=I$，$E_0=0$，由 $\varphi(x, y; \theta)$ 关于 θ 的右连续性，所以 $E_\theta(\theta\in[0, 2\pi])$ 是(弱)右连续的．

(3) 证明 $E_\theta(\theta\in[0, 2\pi])$ 是谱系．

显然，只要证明 E_θ 是投影算子．由于 $E_\theta=E_\theta^*$ 已被证得，所以只要证明 $E_\theta^2=E_\theta$．

任取 $T_{2\pi}$ 中两个实值的三角多项式 p、q，以及 H 中的任何 x、y，由(4.5)、(4.9)，有

$$(p(U)x, q(U)y)=\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d(E_\theta x, q(U)y), \tag{4.15}$$

但 $q(U)$ 是自共轭的，所以

$$\begin{aligned}(E_\theta x, q(U)y)&=(q(U)E_\theta x, y)\\&=\int_0^{2\pi} q(e^{it})d(E_tE_\theta x, y).\end{aligned} \tag{4.16}$$

另一方面，又有

$$(p(U)x,\ q(U)y)=(q(U)p(U)x,\ y)$$
$$=\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})q(e^{i\theta})d(E_\theta x,\ y)$$
$$=\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\int_0^{\theta} q(e^{it})d(E_t x,\ y).\quad (4.17)$$

后一个等式的成立是根据第三章§5定理3的系中的(5.36)得到的. 将(4.16)代入(4.15)并和(4.17)加以比较，立即得到

$$\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\int_0^{\theta} q(e^{it})d(E_t x,\ y)$$
$$=\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})d\int_0^{2\pi} q(e^{it})d(E_t E_\theta x,\ y),$$

再利用泛函表示的唯一性，就得到

$$\int_0^{\theta} q(e^{it})d(E_t x,\ y)=\int_0^{2\pi} q(e^{it})d(E_t E_\theta x,\ y).\quad (4.18)$$

如果作 $g_\theta(t)$ 如下：当 $t\leqslant\theta$ 时，$g_\theta(t)=(E_t x,\ y)$；当 $t>\theta$ 时 $g_\theta(t)=(E_\theta x,\ y)$，这样，上式就变成了

$$\int_0^{2\pi} q(e^{it})dg_\theta(t)=\int_0^{2\pi} q(e^{it})d(E_t E_\theta x,\ y).\quad (4.19)$$

由于(4.19)对一切 $q\in T_{2\pi}$ 成立，又一次利用泛函表示的唯一性定理，得到

$$g_\theta(t)=(E_t E_\theta x,\ y),\quad (4.20)$$

所以，当 $t\leqslant\theta$ 时，$(E_t x,\ y)=(E_t E_\theta x,\ y)$. 特别取 $t=\theta$，便知

$$E_\theta=E_\theta^2.$$

这样 E_θ 是投影算子，从而 $E_\theta(\theta\in[0,\ 2\pi])$ 是谱系.

最后，取 $p(e^{i\theta})$ 为 $e^{i\theta}$，由(4.5)、(4.9)就得

$$(Ux,\ y)=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d(E_\theta x,\ y),\quad x、y\in H,\quad (4.21)$$

即(4.4)式在弱积分意义下已被证得. 因为 $e^{i\theta}$ 是有界函数，所以(4.4)式也是在一致谱积分意义下成立.

另外，(4.4)的谱系 $E_\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 是由 $\Phi(x,\ y;\ p)$ 确定出来的，而 $\Phi(x,\ y;\ p)$ 完全是由 U 本身确定的，所以容易知道适合

(4.4)的谱系是唯一的. 事实上, 如果有谱系 $E'_\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$, 使得

$$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE'_\theta,\tag{4.22}$$

那末, 对任何 $x,y\in H$, $p\in T_{2\pi}$, 便有

$$\int_0^{2\pi}p(e^{i\theta})d(E'_\theta x,\ y)=\int_0^{2\pi}p(e^{i\theta})d(E_\theta x,\ y).\tag{4.23}$$

利用泛函表示唯一性, 便有 $(E'_\theta x,\ y)=(E_\theta x,\ y)$对一切 $x,y\in H$, $\theta\in[0,\ 2\pi]$成立. 从而 $E'_\theta=E_\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$. 证毕.

分别称定理 1 中的谱系 E_θ 以及相应的谱测度是 U 决定的谱系、谱测度.

类似于讨论谱积分的谱的方法(见本章§3 第 7 小节) 可获酉算子许多基本性质.

系 设 U 是复 Hilbert 空间 H 上酉算子, $E_\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$是由 U 决定的谱系. 下列命题成立:

(1) 如果 $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|\neq1$, 那末 λ 必是 U 的正则点, 即 U 的谱 $\sigma(U)$ 落在单位圆周上. 当 $|\lambda|\neq1$ 时,

$$(U-\lambda I)^{-1}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}-\lambda}dE_\theta.\tag{4.24}$$

(2) 数 $e^{i\theta_0}(0<\theta_0<2\pi)$是 U 正则点的充要条件是有正数 δ, 使得 E_θ 在$[\theta_0-\delta,\ \theta_0+\delta]$为常算子(即

$$E_\theta=E_{\theta_0},\ \theta\in[\theta_0-\delta,\ \theta_0+\delta]\text{[注]}.$$

数 1 是 U 的正则点的充要条件是有正数 δ, 使得当 $\theta\in[0,\ \delta)$ 时, $E_\theta=0$; 当 $\theta\in(2\pi-\delta,\ 2\pi]$时, $E_\theta=I$.

数 $e^{i\theta_0}$ 是正则点时,

$$(U-e^{i\theta_0}I)^{-1}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}dE_\theta.\tag{4.25}$$

(3) $e^{i\theta_0}(0<\theta_0\leqslant2\pi)$是 U 的特征值的充要条件是

$$E_{\theta_0}-E_{\theta_0-0}\neq0,$$

并且$(E_{\theta_0}-E_{\theta_0-0})H$ 是相应于 $e^{i\theta_0}$ 的特征子空间.

[注] 如果 $E(\cdot)$是 E_θ产生的$[0,\ 2\pi]$上的 Borel 集类上谱测度, 那末这件事等价于$E([\theta_0-\delta,\ \theta_0+\delta])=0$.

(4) 记 $E(\cdot)$ 是由谱系 $E_\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 产生的 $[0, 2\pi]$ 上的 Borel 集类 $\boldsymbol{B}$ 上的谱测度. 那末任一与 U 交换的有界线算子 A, 必也与 $E_\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$、$E(M)(M\in\boldsymbol{B})$都可交换.

证明 (1) 当 $|\lambda|\neq 1$ 时, (4.24)右边一致谱积分存在. 利用 §3 定理 2 的(6), 立即知道(4.24)右边的积分所定义的有界线性算子是 $U-\lambda I$ 的逆算子. 从而(1)成立.

(2) 必要性 (反证法)如果 $e^{i\theta_0}\in\rho(U)$, 而不存 δ, 使得

$$E_{\theta_0+\delta}=E_{\theta_0-\delta},$$

从而对任何自然数 n, $E_{\theta_0+\frac{1}{n}}-E_{\theta_0-\frac{1}{n}}\neq 0$. 任取

$$x_n\in(E_{\theta_0+\frac{1}{n}}-E_{\theta_0-\frac{1}{n}})H,$$

并且 $\|x_n\|=1$, $n=1, 2, \cdots$. 因而

$$\begin{aligned}\|(U-e^{i\theta_0}I)x_n\|^2&=\int_0^{2\pi}|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|^2 d(E_\theta x_n, x_n)\\&\leqslant\max_{\theta_0-\frac{1}{n}<\theta\leqslant\theta_0+\frac{1}{n}}|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|^2.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时, 就得到 $(U-e^{i\theta_0}I)x_n\to 0$. 显然, 这与假设 $e^{i\theta_0}$ 是正则点相矛盾.

充分性 如果存在 δ, 使得 $E_{\theta_0+\delta}=E_{\theta_0-\delta}$, 因而对任何 x 或 x、y, 测度 $\mu_x(\cdot)=(E(\cdot)x, x)$, $\mu_{x,y}(\cdot)=(E(\cdot)x, y)$ 在 $(\theta_0-\delta, \theta_0+\delta]$ 上的值都是零. 注意到这一点后, 立即知道(4.25)式右边的谱积分存在, 并且

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}dE_\theta=\int_0^{2\pi}f(\theta)dE_\theta, \tag{4.26}$$

其中 $f(\theta)=\dfrac{1}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}$ (当 $\theta\in[0, 2\pi]-(\theta_0-\delta, \theta_0+\delta]$), $f(\theta)=1$ (当 $\theta\in(\theta_0-\delta, \theta_0+\delta]$). 因而

$$\begin{aligned}(U-e^{i\theta_0}I)\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}dE_\theta&=(U-e^{i\theta_0}I)\int_0^{2\pi}f(\theta)\,dE_\theta\\&=\int_0^{2\pi}(e^{i\theta}-e^{i\theta_0})f(\theta)dE_\theta\\&=\int_{[0,2\pi]-(\theta_0-\delta,\theta_0+\delta]}1\,dE_\theta=\int_0^{2\pi}dE_\theta=I.\end{aligned}$$

同样可证 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}dE_\theta(U-e^{i\theta_0}I)=I$. 因此 $e^{i\theta_0}\in\rho(U)$.

类似可证数 1 成为正则点的充要条件的结论. 当 $e^{i\theta_0}$ 是正则点时, 显然(4.25)成立.

(3) 对任何 $x\in H$, 因为

$$\|(U-e^{i\theta_0}I)x\|^2=\int_0^{2\pi}|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|^2d(E_\theta x,\ x),\tag{4.27}$$

并且 $|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|>0$ (当 $\theta\neq\theta_0$ 时). 所以, 当 $x\neq0$ 时, 由(4.27)可知 $\|(U-e^{i\theta_0}I)x\|=0$(即 $e^{i\theta_0}$ 是 U 的特征值, x 是相应的特征向量)的充要条件是测度 $\mu_x(\cdot)=(E(\cdot)x,\ x)$的全空间$[0,\ 2\pi]$的测度($\mu_x([0,\ 2\pi])=((E_{2\pi}-E_0)x,\ x)=\|x\|^2$)全部集中在一点 θ_0. 显然, 这又等价于 $0\neq E(\{\theta_0\})=E_{\theta_0}-E_{\theta_0-0}$, 并且

$$x\in(E_{\theta_0}-E_{\theta_0-0})H.$$

因此, $e^{i\theta_0}(0<\theta_0\leqslant2\pi)$是 U 的特征值的充要条件是

$$E_{\theta_0}-E_{\theta_0-0}\neq0,$$

并且相应于 $e^{i\theta_0}$ 的特征子空间是$(E_{\theta_0}-E_{\theta_0-0})H$.

(4) 当有界线性算子 A 与 U 可交换时, 显然

$$AU^n=U^nA\quad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

从而对任何 $p\in T_{2\pi}$, $p(U)A=Ap(U)$. 所以, 对一切 x、$y\in H$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}p(e^{i\theta})d(E_\theta Ax,\ y)&=(p(U)Ax,\ y)=(Ap(U)x,\ y)\\&=(p(U)x,\ A^*y)=\int_0^{2\pi}p(e^{i\theta})d(E_\theta x,\ A^*y)\\&=\int_0^{2\pi}p(e^{i\theta})d(AE_\theta x,\ y).\end{aligned}\tag{4.28}$$

再利用泛函表示的唯一性, 得到

$$(E_\theta Ax,\ y)=(AE_\theta x,\ y),\quad x,\ y\in H,\ \theta\in[0,\ 2\pi],\tag{4.29}$$

即 $AE_\theta=E_\theta A$ 对一切 $\theta\in[0,\ 2\pi]$成立. 由(4.29)可知, $(E_\theta Ax,\ y)$产生的数值测度 $\mu_{Ax,y}(\cdot)=(E(\cdot)Ax,y)$应与右边$(E_\theta x,\ A^*y)$产生的数值测度 $\mu_{x,A^*y}(\cdot)=(E(\cdot)x,\ A^*y)$相等. 从而对任何 $\delta\in\boldsymbol{E}$,

$$(E(\delta)Ax,\ y)=\mu_{Ax,y}(\delta)=\mu_{x,A^*y}(\delta)=(E(\delta)x,\ A^*y)$$
$$=(AE(\delta)x,\ y).$$

固定 $\delta\in\boldsymbol{B}$，上式对一切 x、$y\in H$ 成立，所以

$$AE(\delta)=E(\delta)A,\quad \delta\in\boldsymbol{B}.$$

证毕.

利用谱测度的支集和定理 1 立即可以得到下列定理.

定理 2 设 U 是复 Hilbert 空间 H 上酉算子，那末必存在 $(\sigma(U),\ \boldsymbol{B})$($\boldsymbol{B}$ 是 $\sigma(U)$ 中 Borel 集全体)唯一的谱测度 F，使得

$$U=\int_{\sigma(U)}\lambda dF(\lambda),\tag{4.30}$$

而且 F 具有如下性质：任何能与 U 交换的有界线性算子必与 $F(\delta)$ $(\delta\in\boldsymbol{B})$ 可交换.

证明 设 $E_\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 是由 U 决定的谱系，因为 $E_0=0$，$E_{2\pi}=I$，所以谱测度 $E((0,\ 2\pi])=I$. 视 E 是 $(0,\ 2\pi]$ 上谱测度，令 C_1 是ℂ上单位圆周. 作 $(0,\ 2\pi]\to C_1$ 的双射 τ: $\theta\mapsto e^{i\theta}$，显然，对任何 $(0,\ 2\pi]$ 上 Borel 集 δ，$\tau\delta$ 是 C_1 上 Borel 集，并且 τ 是 $(0,\ 2\pi]$ 上 Borel 集类到 C_1 上 Borel 集类的双射. 利用映射 τ 和谱测度 E，对任何 $(0,\ 2\pi]$ 上 Borel 集 δ，作 $F(\tau\delta)=E(\delta)$，易知 $F(\cdot)$ 是 C_1 上 Borel 集类 $\boldsymbol{B}$ 上谱测度，并且对任何 $f\in B(C_1,\ \boldsymbol{B})$，

$$\int_{C_1}f(\lambda)dF(\lambda)=\int_{(0,2\pi]}f(e^{i\theta})dE(\theta).\tag{4.31}$$

再利用定理 1 的系中的(2)以及谱测度支集概念，易知(4.31)还可以写成(4.30)的形式.

根据定理 1 的系中的(4)，任何与 U 可交换的有界线性算子 A 必与 $E(\tau^{-1}\delta)$ $(\delta\in\boldsymbol{B})$ 可交换，从而也必与 $F(\delta)$ 可交换. 证毕.

也称满足(4.30)的 $(\sigma(U),\ \boldsymbol{B},\ F)$ 为由 U 决定的谱测度空间.

2. 自共轭算子谱分解

这小节中将利用酉算子谱分解以及 Cayley 变换来建立自共轭算子的谱分解.

定理3　设 A 是复 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子，$\mathscr{D}(A)$ 是它的定义域. 那末必存在谱系 $E_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$，使得

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda. \tag{4.32}$$

证明　先作 A 的 Cayley 变换(见第六章 § 5 的第 9 小节)，

$$U=(A+iI)(A-iI)^{-1},$$

而

$$A=i(U+I)(U-I)^{-1},$$

并且 $1\overline{\in}\sigma_p(U)$.

根据酉算子谱分解定理，存在谱系 $E_\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，使得

$$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta.$$

由于 $1\overline{\in}\sigma_p(U)$，因而

$$\lim_{\theta\to 2\pi-0}E_\theta=E_{2\pi}=I, \tag{4.33}$$

因此 $E((0,\ 2\pi))=E([0,\ 2\pi])=I$ ($E(\cdot)$ 是由 E_θ 产生的谱测度).

作 $(0,\ 2\pi)\to(-\infty,\ \infty)$ 的拓扑映射：

$$\theta\mapsto\lambda=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=i\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1},$$

利用这个映射，作谱系 $F_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$ 如下：

$$F_\lambda=I-E_\theta\quad(\theta=2\operatorname{ctg}^{-1}\lambda). \tag{4.34}$$

由于 $E_{0+0}=0$, $E_{2\pi-0}=I$, 易知

$$\begin{aligned}U&=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta=(\text{强})\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon}e^{i\theta}dE_\theta\\&=(\text{强})\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}(-e^{i\theta(\lambda)})dF_\lambda\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta(\lambda)}dF_\lambda,\quad(\theta(\lambda)=2\operatorname{ctg}^{-1}\lambda).\end{aligned} \tag{4.35}$$

作算子 $B=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dF_\lambda$, 根据 § 3 定理 3 的(3), B 是自共轭算子，并且

$$\mathscr{D}(B)=\{x\,|\,x\in H,\ \int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d(E_\lambda x,\ x)<\infty\}.$$

今证明 $A=B$. 事实上，由于 $\left|\frac{1}{e^{i\theta(\lambda)}-1}\right|=O(\lambda)$[注]，因此，当 $x\in\mathscr{D}(B)$ 时，下列极限存在：

$$y=(\text{强})\lim_{n\to\infty}2i\int_{\left|\frac{1}{e^{i\theta}-1}\right|<n}\frac{1}{e^{i\theta}-1}dF_\lambda x. \tag{4.36}$$

因此，

$$(U-I)y=(\text{强})2i\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\theta}-1)dF_\lambda\int_{\left|\frac{1}{e^{i\theta}-1}\right|<n}\frac{1}{e^{i\theta}-1}dF_\lambda x$$

$$=(\text{强})\lim_{n\to\infty}2i\int_{\left|\frac{1}{e^{i\theta}-1}\right|<n}dF_\lambda x=2ix. \tag{4.37}$$

同样，由 $\lambda=i\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$ 得到

$$(U+I)y=(\text{强})\lim_{n\to\infty}2\int_{\left|\frac{1}{e^{i\theta}-1}\right|<n}\lambda\,dF_\lambda x=2Bx. \tag{4.38}$$

(4.37)说明 $x\in\mathscr{R}(U-I)=\mathscr{D}(A)$，从而 $\mathscr{D}(B)\subset\mathscr{D}(A)$. (4.38)说明对任何 $x\in\mathscr{D}(B)$，

$$Bx=\frac{1}{2}(U+I)y=i(U+I)(U-I)x=Ax.$$

从而 $B\subset A$. 但 B 是自共轭算子，根据§3 定理 13 的(6)，$A=B$. 证毕.

分别称定理 3 中的谱系 $F_\lambda(\lambda\in(-\infty,\infty))$ 以及相应的谱测度 $F(\cdot)$是由 A 决定的谱系、谱测度.

类似定理 1，有如下的系和定理.

系 设 A 是复 Hilbert 空间上自共轭算子，$\mathscr{D}(A)$ 是它的定义域，$F_\lambda(\lambda\in(-\infty,\infty)$是由 A 决定的谱系. 下列命题成立：

(1) 如果 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda\neq0$，那末是 A 的正则点，即 A 的谱只能落在实轴上.

(2) 实数 λ_0 是 A 的正则点的充要条件是存在 $\delta>0$，使得

[注] 这里"$O(\lambda)$"是增长阶的符号，即存在常数 $k>0$，使得

$$|\lambda|\geqslant k$$

时，$\left\{\left|\frac{1}{e^{i\theta(\lambda)}-1}\cdot\frac{1}{\lambda}\right|\right\}$是有界数集.

$$F_{\lambda_0-\delta}=F_{\lambda_0+\delta},$$

并且 λ_0 是正则点时,

$$(A-\lambda_0 I)^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\,dF_\lambda.$$

(3) 实数 λ_0 是 A 的特征值的充要条件是 $F_{\lambda_0}-F_{\lambda_0-0}\neq 0$, 并且当 λ_0 是特征值时, 相应的特征子空间是 $(F_{\lambda_0}-F_{\lambda_0-0})H$.

(4) 设 $F(\cdot)$ 是 $F_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$ 所产生的直线上 Borel 集类上的谱测度, 那末 $F(\cdot)$ 的支集 $\operatorname{supp} F(\cdot)=\sigma(A)$.

(5) 如果 A 是有界自共轭的, 那末

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\sup_{\|x\|=1}(Ax,\ x), \tag{4.39}$$

$$\inf_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\inf_{\|x\|=1}(Ax,\ x). \tag{4.40}$$

(6) 如果 A 是有界自共轭的, 那末任何与 A 可交换的有界线性算子 B 必与 $F_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$、$F(M)$($M$ 是直线上 Borel 集)可交换.

定理 4 设 A 是复 Hilbert 空间自共轭算子, $\mathscr{D}(A)$ 是它的定义域, $F_\lambda(\lambda\in(-\infty,\ \infty))$ 是由 A 决定的谱系. 那末

$$A=\int_{\sigma(A)}\lambda\,dF_\lambda. \tag{4.41}$$

定理 4 以及定理 3 的系中的(5)以外的其它性质都可仿定理 1 的系和定理 2 的证明来证, 有的也可用 Cayley 变换化成酉算子, 利用酉算子已有的结论来证. 这些给读者作为练习. 今后称 $(\sigma(A),\ \boldsymbol{B},\ F)$ 是 A 决定的谱测度空间.

今证系的(5)中的(4.39): 事实上, 记

$$M=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda,$$

注意到系中的(4), 对任何 $x\in H$, $\|x\|=1$, 有

$$\begin{aligned}(Ax,\ x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(F_\lambda x,\ x)=\int_{-\infty}^{M}\lambda d(F_\lambda x,\ x)\\&\leqslant M(x,\ x)=M.\end{aligned} \tag{4.42}$$

另一方面, 对任何 $\varepsilon>0$, $F((M-\varepsilon,\ M])\neq 0$ (否则谱测度的支集 $\operatorname{supp} F\subset\sigma(A)\cap(-\infty,\ M-\varepsilon]$, 这与系的(4)相矛盾). 因此, 当

任取 $y\in F((M-\varepsilon, M])H$, $\|y\|=1$,

$$(Ay, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(F_\lambda y, y)=\int_{M-\varepsilon}^{\infty}\lambda d(F_\lambda y, y)$$

$$\geqslant (M-\varepsilon)(y, y)=M-\varepsilon. \tag{4.43}$$

结合(4.42)、(4.43)就得到(4.39).

同样地可以证明(4.40).

3. 正常算子谱分解

设 N 是复 Hilbert 空间 H 上正常算子, 即 H 上满足 $N^*N=NN^*$ 的有界线性算子. 由第六章§5的定理4, 下面两个自共轭算子

$$\mathrm{Re}N=\frac{N+N^*}{2},\quad \mathrm{Im}\,N=\frac{N-N^*}{2i}$$

是可交换的.

令 $E_x^{(1)}(x\in(-\infty, \infty))$、$E_y^{(2)}(y\in(-\infty, \infty))$分别是 $\mathrm{Re}\,N$、$\mathrm{Im}\,N$ 的谱系. 根据定理3的系中的(6), 因 $\mathrm{Re}\,N$ 与 $\mathrm{Im}\,N$ 可交换, 从而算子 $\mathrm{Re}\,N$ 必也与一切 $E_y^{(2)}(\delta)$ 可交换, 其中 δ 是直线上 Borel 集. 再次应用系中的(6), $E_y^{(2)}(\delta)$ 与一切 $E_x^{(1)}(\delta')$ 可交换, 其中 δ' 也是直线上 Borel 集. 特别任何 x, $y\in(-\infty, \infty)$, $E_x^{(1)}$ 与 $E_y^{(2)}$ 可交换.

例 1 设 σ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上有界闭集, $\boldsymbol{B}_\sigma$ 是 σ 上 Borel 集类, μ 是$(\sigma, \boldsymbol{B}_\sigma)$上勒贝格–斯蒂阶测度. $L^2(\sigma, \boldsymbol{B}_\sigma, \mu)$上乘法算子

$$N:\ f(z)\mapsto zf(z),\ f\in L^2(\sigma, \boldsymbol{B}_\sigma, \mu)$$

显然是有界线性算子, 并且容易直接验证下列事实:

$$N^*:\ f(z)\mapsto \bar{z}f(z),\ f\in L^2(\sigma, \boldsymbol{B}_\sigma, \mu); \tag{4.44}$$

$$NN^*(=N^*N):\ f(z)\mapsto |z|^2f(z),\ f\in L^2(\sigma, \boldsymbol{B}_\sigma, \mu); \tag{4.45}$$

$$\frac{N+N^*}{2}:\ f(z)\mapsto xf(z),\ z=x+iy,\ f\in L^2(\sigma, \boldsymbol{B}_\sigma, \mu); \tag{4.46}$$

$$\frac{N-N^*}{2i}:\ f(z)\mapsto yf(z),\ z=x+iy,\ f\in L^2(\sigma, \boldsymbol{B}_\sigma, \mu). \tag{4.47}$$

令 $\boldsymbol{B}_X$、$\boldsymbol{B}_Y$ 分别表示直线 X、Y 上的 Borel 集类. 对每个 $M_1\in\boldsymbol{B}_X$ 或 $M_2\in\boldsymbol{B}_Y$, 分别作 $L^2(\sigma, \boldsymbol{B}_\sigma, \mu)$ 上的投影算子:

$$E_1(M_1): f(z)\mapsto\chi_{M_1}(x)f(z),\ z=x+iy,\ f(z)\in L^2(\sigma,\boldsymbol{B}_\sigma,\mu); \tag{4.48}$$

$$E_2(M_2): f(z)\mapsto\chi_{M_2}(y)f(z),\ z=x+iy,\ f(z)\in L^2(\sigma,\ \boldsymbol{B}_\sigma,\mu), \tag{4.49}$$

容易看出$(X,\ \boldsymbol{B}_X,\ E_1)$、$(Y,\ \boldsymbol{B}_Y,\ E_2)$ 分别是 $\dfrac{N+N^*}{2}$、$\dfrac{N-N^*}{2i}$ 决定的谱测度空间. 而且一切 $E_1(M_1)(M_1\in\boldsymbol{B}_X)$ 与 $E_2(M_2)$ $(M_2\in\boldsymbol{B}_Y)$可交换.

在例 1 中, 我们还可作乘积可测空间 $(X\times Y,\ \boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y)$(即 $(\mathbb{C},\ \boldsymbol{B})$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是复平面上 Borel 集类)的谱测度如下: 当 $M\in\boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y=\boldsymbol{B}$ 时,

$$E(M):\ f(z)\mapsto\chi_M(z)f(z),\ f\in L^2(\sigma,\ \boldsymbol{B}_\sigma,\ \mu).$$

如果测度 μ 不能集中在比 σ 更小的闭集时(即 $\operatorname{supp}\mu=\sigma$), 那末容易从谱积分定义可直接验证 $\operatorname{supp}E=\sigma$, 并且

$$N=\int_\sigma z dE(z). \tag{4.50}$$

此外, 显然 E_1、E_2 和 E 之间有如下关系:

$$E(M_1\times M_2)=E_1(M_1)E_2(M_2),\quad M_1\in\boldsymbol{B}_X,\ M_2\in\boldsymbol{B}_Y. \tag{4.51}$$

这说明 $E(\cdot)$是 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$的"乘积谱测度".

定义　设 $X=Y=(-\infty,\ \infty)$, $\boldsymbol{B}_X$、$\boldsymbol{B}_Y$ 分别是 X、Y 中的 Borel 集全体, $(X,\ \boldsymbol{B}_X,\ E_1)$、$(Y,\ \boldsymbol{B}_Y,\ E_2)$ 是复 Hilbert 空间 H 上两个谱测度空间, 又设 $E(\cdot)$是$(X\times Y,\ \boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y)$[注] 上的谱测度, 如果对任何$(x,\ x+\Delta x]\times(y,\ y+\Delta y]$ $(x,\ y\in(-\infty,\ \infty))$, 满足

$$\begin{aligned}&E((x,\ x+\Delta x]\times(y,\ y+\Delta y])\\&=E_1((x,\ x+\Delta x])E_2((y,\ y+\Delta y]),\end{aligned} \tag{4.52}$$

[注]　$X\times Y$ 实际上可视为复平面 $\mathbb{C}$, $B_X\times B_Y$ 正是 $\mathbb{C}$ 上 Borel 集全体.

那末称 $E(\cdot)$ 是 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$ 的乘积谱测度，$(X\times Y,\ \boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y,\ E)$ 是 $(X,\ \boldsymbol{B}_X,\ E_1)$、$(Y,\ \boldsymbol{B}_Y,\ E_2)$ 的乘积谱测度空间.

引理 2　设 $E_x(x\in(-\infty,\ \infty))$、$E_y(y\in(-\infty,\ \infty))$ 是两个谱系，相应的谱测度为 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$. 那末谱系 E_x、E_y 可交换(即对任何 x、$y\in(-\infty,\ \infty)$，$E_xE_y=E_yE_x$)的充要条件是谱测度 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$ 可交换(即对任何 $M_1\in\boldsymbol{B}_X$、$M_2\in\boldsymbol{B}_Y$，

$$E_1(M_1)E_2(M_2)=E_2(M_2)E_1(M_1)).$$

证明　充分性是显然的. 事实上，取

$$M_1=(-\infty,\ x],\ M_2=(-\infty,\ y]$$

从 $E_1(M_1)E_2(M_2)=E_2(M_2)E_1(M_1)$ 立即可得 $E_xE_y=E_yE_x$.

必要性　作 $(0,\ 2\pi)$ 到 $(-\infty,\ \infty)$ 的拓扑映射

$$\tau:\ \theta\mapsto x=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2},$$

利用 τ 作谱系与相应的谱测度：

$$F_\theta=E_x,\quad x=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2},\ \theta\in(0,\ 2\pi),$$

$$F(\delta)=E_x(\tau\delta),\ \delta\text{ 是}(0,\ 2\pi)\text{ 中的 Borel 集},$$

再补充定义 $F_0=0$，$F_{2\pi}=I$. 由于任何 E_y 与 $E_x(x\in(-\infty,\ \infty))$ 可交换，从而与 $F_\theta(\theta\in[0,\ 2\pi])$ 可交换. 注意到

$$\lim_{\theta\to 0+}F_\theta=0,\quad \lim_{\theta\to 2\pi-}F_\theta=2\pi,$$

因此，任何 $E_y(y\in(-\infty,\ \infty))$ 和自共轭算子

$$A=\int_0^{2\pi}\theta\,dF_\theta$$

可交换. 由定理 3 的系中的(6)，$E_y(y\in(-\infty,\ \infty))$ 与任何 $F(\delta)$ (δ 是 $[0,\ 2\pi]$ 中 Borel 集)可交换，从而 $E_y(y\in(-\infty,\ \infty))$ 与任何 $E_x(\tau\delta)$ 可交换，即 $E_y(y\in(-\infty,\ \infty))$ 与一切 $E_1(M_1)$ $(M_1\in\boldsymbol{B}_X)$ 可交换.

再用 $E_1(M_1)$ $(M_1\in\boldsymbol{B}_X)$ 代替上面的 E_y，而用 $E_y(y\in(-\infty,\ \infty))$ 代替上面 $E_x(x\in(-\infty,\infty))$，重复上述讨论，就得到 $E_1(M_1)$ 与任何 $E_2(M_2)$ $(M_2\in\boldsymbol{B}_Y)$ 可交换. 证毕.

定理 5　设 $X=Y=(-\infty,\infty)$，$(X,\boldsymbol{B}_X,E_1)$、$(Y,\boldsymbol{B}_Y,E_2)$ 是复 Hilbert 空间 H 上两个谱测度空间. 那末 $(X\times Y,\boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y)$ 上存在 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$ 的乘积谱测度 $E(\cdot)$ 的充要条件是谱测度 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$ 可交换. 而当 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$ 可交换时，乘积谱测度是唯一的.

证明　必要性　在 (4.52) 中取 $(x,x+\Delta x]\times(y,y+\Delta y]$ 为 $(-\infty,x]\times(-\infty,y]$，因为 $E((-\infty,x]\times(-\infty,y])$、$E_1((-\infty,x])$、$E_2((-\infty,y])$ 都是投影算子，所以根据第六章 §5 定理 9，谱系 $E_x=E_1((-\infty,x])(x\in(-\infty,\infty))$ 与谱系

$$E_y=E_2((-\infty,y])(y\in(-\infty,\infty))$$

可交换. 由引理 2，立即得到 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$ 可交换.

充分性　由交换的谱系 $E_x=E_1((-\infty,x])$，$E_y=E_2((-\infty,y])(x,y\in(-\infty,\infty))$ 作函数(记 $E_{x,y}=E_xE_y$)

$$\psi_h(x,y)=(E_{x,y}h,h),\ h\in H, \tag{4.53}$$

$$\psi_{h,k}(x,y)=(E_{x,y}h,k),\ h,k\in H. \tag{4.54}$$

利用 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$ 可交换性，对任何

$$\Delta=(x,x+\Delta x]\times(y,y+\Delta y],$$

从 (4.53) 得到

$$\begin{aligned}\psi_h(\Delta)=&\psi_h(x+\Delta x,y+\Delta y)-\psi_h(x+\Delta x,y)\\&-\psi_h(x,y+\Delta y)+\psi_h(x,y)\\=&((E_{x+\Delta x}-E_x)(E_{y+\Delta y}-E_y)h,h)\geqslant 0^{[注]}.\end{aligned} \tag{4.55}$$

而固定 h，$\psi_h(x,y)$ 作为 x、y 的函数时，显然，固定一个变元是另一个变元的右连续函数. 因而由一般的勒贝格-斯蒂阶测度和积分的理论，可知 $\psi_h(x,y)$ 产生平面 $\mathbb{C}$ 上一个勒贝格-斯蒂阶测度 $\mu_h(\cdot)$.

同样，$\psi_{h,k}(x,y)$ 产生平面 $\mathbb{C}$ 上复值勒贝格-斯蒂阶测度 $\mu_{h,k}(\cdot)$.

下面用 §3 引理 2 的证明方法(用这里的 $\mu_h(\cdot)$、$\mu_{hk}(\cdot)$ 分别

[注]　因为 $(E_{x+\Delta x}-E_x)(E_{y+\Delta y}-E_y)$ 是投影算子，

$$((E_{x+\Delta x}-E_x)(E_{y+\Delta y}-E_y)h,h)=\|(E_{x+\Delta x}-E_x)(E_{y+\Delta y}-E_y)h\|^2\geqslant 0.$$

代替引理 2 中的 $\mu_x(\cdot)$、$\mu_{x,y}(\cdot)$). 由 $\psi_{h,k}(x, y)$ 必可找到 $(X\times Y, \boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y)$上的唯一谱测度 $E(\cdot)$, 满足(4.52). 证毕.

系 设 $X=Y=(-\infty, \infty)$, $(X, \boldsymbol{B}_X, E_1)$、$(Y, \boldsymbol{B}_Y, E_2)$是复 Hilbert 空间 H 上两个谱测度空间, 并且$E_1(\cdot)$与 $E_2(\cdot)$ 可交换. 又设 $E(\cdot)$是 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$的乘积谱测度. 下列命题成立:

(1) 如果 H 上有界线性算子 A 与 $E_1(\cdot)$、$E_2(\cdot)$可交换 (即对任何 $M_1\in\boldsymbol{B}_X$, $M_2\in\boldsymbol{B}_Y$, $AE_1(M_1)=E_1(M_1)A$, $AE_2(M_2)=E_2(M_2)A$), 那末 A 必与 $E(\cdot)$可交换(即对任何 $M\in\boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y$, $AE(M)=E(M)A$).

(2) 对任何 $M_1\in\boldsymbol{B}_X$, $M_2\in\boldsymbol{B}_Y$,

$$E(M_1\times M_2)=E_1(M_1)E_2(M_2).$$

(3) 对任何 $f_1\in B(X, \boldsymbol{B}_X)$, $f_2\in B(Y, \boldsymbol{B}_Y)$,

$$\int_{X\times Y} f_1(x)f_2(y)dE_{x,y}=\int_X f_1(x)\, dE_x\int_Y f_2(y)dE_y. \tag{4.56}$$

证明 (1) 对任何 $h, k\in H$, 因为

$$\begin{aligned}\psi_{Ah,k}(x, y)&=(E_xE_yAh, k)=(E_xE_yh, A^*k)\\&=\psi_{h,A^*k}(x, y),\end{aligned}\tag{4.57}$$

所以 $\psi_{Ah,k}$、ψ_{h,A^*k} 分别产生的平面上复勒贝格-斯蒂阶测度 $\mu_{Ah,k}(\cdot)$、$\mu_{h,A^*k}(\cdot)$一致. 从而对任何 $M\in\boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y$,

$$\begin{aligned}(E(M)Ah, k)&=\mu_{Ah,k}(M)=\mu_{h,A^*k}(M)=(E(M)h, A^*k)\\&=(AE(M)h, k),\quad h, k\in H,\end{aligned}$$

所以 $E(M)A=AE(M)$ $(M\in\boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y)$.

(2) 令 $\psi_{h,k}(x, y)=(E_xE_yh, k)$, 根据定理 5, 对任何

$$M\in\boldsymbol{B}_X\times\boldsymbol{B}_Y,$$

$\psi_{h,k}(x, y)$产生的平面上测度 $\mu_{h,k}(M)=(E(M)x, y)$. 特别取 $M=(-\infty, x]\times(-\infty, y]$,

$$\begin{aligned}&(E((-\infty, x]\times(-\infty, y])h, k)\\&=\mu_{hk}((-\infty, x]\times(-\infty, y])=(E_xE_yh, k).\end{aligned}\tag{4.58}$$

固定 y, 让 x 变化, 显然, 从(4.58)可知, 由(E_xE_yh, k)产生的

$(X, \boldsymbol{B}_X)$上测度$(E_1(\cdot)E_y h, k)$与$(X, \boldsymbol{B}_X)$上测度$\mu_{hk}((\cdot)\times M_2)$ $(M_2=(-\infty, y])$一致. 从而对任何$M_1\in\boldsymbol{B}_X$,

$$\begin{aligned}&(E_1(M_1)E_y h, k)=\mu_{hk}(M_1\times M_2)\\&=(E(M_1\times M_2)h, k), \quad M_2=(-\infty, y], h, k\in H,\end{aligned}\tag{4.59}$$

因此

$$E_1(M_1)E_2(M_2)=E(M_1\times M_2)\ (M_1\in\boldsymbol{B}_X,\ M_2=(-\infty, y]).$$

再次固定$M_1\in\boldsymbol{B}_X$, $h, k\in H$, 让下式中y变化:

$$(E_1(M_1)E_y h, k)=(E(M_1\times(-\infty, y])h, k).\tag{4.60}$$

重复上述讨论方式, 立即可以得到, 对任何$M_2\in\boldsymbol{B}_Y$,

$$(E_1(M_1)E_2(M_2)h, k)=(E(M_1\times M_2)h, k),\ h, k\in H,$$

这样, 最终得到

$$E_1(M_1)E_2(M_2)=E(M_1\times M_2)\quad(M_1\in\boldsymbol{B}_X,\ M_2\in\boldsymbol{B}_Y).$$

(3) 利用(2)就很容易得到(3). 事实上, 设

$$|f_1(x)|<k,\ |f_2(y)|<k.$$

对任何$\varepsilon>0$, 作$[-k, k]$上分点组

$$D:\quad -k=y_0<y_1<\cdots<y_n=k,$$

使得$\max\limits_i|y_i-y_{i-1}|<\varepsilon$, 令

$$\left.\begin{aligned}M_j^{(1)}=X(y_{j-1}\leqslant f_1(x)<y_j),\\M_j^{(2)}=Y(y_{j-1}\leqslant f_2(y)<y_j).\end{aligned}\right\}\quad j=1, 2, \cdots, n$$

由§3谱积分的定理2的证明中第(iii)步可知

$$\left.\begin{aligned}\left\|\int_X f_1(x)dE_x-\sum_{j=1}^n y_jE_1(M_j^{(1)})\right\|\leqslant\varepsilon,\\\left\|\int_Y f_2(y)dE_y-\sum_{j=1}^n y_jE_2(M_j^{(2)})\right\|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{4.61}$$

再利用$|f_1(x)|<k$, $|f_2(y)|<k$可以得到估计式

$$\begin{aligned}&\left\|\int_X f_1(x)dE_x\int_Y f_2(y)dE_y-\sum_{j=1}^n y_jE_1(M_j^{(1)})\sum_{i=1}^n y_iE_2(M_i^{(2)})\right\|\\&\leqslant 2k\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.62}$$

但是

$$\sum_{j=1}^{n} y_j E_1(M_j^{(1)}) \sum_{l=1}^{n} y_l E_2(M_l^{(2)}) = \sum_{j,l=1}^{n} y_j y_l E(M_j^{(1)} \times M_l^{(2)}), \tag{4.63}$$

另一方面，当$(x, y) \in M_j^{(1)} \times M_l^{(2)}$时，

$$|f_1(x) f_2(y) - y_j y_l| < 2k\varepsilon,$$

因此

$$\left\| \int_{X\times Y} f_1(x) f_2(y) dE_{x,y} - \sum_{j,l=1}^{n} y_j y_l E(M_j^{(1)} \times M_l^{(2)}) \right\|$$
$$= \left\| \sum_{j,l=1}^{n} \int_{M_j^{(1)} \times M_l^{(2)}} (f_1(x) f_2(y) - y_j y_l) dE_{x,y} \right\| < 2k\varepsilon. \tag{4.64}$$

把(4.62)～(4.64)结合起来，并令$\varepsilon \to 0$，就得到(4.56)．证毕．

定理6　设N是复 Hilbert 空间H上正常算子，那末必有$(\sigma(N), \boldsymbol{B})$($\boldsymbol{B}$是$\sigma(N)$中 Borel 集全体)上的唯一谱测度$E(\cdot)$，使得

$$N = \int_{\sigma(N)} z dE_z,$$

并且H上任何与N可交换的有界线性算子A必与$E(\cdot)$可交换(即对任何$M \in \boldsymbol{B}$，$AE(M) = E(M)A$)．

证明　令$X = Y = (-\infty, \infty)$，$E_x(x \in (-\infty, \infty))$、$E_y(y \in (-\infty, \infty))$为相应于$\dfrac{N+N^*}{2}$、$\dfrac{N-N^*}{2i}$的谱系，$(X, \boldsymbol{B}_X, E_1)$、$(Y, \boldsymbol{B}_Y, E_2)$为相应的谱测度空间．这样

$$\frac{N+N^*}{2} = \int_X x\, dE_x, \quad \frac{N-N^*}{2i} = \int_Y y\, dE_y. \tag{4.65}$$

再作乘积谱测度空间$(X \times Y, \boldsymbol{B}_X \times \boldsymbol{B}_Y, E)$($E(M_1 \times M_2) = E_1(M_1) E_2(M_2) M_1 \in \boldsymbol{B}_X, M_2 \in \boldsymbol{B}_Y$)．在定理5的系中的(3)中，分别取$f_1(x) = x$，$f_2(y) = 1$和$f_1(x) = 1$，$f_2(y) = y$，从(4.56)就得到

$$\int_{X\times Y} x\, dE_{x,y} = \int_X x\, dE_x \int_Y 1\, dE_y = \int_X x\, dE_x = \frac{N+N^*}{2}, \tag{4.66}$$

$$\int_{X\times Y} y\,dE_{x,y}=\int_X 1\,dE_x\int_Y y\,dE_y=\int_X y\,dE_y=\frac{N-N^*}{2i}. \tag{4.67}$$

由(4.66)、(4.67)立即得到

$$N=\int_X x\,dE_x+i\int_Y y\,dE_y=\int_{X\times Y}(x+iy)dE_{x,y}$$
$$=\int_{X\times Y} z dE_z,\ z=y+iy.$$

当 A 与 N 可交换时，必可证明 A 与 N^* 可交换. 从而 A 与 $E_x(x\in(-\infty,\infty))$、$E_y(y\in(-\infty,\infty))$可交换，由引理 2 以及定理 5 的系中的(1)，立即可知 A 与 $E(\cdot)$可交换.

剩下的可完全仿相应于酉算子 U 的谱测度必集中在 $\sigma(U)$的证明. 可先证明 $\lambda\in\rho(N)$的充要条件是存在 λ 的环境 $O(\lambda)$，

$$E(O(\lambda))=0,$$

然后证明当 $\mu\in\sigma(N)$时，必有 H 中点列 $\{h_n\}$，$\|h_n\|=1$，$n=1, 2, \cdots$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|(N-\mu I)x_n\|=0,$$

这样就得到 $\operatorname{supp} E=\sigma(N)$，从而

$$N=\int_{\sigma(N)} zdE_z,\quad z=x+iy,\ E_z=E_{x,y}.$$

谱测度的唯一性可仿酉算子的谱测度的唯一性的证明得到，这里从略. 证毕.

4. 交换算子族的谱分解

正常算子的谱分解，实质上是两个可交换的自共轭算子的“联合”谱分解问题. 很自然，一族可交换的自共轭算子是否也能有“联合”谱分解呢？这个问题回答是肯定的. 结果如下.

定理 7(И. М. Гельфанд)　设 $\boldsymbol{R}$ 是复 Hilbert 空间 H 上一族可交换自共轭算子张成的 Banach 算子代数(用算子范数作为范数). 那末必存在唯一紧的 Hausdorff 空间 $\mathfrak{M}$，以及$(\mathfrak{M},\ \boldsymbol{B})$($\boldsymbol{B}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上 Borel 集全体)上谱测度 $E(\cdot)$，使得任何 $A\in\boldsymbol{R}$，

$$A=\int_{\mathfrak{M}} a(m)dE(m), \tag{4.68}$$

其中 $a(m)$ 是 $\mathfrak{M}$ 上连续函数，而且映射 $A\mapsto a(m)$ 不仅是代数同构，而且是保范的，即 $\|A\|=\max\limits_{m}|a(m)|$.

这个定理在本教材中是不能证明的，可见[16].

5. 单参数酉算子群的谱分解

设 $E_x(x\in(-\infty,\infty))$ 是复 Hilbert 空间 H 上谱系，显然，对每个 $t\in(-\infty,\infty)$，算子

$$U_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dE_x \tag{4.69}$$

是 H 上酉算子，并且满足

$$U_{t_1+t_2}=U_{t_1}U_{t_2},\quad t_1,\ t_2\in(-\infty,\infty). \tag{4.70}$$

$U_t(t\in(-\infty,\infty))$ 作为算子值函数，由(4.69)可知 $U_t(t\in(-\infty,\infty))$ 是强连续的．反之，有如下定理(本教材也不能给予证明).

定理8 设 H 是复 Hilbert 空间，$U_t(t(-\infty,\infty))$ 是 H 上酉算子，如果它还是单参数群，对任何 $t_1,\ t_2\in(-\infty,\infty)$，

$$U_{t_1+t_2}=U_{t_1}U_{t_2},$$

并且是强连续的，即对任何 $h\in H$，有

$$\lim_{t'\to t}\|U_{t'}-U_t)h\|=0,$$

那末必存在直线上唯一谱系 $E_x(x\in(-\infty,\infty))$，使得

$$U_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dE_x.$$

这个定理是 Bochner 定理(见第二章§3例4后的注)．通常也称定理8中的谱系 $E_x(x(-\infty,\infty))$ 以及相应的谱测度 $E(\cdot)$ 为 U_t 所决定的谱系和谱测度.

习 题

1. 证明复 Hilbert 空间 H 上酉算子 U 所决定的谱系所产生的谱测度 $E(\cdot)$ 的支集是 $\sigma(U)$.
2. 证明(4.43)所定义的 $F_\lambda(\lambda\in(-\infty,\infty))$ 是谱系.
3. 证明定理3的系的全部命题.
4. 证明定理4.
5. 证明复 Hilbert 空间 H 上自共轭算子 $A(\mathscr{D}(A)$ 是它的定义域) 是有

界的充要条件是$\sigma(A)$是有界集.

6. 证明(4.44)～(4.47).

7. 证明(4.48)中的$E_1(\cdot)$是$\dfrac{N+N^*}{2}$决定的谱测度.

8. 证明(4.50), (4.51).

9. 证明相应于正常算子的谱测度的支集是$\sigma(N)$.

10. 证明由(4.69)所定义的$U_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dE_x$是强连续的.

参 考 文 献

[1] 陈建功,《实函数论》,科学出版社, 1978.

[2] 夏道行等,《实变函数论与泛函分析》,人民教育出版社, 1979.

[3] 郑维行、王声望,《实变函数论与泛函分析概要》,人民教育出版社, 1980.

[4] 江泽坚,《实变函数论》,人民教育出版社, 1959.

[5] Натансон, И. П., «Теория функций вещественной переменной», Изд. 2-ое, Гос. Москва 1957(有中译本,实变函数论,高等教育出版社,1956).

[6] Шилов, Г. Е., «Математический анализ III», Гифмл, 1959 (有中译本:《数学分析专门教程》,高等教育出版社, 1965).

[7] Zaanen, A. C., «An Introduction to the Theory of Integration», North-Holland, Amsterdam, 1958.

[8] Hausdorff, F., W. de Gruyler, «Mengenlehre», Berlin and Leipzig, 1935, (有中译本,集论,科学出版社, 1960).

[9] 柯朗、希尔伯特,《数学物理方法(卷 I)》,科学出版社,1959.

[10] Carleson, L., "On convergence and growth of partial sums of Fourier series", Acta Math. 116, 135～157(1966).

[11] Dunford, N., Schwartz, J., «Linear Operators, Part I: General theory», Interscience publishers, New-York (1958).

[12] Hunt, R. A., "Comment on Lusin's Conjecture and Carleson's proof for L^2-Fourier series", Proceedirgs of the Conference on linear operators and approximation II, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 235～245(1974).

[13] Lusin, N., "Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier", C. R. Acad. Sci. Paris 156(1913).

[14] Sz-Nagy, B., Foias, C., «Harmonic analysis of operators on Hilbert space», Amsterdam, North-Holland (1970).

[15] Schauder, J., "Der Fixpunktsatz in Funkfionalraumen", Studia Math., 2, 171～180(1930).

[16] Наймарк, М.А., «Нормированные Кольца», Гос. Изд.Техниктеор. Литературы, Москва (1956).

[17] 关肇直,《泛函分析讲义》,高等教育出版社,1959.

[18] 关肇直,《拓扑空间概论》,科学出版社, 1958.

[19] 关肇直等,《线性泛函分析入门》,上海科学技术出版社, 1979.